

Elektronen in Besselwellen

BACHELOR-ARBEIT

vorgelegt am 22.08.2011

am Theoretisch-Physikalischen Institut der Physikalisch-Astronomischen Fakultät
der Friedrich Schiller Universität Jena

Name: Benedikt Richter
Matrikelnummer: 102860
Erstgutachter: Prof. Dr. Andreas Wipf
Zweitgutachter: Dr. Emre Onur Kahya

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Seitens des Verfassers bestehen zudem keine Einwände, die vorliegende Bachelorarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, 22. August 2011

Benedikt Richter

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
2	Grundlegendes	5
2.1	Besselwellen als Lösung der Maxwellgleichungen	5
2.2	Einige Eigenschaften von Besselwellen	7
2.3	Die Bewegungsgleichungen	7
2.3.1	Die Lorentz-Gleichung	8
2.3.2	Die Dirac-Gleichung	8
3	Lorentz-Gleichung	9
3.1	Betrachtungen für die fundamentale Besselwelle ($m = 0$)	11
3.2	Betrachtungen für Besselwellen mit $m \neq 0$	14
3.2.1	Lösungen mit $\rho = 0$	16
3.2.2	Lösungen mit $u + m\phi = konst$	17
4	Dirac-Gleichung	27
4.1	Betrachtungen für die fundamentale Besselwelle ($m = 0$)	28
5	Zusammenfassung	32
6	Anhang	33
6.1	Transformation des Feldstärketensors	33
6.2	Bahnkurven mit $m \neq 0$ und $u + m\phi = konst$	34
6.3	Transformation der Dirac-Gleichung	35
6.4	Spin-Konnexion	38

1 Einführung

Es existieren Lösungen der Vakuum-Maxwellgleichungen, welche sich dadurch auszeichnen, dass sie während der Propagation ihre Gestalt beibehalten. Sie werden daher als “beugungsfreie Wellen” bezeichnet. Für die Intensität I eines solchen Feldes gilt demnach

$$I(x, y, z = z_0) = I(x, y, z > z_0).$$

Diese sogenannten Besselwellen besitzen einige bemerkenswerte Eigenschaften, so stellt eine Besselwelle beispielsweise unter freier Propagation ihre ursprüngliche Form wieder her, wenn diese an einer Stelle verändert wurde [1], was zum Beispiel durch ein Hindernis, welches in das Zentrum der Welle gebracht wird, geschehen kann. Eine experimentelle Realisierung einer idealen Besselwelle ist aufgrund der transversal unendlichen Ausdehnung und der damit verbundenen unendlichen Energie nicht möglich. Es ist in den letzten Jahren allerdings immer wieder gelungen näherungsweise Besselwellen zu erzeugen, die in ihrer transversalen Ausbreitung begrenzt sind und über eine relativ große Distanz beugungsfrei propagieren [2] [3].

Aus verschiedenen Gründen ist es daher interessant die Bewegung von geladenen Teilchen (z.B. Elektronen) in Besselwellen zu studieren, so können Besselwellen beispielsweise als Ionen- bzw. Teilchenfallen genutzt werden [4]. Des Weiteren kann ein solches Studium zum notwendigen Verständnis der Dynamik beitragen, beziehungsweise bei Erfolg (genauer: bei Lösung der Dirac-Gleichung) als Ausgangspunkt der Feldquantisierung dienen, welche zur Berechnung der Teilchenproduktion in hochenergetischen Feldern notwendig ist.

Wir werden bei unseren analytischen Untersuchungen der Bewegung eines relativistischen Elektrons in einer Besselwelle von der klassischen Betrachtung ausgehen (Kapitel 3), welche die Lösung der Lorentz-Gleichung erfordert. Hierbei werden wir den Fall der fundamentalen Besselwelle (3.1) und den Fall höherer Besselwellen (3.2) getrennt untersuchen und jeweils Lösungen für Spezialfälle diskutieren. Anschließend wollen wir versuchen, die Dirac-Gleichung für die Bewegung eines Elektrons in einer fundamentalen Besselwelle zu lösen (Kapitel 4), was der quantenmechanischen Behandlung entspricht.

2 Grundlegendes

2.1 Besselwellen als Lösung der Maxwellgleichungen

Zuerst wollen wir zeigen, dass Besselwellen die Maxwellgleichungen im homogenen Raum ohne freie Ladungsträger lösen. Die Maxwellgleichungen sind in diesem Fall in Lorentz-Heaviside-Einheiten gegeben durch

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.4)$$

Wir können ohne Einschränkung $\epsilon = \mu = 1$ setzen, da man mittels der Ersetzungen

$$c \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (2.5)$$

die Lösung für allgemeine ϵ und μ zurückerhält [5]. Wir führen nun das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \mathbf{A} ein, sodass

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.7)$$

gilt. Das magnetische Feld \mathbf{B} kann aufgrund seiner Quellfreiheit (siehe (2.4)) als Rotation eines Vektorfeldes \mathbf{A} geschrieben werden. Der Ausdruck $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ hingegen ist nach (2.2) wirbelfrei und kann somit durch den Gradienten einer skalaren Funktion Φ ausgedrückt werden. Nun wählen wir die Lorenzbedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (2.8)$$

wodurch sich die Maxwellgleichungen auf Wellengleichungen für die Potentiale

$$\square \Phi = 0 \quad (2.9)$$

$$\square \mathbf{A} = 0 \quad (2.10)$$

reduzieren. Da wir zeigen wollen, dass Besselwellen Lösungen der Maxwellgleichungen sind, machen wir für das skalare Potential Φ den Ansatz¹

$$\Phi = \Phi_0 J_m(\alpha\rho) e^{i(\omega t - kz + m\phi)}, \quad (2.11)$$

wobei $J_m(\alpha\rho)$ die Besselfunktion vom Grad m ($m \in \mathbb{Z}$) und Φ_0 eine Konstante ist. Damit gehen wir in

¹Die folgende Ableitung ist in Anlehnung an das Vorlesungsskript Elektrodynamik von Professor A. Wipf [5] entstanden.

die Wellengleichung $\square\Phi = 0$ ein. Mit dem d'Alembert-Operator in Zylinderkoordinaten, der gegeben ist durch

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.12)$$

erhalten wir

$$\square\Phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi + \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \Phi + \frac{1}{\rho^2} m^2 \Phi = 0. \quad (2.13)$$

Substituieren wir nun $\xi = \alpha\rho$, so kann (2.13) geschrieben werden als

$$\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} J_m(\xi) + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} J_m(\xi) + \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^2 - m^2\right] J_m(\xi) = 0. \quad (2.14)$$

Wählt man die Konstante α zu

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}, \quad (2.15)$$

so erkennt man, dass die Gleichung (2.14) gleich der Bessel'schen Differentialgleichung m-ter Ordnung ist. Da $J_m(\xi)$ die Besselfunktion der Ordnung m ist, erfüllt der Ansatz (2.11) die Wellengleichung für Φ . Um nun noch die Lorentzbedingung (2.8) zu erfüllen, muss \mathbf{A} mindestens eine nichtverschwindende Komponente besitzen. Wir machen daher für das Vektorpotential \mathbf{A} folgenden Ansatz

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 J_m(\alpha\rho) e^{i(\omega t - kz + m\phi)}, \quad (2.16)$$

wobei \mathbf{A}_0 ein konstanter Vektor ist. Damit gehen wir in die Eichbedingung ein und es ergibt sich²

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = e^{i(\omega t - kz + m\phi)} \left(J_m(\alpha\rho) \left(-ikA_{0z} + i\frac{\omega}{c} \Phi_0 \right) + \alpha \frac{d}{d(\alpha\rho)} [J_m(\alpha\rho)] (\cos(\phi) A_{0x} + \sin(\phi) A_{0y}) \right) = 0. \quad (2.17)$$

In (2.17) gilt Gleichheit, wenn $A_{0x} = A_{0y} = 0$ und $A_{0z} = \frac{\omega}{kc} \Phi_0$ gewählt wird, sodass das Potential in Viererschreibweise lautet

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\omega}{kc} \end{pmatrix} \Phi_0 J_m(\alpha\rho) e^{i(\omega t - kz + m\phi)}. \quad (2.18)$$

Wir können nun mittels der Gleichungen (2.7) und (2.6) das elektrische und magnetische Feld berechnen. Für die Besselwelle m-ter Ordnung lauten diese in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{B} = \Phi_0 \frac{\omega}{kc} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} (J_{m-1}(\alpha\rho) - J_{m+1}(\alpha\rho)) \cos(\omega t - kz + m\phi) \sin(\phi) - \frac{m}{\rho} J_m(\alpha\rho) \sin(\omega t - kz + m\phi) \cos(\phi) \\ -\frac{\alpha}{2} (J_{m-1}(\alpha\rho) + J_{m+1}(\alpha\rho)) \cos(\omega t - kz + m\phi) \cos(\phi) - \frac{m}{\rho} J_m(\alpha\rho) \sin(\omega t - kz + m\phi) \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

²Für Besselfunktionen vom Grad m gilt: $\frac{d}{dx} J_m(cx) = \frac{c}{2} (J_{m-1}(cx) - J_{m+1}(cx))$

$$\mathbf{E} = \Phi_0 \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} (J_{m-1}(\alpha\rho) - J_{m+1}(\alpha\rho)) \cos(\omega t - kz + m\phi) \cos(\phi) - \frac{m}{\rho} J_m(\alpha\rho) \sin(\omega t - kz + m\phi) \sin(\phi) \\ -\frac{\alpha}{2} (J_{m-1}(\alpha\rho) - J_{m+1}(\alpha\rho)) \cos(\omega t - kz + m\phi) \sin(\phi) + \frac{m}{\rho} J_m(\alpha\rho) \sin(\omega t - kz + m\phi) \cos(\phi) \\ \frac{\alpha^2}{k} J_m(\alpha\rho) \sin(\omega t - kz + m\phi) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

2.2 Einige Eigenschaften von Besselwellen

Der Drehimpuls eines elektromagnetischen Feldes berechnet sich durch das Raumintegral über die Drehimpulsdichte \mathbf{l}_{Feld} , wobei die Dichte \mathbf{l}_{Feld} gegeben ist durch

$$\mathbf{l}_{Feld} = \frac{1}{c} \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (2.21)$$

Wir interessieren uns aus Symmetriegründen vor allem für die z-Komponente des Drehimpulses des elektromagnetischen Feldes. Die zugehörige Drehimpulsdichte für das oben gegebene Feld lautet

$$\mathbf{l}_{Feld,z} \cong -\frac{\alpha^2 \omega}{k^2 c^2} m [\Phi_0 J_m(\alpha\rho) \sin(\omega t - kz + m\phi)]^2. \quad (2.22)$$

Damit erkennt man den wesentlichen Unterschied zwischen Besselwellen mit $m = 0$ (fundamentale Besselwelle) und Besselwellen mit $m \in (0, \infty)$. Die fundamentale Besselwelle trägt im Gegensatz zu Besselwellen mit $m \in (0, \infty)$ keinen Drehimpuls bezüglich der Symmetrieachse.

Ein weiterer Unterschied ist dadurch gegeben, dass das Feld der fundamentalen Besselwelle für $\rho \rightarrow 0$ nicht verschwindet, da $J_0(\alpha\rho) \rightarrow 1$ für $\rho \rightarrow 0$. Für die Besselfunktionen höherer Ordnung m gilt hingegen $J_m(\alpha\rho) \rightarrow 0$ für $\rho \rightarrow 0$, sodass $A^\mu = 0$ für $\rho = 0$.

2.3 Die Bewegungsgleichungen

Da wir uns für die Bewegung eines relativistischen Elektrons in Anwesenheit von Besselwellen interessieren, werden wir fortan speziell-relativistisch im Minkowski-Raum rechnen. Für die Signatur der Metrik wählen wir -2 . Der metrische Tensor für kartesische Koordinaten η ist somit gegeben durch

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (2.23)$$

Nun führen wir noch den elektromagnetischen Feldstärketensor ($F^{\mu\nu}$), den wir zur Formulierung der Lorentz-Gleichung benötigen, ein. Dieser ist gegeben durch

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = (-\mathbf{E}, \mathbf{B}), \quad (2.24)$$

wobei die Indizes die kartesischen Komponenten der Felder bezeichnen.

2.3.1 Die Lorentz-Gleichung

Wir werden zunächst die klassische Bewegung eines geladenen Teilchens³ in Besselwellen untersuchen. Die Gleichung, die hierzu dienen wird, ist die Lorentz-Gleichung, welche die klassische, relativistische Bewegung eines geladenen Teilchens der Masse μ und der Ladung e in elektrischen und magnetischen Feldern beschreibt. Der Spin des Elektrons wird dabei, ebenso wie die Rückwirkung des Teilchens auf das äußere Feld, nicht berücksichtigt. Die Lorentz-Gleichung ist in kartesischen Koordinaten durch den folgenden Ausdruck

$$\ddot{x}^\mu = \frac{e}{\mu c} F^\mu{}_\nu \dot{x}^\nu \quad (2.25)$$

gegeben. Hierbei bezeichnet der Punkt bei \dot{x} die Ableitung nach der Eigenzeit τ , die durch $d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt$ ausgedrückt werden kann. $F^\mu{}_\nu$ berechnet sich aus (2.24) durch $F^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\beta} F^{\mu\beta}$. In diesem Zusammenhang ist es außerdem wichtig auf die Nebenbedingung

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = c^2 \quad (2.26)$$

hinzuweisen. Ist diese erfüllt, so ist eine Bewegung mit $v(t) > c$ ausgeschlossen. Die Komponenten von (\dot{x}^μ) sind also nach (2.26) nicht unabhängig voneinander.

2.3.2 Die Dirac-Gleichung

Wollen wir die quantenmechanische Bewegung des Elektrons analysieren, so wählen wir die Dirac-Gleichung. Diese ist erster Ordnung in den räumlichen und der zeitlichen Ableitung, was eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation möglich macht. Sie berücksichtigt im Gegensatz zur Lorentz-Gleichung auch den Spin des Elektrons. Ohne äußere Felder hat die Dirac-Gleichung in kartesischen Koordinaten die Form⁴

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - \mu) \psi(x) = 0. \quad (2.27)$$

Hierbei bezeichnet γ^μ die sogenannten Gamma-Matrizen. Diese sind (in irreduzibler Darstellung) durch 4×4 -Matrizen, welche der Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.28)$$

genügen, gegeben. $(g^{\mu\nu})$ steht hierbei für den metrischen Tensor. Es existieren verschiedene Darstellungen der γ^μ . Wir werden hier die sogenannte Standard- oder Dirac-Darstellung wählen, in der die γ^μ unter Verwendung der Paulimatrizen σ^i folgendermaßen geschrieben werden können⁵

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

³Im Weiteren werden wir immer nur von Elektronen sprechen. Daher sollte bemerkt sein, dass die Ergebnisse, welche wir hier erarbeiten, für geladene Teilchen jedweder Art gültig sind, wenn man die entsprechenden Werte für die Masse μ und die Ladung e verwendet.

⁴Hier werden natürliche Einheiten mit $\hbar = c = 1$ verwendet.

⁵Indices, die durch griechische Buchstaben gegeben sind, nehmen grundsätzlich die Werte 0, 1, 2, 3 an, wohingegen lateinische Buchstaben die Werte 1, 2, 3 annehmen.

Das Gebilde $\psi(x)$ in (2.27) ist ein vierkomponentiger Spinor

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Die einzelnen $\psi_i(x)$ sind im Allgemeinen komplexe Wellenfunktionen. Wollen wir nun Elektronen in elektrischen und magnetischen Feldern beschreiben, so ist das Potential (A_μ) anzukoppeln, sodass man für die Dirac-Gleichung mit externen Feldern den Ausdruck

$$[i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - \mu] \psi = 0 \quad (2.31)$$

erhält.

3 Lorentz-Gleichung

Im Folgenden werden wir Lösungen der Lorentz-Gleichung für ein Elektron, das sich in Besselwellen verschiedener Ordnung m bewegt, suchen. Hierzu ist es ratsam, dem Problem angepasste Koordinaten zu verwenden. Da wir es mit einer zylindersymmetrischen Feldverteilung zu tun haben, wählen wir Zylinderkoordinaten y^μ mit

$$y^0 = ct = x^0 \quad (3.1)$$

$$y^1 = \rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad (3.2)$$

$$y^2 = \phi = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \quad (3.3)$$

$$y^3 = z = x^3, \quad (3.4)$$

wobei wir die z-Achse entlang dem Zentrum der Besselwelle legen. Für die weiteren Berechnungen benötigen wir den metrischen Tensor ($g_{\mu\nu}$) für Zylinderkoordinaten. Dieser kann geschrieben werden als

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Als Nächstes wollen wir unsere Bewegungsgleichungen transformieren. Hierzu ersetzen wir die Ableitung durch die kovariante Ableitung und schreiben die die Lorentz-Gleichung folgendermaßen in den neuen Koordinaten

$$\ddot{y}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{y}^\nu \dot{y}^\rho = \frac{e}{\mu c} \tilde{F}^\mu{}_\nu \dot{y}^\nu. \quad (3.6)$$

Durch die kovariante Ableitung erhalten wir die Christoffel-Symbole $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$. Bei deren Berechnung merken wir allerdings, dass sie beinahe sämtlich verschwinden. Die einzigen nicht verschwindenden Elemente

sind $\Gamma_{22}^1 = -\rho$ und $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\rho}$. Wir haben nun noch den Feldstärketensor zu transformieren. Dies geschieht mittels

$$\tilde{F}^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu F^\alpha{}_\beta, \quad (3.7)$$

wobei wir die Matrix $(\Lambda^\mu{}_\alpha)$ eingeführt haben. Wir schreiben diese als

$$(\Lambda^\mu{}_\alpha) := \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \right). \quad (3.8)$$

Entsprechend berechnen wir die inverse Matrix zu

$$\left((\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \right) = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \right). \quad (3.9)$$

Mit der Transformationsmatrix $(\Lambda^\mu{}_\alpha)$ können wir nach (3.7) den Feldstärketensor in den neuen Koordinaten berechnen. Wir erhalten den folgenden Ausdruck⁶

$$\left(\tilde{F}^\mu{}_\nu \right) = \Phi_0 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] \cos(\xi) & mJ_m(\alpha\rho) \sin(\xi) & \frac{\alpha^2}{k} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) \\ -\frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] \cos(\xi) & 0 & 0 & \frac{\omega}{kc} \frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] \cos(\xi) \\ \frac{m}{\rho^2} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) & 0 & 0 & -\frac{m}{\rho^2} \frac{\omega}{kc} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) \\ \frac{\alpha^2}{k} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) & -\frac{\omega}{kc} \frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] \cos(\xi) & m \frac{\omega}{kc} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

wobei wir aus Platzgründen die Abkürzung $\xi = \omega t - kz + m\phi$ eingeführt haben. Die Bewegungsgleichungen können nun gemäß (3.6) aufgeschrieben werden

$$c\ddot{t} = \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \left[-\frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] \cos(\xi) \dot{\rho} + mJ_m(\alpha\rho) \sin(\xi) \dot{\phi} + \frac{\alpha^2}{k} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) \dot{z} \right] \quad (3.11)$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \left[\frac{\omega}{kc} \left(-\frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] \cos(\xi) \dot{\rho} + mJ_m(\alpha\rho) \sin(\xi) \dot{\phi} \right) + \frac{\alpha^2}{k} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) \dot{z} \right] \quad (3.12)$$

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 = -\frac{e}{\mu c} \Phi_0 \left[\frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] \cos(\xi) \left(c\dot{t} - \frac{\omega}{kc} \dot{z} \right) \right] \quad (3.13)$$

$$\ddot{\phi} + 2\frac{1}{\rho}\dot{\rho}\dot{\phi} = \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \left[\frac{m}{\rho^2} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) \left(c\dot{t} - \frac{\omega}{kc} \dot{z} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Damit sind die Bewegungsgleichungen für beliebige m aufgestellt. Um die Bewegungsgleichungen für den Fall $m = 0$ zu erhalten, werden wir später einfach $m = 0$ setzen, wodurch sich die Gleichungen auf die für die Bewegung in einer fundamentalen Besselwelle reduzieren. Es ist hier zweckmäßig, die Koordinaten

$$u = \omega t - kz \quad (3.15)$$

$$v = \frac{\omega}{c} z - ckt \quad (3.16)$$

einzuführen. Wir formen kurz um und können die Gleichungen dann mit den neuen Koordianten u und

⁶Eine detailliertere Rechnung ist unter (6.1) gegeben.

v angeben

$$\ddot{u} = \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} J_m(\alpha \rho) \sin(\xi) \dot{v} \quad (3.17)$$

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 = \frac{1}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \left[\frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha \rho)] \cos(\xi) \dot{v} \right] \quad (3.18)$$

$$\ddot{\phi} + 2 \frac{1}{\rho} \dot{\rho} \dot{\phi} = -\frac{1}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \left[\frac{m}{\rho^2} J_m(\alpha \rho) \sin(\xi) \dot{v} \right] \quad (3.19)$$

$$\ddot{v} = \frac{\alpha^2}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \left[\left(-\frac{d}{d\tau} [J_m(\alpha \rho)] \cos(\xi) + m J_m(\alpha \rho) \sin(\xi) \dot{\phi} \right) + J_m(\alpha \rho) \sin(\xi) \dot{u} \right] \quad (3.20)$$

Hierbei soll bemerkt sein, dass sich ξ nun als $\xi = u + m\phi$ schreibt. Bei Betrachtung der rechten Seite von Gleichung (3.20) fällt auf, dass diese als totale Ableitung geschrieben werden kann

$$\begin{aligned} \ddot{v} &= \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \left[-\frac{d}{d\tau} [J_m(\alpha \rho)] \cos(u + m\phi) + J_m(\alpha \rho) \sin(u + m\phi) m \dot{\phi} + J_m(\alpha \rho) \sin(u + m\phi) \dot{u} \right] \\ &= \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \left[(-\cos(u + m\phi)) \frac{d}{d\tau} [J_m(\alpha \rho)] + \frac{d}{d\tau} [-\cos(u + m\phi)] J_m(\alpha \rho) \right] \\ &= -\frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \frac{d}{d\tau} [\cos(u + m\phi) J_m(\alpha \rho)], \end{aligned} \quad (3.21)$$

sodass wir direkt integrieren können. Die integrierte Form von (3.20) lautet dann

$$\dot{v} = -\frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \cos(u + m\phi) J_m(\alpha \rho) + C \quad (3.22)$$

mit der Integrationskonstanten C . Wir wollen nun noch die Nebenbedingung $g_{\mu\nu} \frac{dy^\mu}{d\tau} \frac{dy^\nu}{d\tau} = c^2$ für die von uns gewählten Koordinaten explizit angeben. Da wir die Koordinaten ct und z durch u und v ersetzt haben, dürfen wir für die Berechnung nicht die Metrik (3.5) verwenden, sondern müssen eine leicht davon abweichende Metrik⁷ nutzen. Für die Nebenbedingung gilt dann

$$\frac{1}{\alpha^2} (\dot{u}^2 - \dot{v}^2) - \rho^2 \dot{\phi}^2 - \dot{\rho}^2 = c^2. \quad (3.23)$$

3.1 Betrachtungen für die fundamentale Besselwelle ($m = 0$)

Nach dieser Vorarbeit ist es uns nun möglich die klassischen Bewegungsgleichungen für die Bewegung eines relativistischen Elektrons in einer fundamentalen Besselwelle aufzuschreiben. Hierzu setzen wir in den, für beliebige m aufgestellten, Bewegungsgleichungen $m = 0$. Damit können wir folgende Gleichungen

⁷Diese ist hier nicht explizit angegeben, kann allerdings dem Anhang entnommen werden. Zu finden ist sie als Formel (6.35).

formulieren

$$\ddot{u} = \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} J_0(\alpha \rho) \sin(u) \dot{v} \quad (3.24)$$

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 = -\frac{\alpha}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 J_1(\alpha \rho) \cos(u) \dot{v} \quad (3.25)$$

$$\rho^2 \ddot{\phi} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\phi} = 0 \quad (3.26)$$

$$\dot{v} = -\frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \cos(u) J_0(\alpha \rho) + C. \quad (3.27)$$

Wie wir in den Vorbetrachtungen festgestellt haben, besitzt die fundamentale Besselwelle eine verschwindende z-Komponente des Drehimpulses (vgl. (2.22)). Wir wollen daher nun versuchen den entsprechenden Erhaltungssatz aus den Bewegungsgleichungen abzuleiten. Wir betrachten Gleichung (3.26) und erkennen, dass

$$\frac{d}{d\tau} (\rho^2 \dot{\phi}) = 0 \quad (3.28)$$

gilt. Diese Gleichung beschreibt genau den erwarteten Sachverhalt, dass die z-Komponente des Drehimpulses \mathbf{L} erhalten ist. Es kann also folgendes geschrieben werden

$$\rho^2 \dot{\phi} = \frac{L_z}{\mu} = \text{konst.} \quad (3.29)$$

Mit Hilfe dieser nützlichen Formel ist es uns möglich $\dot{\phi}$ aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren. Setzen wir dann noch \dot{v} in die entsprechenden Gleichungen ein, so erhalten wir zwei gekoppelte, nichtlineare Differentialgleichungen 2. Ordnung für u und ρ

$$\ddot{u} = -\alpha^2 \left[\frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha}{k} J_0(\alpha \rho) \right]^2 \sin(u) \cos(u) + \alpha C \frac{\alpha}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 J_0(\alpha \rho) \sin(u) \quad (3.30)$$

$$\ddot{\rho} - \frac{L_z^2}{\mu^2 \rho^3} = \alpha \left[\frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha}{k} \right]^2 J_1(\alpha \rho) J_0(\alpha \rho) \cos^2(u) - C \frac{\alpha}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 J_1(\alpha \rho) \cos(u). \quad (3.31)$$

Als Nächstes möchten wir die Form unserer Nebenbedingung (3.23) im Fall $m = 0$ ableiten. Hierzu setzen wir (3.29) in (3.23) ein und schreiben

$$\frac{1}{\alpha^2} (\dot{u}^2 - \dot{v}^2) - \frac{L_z^2}{\mu^2 \rho^2} - \dot{\rho}^2 = c^2. \quad (3.32)$$

Betrachtet man Gleichung (3.32) oder noch allgemeiner (3.23), so fällt auf, dass $\dot{u} \neq 0$ allgemein gelten muss, da die Nebenbedingung sonst aufgrund der Tatsache, dass die rechte Seite immer größer Null ist, nicht erfüllt werden kann. Wenn wir nun mit diesem Wissen den Ansatz $\rho = \text{konst}$ und $L_z \neq 0$ (Dies bedeutet, dass $\dot{\phi} = \text{konst} \neq 0$.) machten, so folgte nach (3.31) sofort, dass $u = \text{konst}$ und somit $\dot{u} = 0$ gelten müsste. Daher existieren keine Lösungen mit $\rho = \text{konst}$ und $L_z \neq 0$ für den Fall $m = 0$. Eine Bewegung des Elektrons auf Kreis- oder Spiralbahnen (Helices) in einer fundamentalen Besselwelle ist damit ausgeschlossen. Da im Allgemeinen⁸ $\dot{\rho} \neq 0$ multiplizieren wir (3.30) mit \dot{u} und (3.31) mit $\alpha^2 \dot{\rho}$

⁸Der Ausdruck ist hier nicht wörtlich zu nehmen. Die einzige Ausnahme werden wir jedoch in (3.1) diskutieren, sodass dies jenseits dieser Ausnahme allgemein gilt.

und addieren die zwei entstehenden Gleichungen. Dann erhalten wir durch Integration eine weitere Beziehung für die Quadrate der ersten Ableitungen von u und ρ . Die integrierte Gleichung lautet

$$\dot{u}^2 - \alpha^2 \left(\dot{\rho}^2 + \frac{L_z^2}{\mu^2 \rho^2} \right) = \left[\frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \right]^2 J_0^2(\alpha \rho) \cos^2(u) - 2C \frac{\alpha^2}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 J_0(\alpha \rho) \cos(u) + B, \quad (3.33)$$

wobei B hier die Rolle einer Integrationskonstanten spielt.

Die Bewegungsgleichungen eines Elektrons in einer Besselwelle sind damit gelöst, wenn Funktionen $\rho(\tau)$, $u(\tau)$ sowie $v(\tau)$ gefunden wurden, die den Gleichungen (3.27), (3.30), (3.31) und (3.32) genügen, da sich die Funktion $\phi(\tau)$ dann leicht aus (3.29) bestimmen lässt. Hierzu müssen gekoppelte, nichtlineare Differentialgleichungen 2. Ordnung gelöst werden. Dies ist für den allgemeinen Fall einer fundamentalen Besselwelle nicht gelungen.

Es konnten einige Kandidaten für Lösungen ausgeschlossen werden und die Lösung für einen Spezialfall wurde gefunden. Diese wollen wir im Folgenden darstellen.

Lösungen für $\dot{u} = konst$

Wir wollen nun die Möglichkeiten, die der Spezialfall $\dot{u} = konst$ bietet, untersuchen. D.h., wir setzen für $u(\tau)$ eine lineare Funktion $u(\tau) = u_1\tau + u_0$ an. Dann gilt für die Bewegungsgleichungen

$$0 = \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} J_0(\alpha \rho) \sin(u_1\tau + u_0) \dot{v} \quad (3.34)$$

$$\ddot{\rho} - \frac{L_z^2}{\mu^2 \rho^2} = -\frac{\alpha}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 J_1(\alpha \rho) \cos(u_1\tau + u_0) \dot{v} \quad (3.35)$$

$$\dot{v} = -\frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \cos(u_1\tau + u_0) J_0(\alpha \rho) + C. \quad (3.36)$$

Man erkennt, dass Gleichung (3.34) nur dann gelöst ist, wenn entweder $\dot{v} = 0$ oder $J_0(\alpha \rho) = 0$ gilt. Setzen wir $\dot{v} = 0$, d.h., $v(\tau) = v_0 = konst$, so folgt

$$\ddot{\rho} - \frac{L_z^2}{\mu^2 \rho^2} = 0 \quad (3.37)$$

$$C - \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \cos(u_1\tau + u_0) J_0(\alpha \rho) = 0. \quad (3.38)$$

Diese Differentialgleichungen haben nur in dem Fall eine Lösung, dass $J_0(\alpha \rho) = 0$, $C = 0$ und $L_z = 0$. Wir nehmen dies an und sehen aus (3.29), dass

$$\phi(\tau) = \phi_0 = konst, \quad (3.39)$$

da aus $J_0(\alpha \rho) = 0$ sofort $\rho(\tau) = \rho_0 = konst$ folgt. Damit sind sämtliche Bewegungsgleichungen erfüllt und wir haben eine spezielle Lösung der Selbigen gefunden. Mittels der Nebenbedingung (3.32) bestimmen wir nun noch u_1 und schreiben die Lösung dann als

$$\begin{pmatrix} ct \\ \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}\omega\tau \\ \rho_0 \\ 0 \\ \frac{1}{\alpha}kc\tau + z_0 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

wobei wir von den Koordinaten u und v zu t und z übergegangen sind. Des Weiteren haben wir ϕ_0 und t_0 Null gesetzt, was aufgrund der Symmetrie und der Stationarität der fundamentalen Besselwelle ohne Einschränkung möglich ist. Wir wollen die Kurve noch durch die Koordiantenzeit t parametrisiert darstellen. Hierzu bestimmen wir $\tau(t)$ aus (3.40) und können die umparametrisierte Lösung folgendermaßen schreiben

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ 0 \\ \frac{k}{\omega}c^2t + z_0 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Ein Elektron kann sich demnach geradlinig gleichförmig parallel zur z-Achse mit der Geschwindigkeit $v_z = \frac{k}{\omega}c^2 < c$ bewegen. Es trägt somit ebenso wie die fundamentale Besselwelle keinen Drehimpuls bezüglich der z-Achse. Aufgrund der Feldstruktur der fundamentalen Besselwelle war zu erwarten, dass solche Bahnen mit $L_z = 0$ und $\rho = \rho_0$ existieren.

Nun kommen wir noch zur zweiten Möglichkeit Gleichung (3.34) zu lösen und wählen wie beschrieben ρ derart, dass $J_0(\alpha\rho) = 0$, d.h., $\rho = \rho_0 = konst.$ Dies führt auf folgende Bewegungsgleichungen

$$-\frac{L_z^2}{\mu^2\rho_0^2} = -\frac{\alpha}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 J_1(\alpha\rho_0) \cos(u_1\tau + u_0) C \quad (3.42)$$

$$\dot{v} = C. \quad (3.43)$$

(3.43) kann leicht gelöst werden und liefert $v(\tau) = C\tau + v_0$. Gleichung (3.42) hingegen besitzt für $L_z \neq 0$ keine Lösung⁹, sodass (3.41) die einzige mit den Bewegungsgleichungen verträgliche Lösung im Fall $\dot{u} = konst$ darstellt.

3.2 Betrachtungen für Besselwellen mit $m \neq 0$

Nach den Betrachtungen bezüglich der Bewegungsgleichungen für ein Elektron in einer fundamentalen Besselwelle, wollen wir uns nun dem Studium der Bewegungsgleichungen für Besselwellen höherer Ordnung widmen. D.h., wir wollen versuchen Lösungen der Bewegungsgleichungen für den Fall m

⁹Man beachte, dass $u_1 \neq 0$ zwingend erforderlich.

($m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$) zu finden. Dazu notieren wir zuerst die zu lösenden Gleichungen

$$\ddot{u} = \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} J_m(\alpha \rho) \sin(u + m\phi) \dot{v} \quad (3.44)$$

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 = \frac{1}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \left[\frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha \rho)] \cos(u + m\phi) \dot{v} \right] \quad (3.45)$$

$$\ddot{\phi} + 2 \frac{1}{\rho} \dot{\rho} \dot{\phi} = -\frac{1}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \left[\frac{m}{\rho^2} J_m(\alpha \rho) \sin(u + m\phi) \dot{v} \right] \quad (3.46)$$

$$\dot{v} = -\frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \cos(u + m\phi) J_m(\alpha \rho) + C. \quad (3.47)$$

Im Fall der fundamentalen Besselwelle hatten wir gefunden, dass die z-Komponente des Drehimpulses erhalten ist (vgl. (3.29)). Wir betrachten nun Besselwellen, die einen nicht verschwindenden Drehimpuls bezüglich der z-Achse aufweisen (siehe (2.2)). Daher erwarten wir nicht, dass die Größe $\rho^2 \dot{\phi}$ erhalten ist. Wir wollen aber dennoch versuchen eine modifizierte Version des Erhaltungssatzes (3.29) zu finden, die zusätzlich noch von Teilen des Feldes abhängt. Eine solche erhaltene Größe existiert tatsächlich. Hierzu betrachtet man die Gleichungen (3.44) und (3.46) und stellt fest, dass beide übereinstimmen, wenn man (3.46) mit $-\frac{\alpha^2 \rho^2}{m}$ multipliziert. Wir können also mit der Bezeichnung $\frac{L_z(\tau)}{\mu} = \rho^2 \dot{\phi}$ schreiben

$$\rho^2 \ddot{\phi} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\phi} = -\frac{m}{\alpha^2} \ddot{u} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{L_z(\tau)}{\mu} \right). \quad (3.48)$$

Diese Gleichung kann in Anlehnung an (3.29) folgendermaßen formuliert werden

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{L_z(\tau)}{\mu} + \frac{m}{\alpha^2} \dot{u} \right) = 0. \quad (3.49)$$

Wir haben also einen Erhaltungssatz gefunden, der im Wesentlichen (3.29) entspricht. Integriert man (3.49) und stellt um, so kann für \dot{u} geschrieben werden

$$\dot{u} = -\frac{\alpha^2}{m} \rho^2 \dot{\phi} + C_2, \quad (3.50)$$

wobei C_2 einer Integrationskonstanten entspricht. Mit diesen Ergebnissen können die noch zu lösenden Gleichungen auf folgende Form gebracht werden

$$\dot{u} = -\frac{\alpha^2}{m} \rho^2 \dot{\phi} + C_2 \quad (3.51)$$

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 = -\left[\frac{\alpha}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \right]^2 \frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha \rho)] J_m(\alpha \rho) \cos^2(\xi) + \frac{C}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha \rho)] \cos(\xi) \quad (3.52)$$

$$\rho^2 \ddot{\phi} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\phi} = \left[\frac{\alpha}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \right]^2 m J_m^2(\alpha \rho) \sin(u + m\phi) \cos(\xi) - \frac{C}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 m J_m(\alpha \rho) \sin(\xi) \quad (3.53)$$

$$\dot{v} = -\frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \cos(\xi) J_m(\alpha \rho) + C, \quad (3.54)$$

wobei wir wieder die abkürzende Schreibweise $\xi = u + m\phi$ verwendet haben. Schließlich wollen wir noch ein Analogon zu (3.33) angeben. Dazu sehen wir die Bewegungsgleichungen scharf an und multiplizieren

dann (3.52) mit $m\dot{\rho}$ und (3.53) mit dem Faktor $\dot{\xi}$, um die beiden entstehenden Gleichungen sodann zu addieren. Die rechte Seite der entstehenden Gleichung kann dann, ebenso wie die linke Seite, integriert werden. Nach einer kurzen Rechnung erhält man

$$2C_2\rho^2\dot{\phi} - m\dot{\rho}^2 + m\rho^2\dot{\phi}^2 - \frac{\alpha^2}{m}\rho^4\dot{\phi}^2 = - \left[\frac{\alpha}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \right]^2 mJ_m^2(\alpha\rho) \cos^2(\xi) + 2C \frac{1}{k} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 mJ_m(\alpha\rho) \cos(\xi) + B, \quad (3.55)$$

wobei die Funktion u auf der linken Seite gemäß (3.51) ersetzt wurde und B eine Integrationskonstante darstellt.

Es sind nun also Funktionen $\rho(\tau)$, $u(\tau)$, $\phi(\tau)$ sowie $v(\tau)$ zu bestimmen, welche den Gleichungen (3.51) - (3.54) unter der Nebenbedingung (3.32) genügen. Die Bewegungsgleichungen konnten bisher dahingehend vereinfacht werden, dass die Erhaltungsgröße (3.49) genutzt wurde und ein erstes Integral lieferte.

Eine allgemeine Lösung dieser Differentialgleichungen für den Fall ($m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$) wurde nicht gefunden. Wir wollen daher im Folgenden zwei Spezialfälle betrachten. Der Erste ist als relativ trivial anzusehen. Dessen ungeachtet trägt er dennoch zum Verständnis der Dynamik in Besselwellen bei. Bei dem zweiten Spezialfall handelt es sich in etwa um eine Verallgemeinerung des Falles, den wir in (3.1) betrachtet haben. Dieser liefert interessante Ergebnisse, die so nicht unbedingt zu erwarten waren.

3.2.1 Lösungen mit $\rho = 0$

Anfangen wollen wir mit der Untersuchung der Bewegung eines Elektrons entlang der z-Achse. D.h., wir suchen Lösungen mit $\rho = 0$. Wie in den Vorbetrachtungen erörtert, verschwindet das Feld für Besselwellen höherer Ordnung in diesem Fall. Formal gesehen lösen wir also die Lorentz-Gleichung mit $F^{\mu\nu} \equiv 0$. Man kann das Problem aber auch so lesen, dass man eine Bewegungsgleichung einer (im Ort) eindimensionalen Bewegung ohne äußere Kräfte zu lösen hat. Aus Gründen der Anschaulichkeit wählen wir die zweite Sichtweise und schreiben, obwohl uns die Lösung schon klar ist,

$$\ddot{x}^\mu = 0. \quad (3.56)$$

Hierbei haben wir kartesische Koordinaten eingeführt. Es gelten die Nebenbedingungen $x = y = 0$ und $(\dot{x})^2 = c^2$. Nach kurzer Überlegung geben wir die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z t \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

mit der konstanten Geschwindigkeit v_z , die der Nebenbedingung $v_z < c$ unterworfen ist, an. Das Elektron kann also entsprechend dieser Lösung entlang dem Zentrum der Besselwelle propagieren ohne von ihr beeinflusst zu werden. Eine solche Bahnkurve ist praktisch nicht zu realisieren, könnte allerdings, falls das Feld der Besselwelle in der näheren Umgebung des Zentrums nicht zu stark anwächst, zumindest streckenweise eine gute Näherung darstellen.

3.2.2 Lösungen mit $u + m\phi = konst$

Wir wollen uns nun einem weniger trivialen Fall zuwenden und spezielle Lösungen der Bewegungsgleichungen suchen, für die $u + m\phi = konst$ gilt. Dies führt dazu, dass der Phasenfaktor im zugrundeliegenden Potential (2.18) konstant ist. Dies war im Fall der fundamentalen Besselwelle nicht möglich, da (wie in (3.1) gezeigt) die Nebenbedingung (3.23), dann aufgrund der Tatsache $\dot{u} = 0$ nicht mehr zu erfüllen ist. Das ist hier anders, da wir statt $\dot{u} = 0$ nun $\dot{u} + m\dot{\phi} = 0$ fordern, was die Möglichkeit $\dot{u} \neq 0$ offen lässt. Zuerst wollen wir die zu lösenden Gleichungen unter Zuhilfenahme der Abkürzung ξ notieren. Diese sind gegeben durch

$$\dot{u} = -\frac{\alpha^2}{m}\rho^2\dot{\phi} + C_2 \quad (3.58)$$

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 = -\left[\frac{\alpha}{k}\frac{e}{\mu c}\Phi_0\right]^2 \frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] J_m(\alpha\rho) \cos^2(\xi) + \frac{C}{k}\frac{e}{\mu c}\Phi_0 \frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] \cos(\xi) \quad (3.59)$$

$$\rho^2\ddot{\phi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} = \left[\frac{\alpha}{k}\frac{e}{\mu c}\Phi_0\right]^2 mJ_m^2(\alpha\rho) \sin(\xi) \cos(\xi) - \frac{C}{k}\frac{e}{\mu c}\Phi_0 mJ_m(\alpha\rho) \sin(\xi) \quad (3.60)$$

$$\dot{v} = -\frac{e}{\mu c}\Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \cos(\xi) J_m(\alpha\rho) + C. \quad (3.61)$$

Nun wollen wir die Funktionen u und ϕ näher spezifizieren, wozu uns die Bewegungsgleichungen dienen werden. Wir schreiben das Gleichungssystem, das durch unsere Bedingung $\dot{u} + m\dot{\phi} = 0$ und Gleichung (3.58) gegeben ist

$$\dot{u} + m\dot{\phi} = 0 \quad (3.62)$$

$$\dot{u} + \frac{\alpha^2}{m}\rho^2\dot{\phi} = C_2. \quad (3.63)$$

Die Lösung des Gleichen erlaubt uns die explizite Angabe der Ableitungen der Funktionen u und ϕ , die dadurch bis auf eine Konstante bestimmt sind. Es gilt folgendes

$$\dot{u} = \frac{C_2 m^2}{m^2 - \alpha^2 \rho^2} \quad (3.64)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{C_2 m}{m^2 - \alpha^2 \rho^2}. \quad (3.65)$$

Wir wollen nun versuchen die Funktion $\rho(\tau)$ näher zu charakterisieren. Dazu gehen wir mit den eben berechneten \dot{u} und $\dot{\phi}$ in den Erhaltungssatz (3.49) ein und können schreiben

$$\frac{d}{d\tau} \left(-\rho^2 \frac{C_2 m}{m^2 - \alpha^2 \rho^2} + \frac{C_2 m^3}{\alpha^2 (m^2 - \alpha^2 \rho^2)} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{C_2 m}{\alpha^2} \right) = 0. \quad (3.66)$$

Wir erkennen, dass in diesem Spezialfall mit $u + m\phi = konst$ der Erhaltungssatz (3.49) für beliebige Funktionen ρ erfüllt ist, da $C_2 = konst$ gilt. Die Bewegung eines Elektrons in der fundamentalen Besselwelle konnte nur dann mit konstantem radialem Abstand $\rho = \rho_0$ stattfinden, wenn L_z verschwand. Wir fragen uns, ob dies im Fall von Besselwellen höherer Ordnung ebenso gilt und versuchen nun

Bahnkurven zu finden, die durch

$$L_z(\tau) = L_z \neq 0 \quad (3.67)$$

$$\rho(\tau) = \rho_0 \quad (3.68)$$

charakterisiert sind. Da (3.66) für beliebige ρ erfüllt ist, tritt bis hierher kein Widerspruch auf, wenn wir $\rho(\tau) = \rho_0 = \text{konst}$ setzen. Wir tun dies und können damit schreiben

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{L_z(\tau)}{\mu} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{L_z}{\mu} \right) = 0, \quad (3.69)$$

wobei $\frac{L_z}{\mu} = \rho_0^2 \dot{\phi}$ ist. Mit Hilfe dieser Formel können wir nun die Konstante C_2 durch L_z ausdrücken, sodass

$$C_2 = -\frac{L_z}{\mu m \rho_0^2} (m^2 - \alpha^2 \rho_0^2). \quad (3.70)$$

Damit können die zu lösenden Bewegungsgleichungen folgendermaßen formuliert werden

$$-\frac{L_z^2}{\rho_0^3 \mu^2} = -\left[\frac{\alpha e}{k \mu c} \Phi_0 \right]^2 \frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha \rho_0)] J_m(\alpha \rho) \cos^2(\xi_0) + \frac{C}{k \mu c} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha \rho_0)] \cos(\xi_0) \quad (3.71)$$

$$0 = \left[\frac{\alpha e}{k \mu c} \Phi_0 \right]^2 m J_m^2(\alpha \rho_0) \sin(\xi_0) \cos(\xi_0) - \frac{C}{k \mu c} \frac{e}{\mu c} \Phi_0 m J_m(\alpha \rho_0) \sin(\xi_0) \quad (3.72)$$

$$\dot{v} = -\frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \cos(\xi_0) J_m(\alpha \rho_0) + C, \quad (3.73)$$

wobei wir die Voraussetzung $\dot{u} + m\dot{\phi} = 0$ durch die Ersetzung $\xi \rightarrow \xi_0$ kenntlich gemacht haben. Die Bewegungsgleichungen sind nun bis auf (3.73) von Differential- zu algebraischen Gleichungen übergegangen. Wir wollen nun sehen, ob eine Lösung dieser Gleichungen existiert, die zusätzlich unsere Nebenbedingung (3.23) erfüllt, welche nun folgende Form angenommen hat

$$\frac{L_z^2}{\mu^2 \rho_0^4} (m^2 - \alpha^2 \rho_0^2) - \dot{v}^2 = \alpha^2 c^2. \quad (3.74)$$

In die Nebenbedingung können wir nun (3.73) einsetzen und gewinnen so den Zusammenhang

$$\left(\frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \right)^2 \cos^2(\xi_0) J_m^2(\alpha \rho_0) - 2C \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k} \cos(\xi_0) J_m(\alpha \rho_0) + C^2 = \frac{L_z^2}{\mu^2 \rho_0^4} (m^2 - \alpha^2 \rho_0^2) - \alpha^2 c^2. \quad (3.75)$$

Wir haben nun also drei unabhängige algebraische Gleichungen für C und L_z zu lösen. Das ist nicht möglich. Daher wollen wir eine der Drei in eine von den anderen beiden linear abhängige Gleichung überführen. Dazu wählen wir entweder $\xi_0 = u_0 + m\phi_0$ oder ρ_0 derart, dass $\sin(\xi_0) = 0$ beziehungsweise $J_m(\alpha \rho_0) = 0$ gilt, dann wird Gleichung (3.72) trivial¹⁰. An dieser Stelle werden wir offenlassen, welchen Fall wir betrachten und wollen nur voraussetzen, dass eine der beiden Bedingungen erfüllt ist. Zu

¹⁰Es sei bemerkt, dass unsere Wahl von $u_0 + m\phi_0$ oder ρ_0 automatisch dazu führt, dass nach (2.22) die z-Komponente des Felddrehimpulses verschwindet, was zwingend erforderlich ist, wenn wir Lösungen suchen, die (3.67) genügen.

bestimmen sind nun also C und L_z aus den beiden Gleichungen

$$\lambda^2 \cos^2(\xi_0) J_m^2(\alpha\rho_0) - 2\lambda C \cos(\xi_0) J_m(\alpha\rho_0) + C^2 = \frac{L_z^2}{\mu^2 \rho_0^4} \kappa - \alpha^2 c^2 \quad (3.76)$$

$$\lambda^2 \frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)] J_m(\alpha\rho_0) \cos^2(\xi_0) - \lambda C \frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)] \cos(\xi_0) = \frac{\alpha^2 L_z^2}{\rho_0^3 \mu^2}, \quad (3.77)$$

wobei wir der Übersicht halber die zwei weitere Abkürzungen $\kappa = m^2 - \alpha^2 \rho_0^2$ und $\lambda = \frac{e}{\mu c} \Phi_0 \frac{\alpha^2}{k}$ eingeführt haben. Dies ist nun möglich. Hieraus ergeben sich, da die Gleichungen quadratisch sind, je zwei Lösungen für C und L_z . Wir werden jedoch keinen zusätzlichen Index an C und L_z anbringen, man sollte diese Tatsache allerdings im Hinterkopf behalten, da es in der weiteren Betrachtung noch von Relevanz sein wird. Die Lösungen sind gegeben durch

$$L_z = \pm \frac{\lambda \mu \rho_0 \cos(\xi_0)}{\sqrt{2} \alpha^2} \frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)] \sqrt{\kappa \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha^6 c^2 \rho_0^2}{\kappa^2 \lambda^2 \left(\frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)] \right)^2 \cos^2(\xi_0)}} \right)} \quad (3.78)$$

$$C = \frac{\lambda \kappa \cos(\xi_0)}{2\alpha^2 \rho_0} \frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)] \left(\frac{2\alpha^2 J_m(\alpha\rho_0) \rho_0}{\kappa \frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)]} - 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha^6 c^2 \rho_0^2}{\kappa^2 \lambda^2 \left(\frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)] \right)^2 \cos^2(\xi_0)}} \right). \quad (3.79)$$

Offensichtlich besitzen die Wurzeln in den Konstanten C und L_z nicht für alle ρ_0 und m eine Lösung im Reellen, woraus folgt, dass nicht alle Tupel (ρ_0, m) auf physikalisch sinnvolle Lösungen führen. Wir wollen daher nun die physikalisch sinnvollen Tupel (ρ_0, m) identifizieren. Hierzu betrachten wir die Ungleichung

$$1 \geq \frac{4\alpha^6 c^2 \rho_0^2}{\kappa^2 \lambda^2 \left(\frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)] \right)^2 \cos^2(\xi_0)}. \quad (3.80)$$

Hierbei stellen wir fest, dass (3.80) für festgehaltenes m und große ρ_0 erfüllt sein wird, insofern ρ_0 groß genug¹¹. D.h., wir können für jedes m ein $\tilde{\rho}_0$ finden, sodass (3.80) erfüllt ist für alle ρ_0 mit $\rho_0 > \tilde{\rho}_0$. Es existieren also Tupel (ρ_0, m) , für die die Ungleichung erfüllt ist. Nun ist noch eine Betrachtung der zweiten in (3.78) auftretenden Wurzel notwendig. Mit den bisherigen Ergebnissen ist es möglich in Frage kommende (ρ_0, m) über das Signum von κ zu bestimmen¹²

$$\text{sign}(\kappa) \doteq 1 \Leftrightarrow m > \alpha\rho_0. \quad (3.81)$$

Die (ρ_0, m) , für die die folgende Lösung gilt, müssen also (3.80) und (3.81) simultan erfüllen. Der Übersicht halber reskalieren wir ρ_0 nun und schreiben $\varrho_0 = \alpha\rho_0$. Dann können wir, nachdem wir λ

¹¹Es ist zu beachten, dass κ in ρ_0 quadratisch ist.

¹²In (3.81) haben wir bereits die Wurzel ausgeführt, da sowohl $m \geq 0$ als auch $\alpha\rho_0 \geq 0$ gilt

eingesetzt und vereinfacht haben, (3.80) und (3.81) schreiben als

$$\left| \frac{m^2}{\varrho_0} - \varrho_0 \right| \left| \frac{d}{d\varrho_0} [J_m(\varrho_0)] \right| \geq \left| \frac{2kc^2\mu}{\cos(\xi_0) e\Phi_0} \right| \quad (3.82)$$

$$m > \varrho_0. \quad (3.83)$$

Man stellt also fest, dass die Erfüllung beider Bedingungen gleichzeitig möglich ist. Es ist allerdings zu beachten, dass die linke Seite für gewisse ϱ_0 Nullstellen aufweist, sodass für diese ϱ_0 mit Sicherheit keine Lösung der Ungleichungen existiert. Wir werden nun, da wir gezeigt haben, dass die Existenz von Lösungen nicht ausgeschlossen ist, mit der Lösung der Bewegungsgleichungen fortfahren.¹³ Hierzu werden wir mit den bisherigen Ergebnissen ein Gleichungssystem zur Bestimmung von $t(\tau)$ und $z(\tau)$ angeben. Dieses ist

$$-\frac{L_z m}{\mu \rho_0^2} \tau + u_0 = \omega t(\tau) - kz(\tau) \quad (3.84)$$

$$(C - \lambda \cos(\xi_0) J_m(\alpha \rho_0)) \tau + v_0 = \frac{\omega}{c} z(\tau) - ckt(\tau). \quad (3.85)$$

Nachdem wir das System für $t(\tau)$ und $z(\tau)$ gelöst haben, haben wir alle Mittel an der Hand, um die Lösung der Bewegungsgleichungen anzugeben. Die Lösung, parametrisiert durch die Eigenzeit τ , lautet

$$\begin{pmatrix} ct \\ \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} \left(k(C - \lambda \cos(\xi_0) J_m(\alpha \rho_0)) - \frac{\omega}{c} \frac{L_z m}{\mu \rho_0^2} \right) \tau + ct_0 \\ \rho_0 \\ \frac{L_z}{\mu \rho_0^2} \tau + \phi_0 \\ \frac{1}{\alpha^2} \left(C - k \frac{L_z m}{\mu \rho_0^2} + \frac{\omega}{c} (-\lambda \cos(\xi_0) J_m(\alpha \rho_0)) \right) \tau + z_0 \end{pmatrix}. \quad (3.86)$$

Wir wollen nun zwecks der Anschaulichkeit umparametrisieren, sodass die Lösung von der Koordinatenzeit t abhängt. Hierfür bestimmen wir $\tau(t)$ durch Auflösen aus (3.86). Es ergibt sich für $\tau(t)$

$$\tau(t) = \frac{\alpha^2 c}{k(C - \lambda \cos(\xi_0) J_m(\alpha \rho_0)) - \frac{\omega}{c} \frac{L_z m}{\mu \rho_0^2}} t, \quad (3.87)$$

wobei wir wegen der Stationarität des Feldes o.E. $t_0 = 0$ gesetzt haben. Gehen wir mit (3.87) in (3.86) ein, so können wir die Bahnkurve des Elektrons schreiben als

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \frac{\alpha^2 c}{k \frac{(C - \lambda \cos(\xi_0) J_m(\alpha \rho_0))}{L_z} \mu \rho_0^2 - \frac{\omega}{c} m} t + \phi_0 \\ \frac{\omega \frac{(C - \lambda \cos(\xi_0) J_m(\alpha \rho_0))}{L_z} \mu \rho_0^2 - ckm}{k \frac{(C - \lambda \cos(\xi_0) J_m(\alpha \rho_0))}{L_z} \mu \rho_0^2 - \frac{\omega}{c} m} t + z_0 \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Wie wir sehen hängt die Lösung nur vom Quotienten $\frac{(C - \lambda \cos(\xi_0) J_m(\alpha \rho_0))}{L_z}$ ab. Dem wollen wir Rechnung tragen und führen folgende Bezeichnung $\chi = \frac{(C - \lambda \cos(\xi_0) J_m(\alpha \rho_0))}{L_z}$ ein. Es ist zu beachten, dass nach (3.78) und (3.79) vier verschiedene χ existieren, die bisher nicht unterschieden wurden, da dies nicht

¹³Im Folgenden werden wir wieder mit der unskalierten Größe ρ_0 rechnen.

notwendig war. Wir werden nun jedoch eine Unterscheidung vornehmen, da die χ auf verschiedene Lösungen führen. Fortan werden die χ mit χ_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) nummeriert werden. Die χ_i lauten

$$\chi_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{2\mu^2\rho_0^4} + \sqrt{\frac{\kappa^2}{4\mu^4\rho_0^8} - \frac{\alpha^6 c^2}{\lambda^2 \mu^4 \rho_0^6 \cos^2(\xi_0) \left(\frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)]\right)^2}} \quad (3.89)$$

$$\chi_2 = -\sqrt{\frac{\kappa}{2\mu^2\rho_0^4} + \sqrt{\frac{\kappa^2}{4\mu^4\rho_0^8} - \frac{\alpha^6 c^2}{\lambda^2 \mu^4 \rho_0^6 \cos^2(\xi_0) \left(\frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)]\right)^2}} \quad (3.90)$$

$$\chi_3 = \sqrt{\frac{\kappa}{2\mu^2\rho_0^4} - \sqrt{\frac{\kappa^2}{4\mu^4\rho_0^8} - \frac{\alpha^6 c^2}{\lambda^2 \mu^4 \rho_0^6 \cos^2(\xi_0) \left(\frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)]\right)^2}} \quad (3.91)$$

$$\chi_4 = -\sqrt{\frac{\kappa}{2\mu^2\rho_0^4} - \sqrt{\frac{\kappa^2}{4\mu^4\rho_0^8} - \frac{\alpha^6 c^2}{\lambda^2 \mu^4 \rho_0^6 \cos^2(\xi_0) \left(\frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)]\right)^2}}. \quad (3.92)$$

Mit dieser Abkürzung können wir unsere Lösungen, die wir entsprechend der χ_i ebenfalls mit i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) nummerieren, angeben. Vorher sei allerdings noch einmal an die notwendige Anfangsbedingung

$$\sin(\omega t_0 - kz_0 + m\phi_0) = 0 \quad \vee \quad J_m(\alpha\rho_0) = 0, \quad (3.93)$$

welche eine solche Bahnkurve voraussetzt, erinnert. Die Lösungen lauten dann¹⁴

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \frac{\alpha^2 c^2}{ck\chi_i\mu\rho_0^2 - \omega m} t + \phi_0 \\ \frac{c\omega\chi_i\mu\rho_0^2 - c^2 km}{ck\chi_i\mu\rho_0^2 - \omega m} t + z_0 \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

Man sieht also, dass sich ein Elektron in Besselwellen der Ordnung m ($m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$) auf vier bezüglich der Umlaufgeschwindigkeit und der Geschwindigkeit in Richtung der Symmetrieachse der Besselwelle verschiedenen Spiralbahnen (Helices) mit konstanter Ganghöhe bewegen kann. Eine Betrachtung des Verhaltens der Lösung für $\rho_0 \rightarrow \infty$ soll helfen ein näheres Verständnis der Gleichen zu erhalten. Hierzu ist das Verhalten des Ausdrucks $\chi_i\rho_0$ für große ρ_0 von besonderer Bedeutung. Welches der χ_i wir untersuchen, spielt aufgrund der Struktur der χ_i keine Rolle. Durch eine kurze Rechnung überzeugt man sich, dass die Grenzwerte aller χ_i übereinstimmen. Wir werden daher ohne Einschränkung die

¹⁴Im Anhang (6.2) sind die Bahnkurven (3.94) mit eingesetzten χ_i angegeben.

Betrachtungen für χ_1 durchführen und dabei wieder das reskalierte ϱ_0 verwenden. Es gilt¹⁵

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varrho_0 \rightarrow \infty} \left(\chi_1 \frac{\varrho_0}{\alpha} \right) \\
&= \lim_{\varrho_0 \rightarrow \infty} \left(\alpha \sqrt{m^2 - \varrho_0^2} \sqrt{\frac{1}{2\mu^2 \varrho_0^2} + \sqrt{\frac{1}{4\mu^4 \varrho_0^4} - \frac{\alpha^4 c^2}{(m^2 - \varrho_0^2)^2 \lambda^2 \mu^4 \varrho_0^2 \cos^2(\xi_0) \left(\frac{d}{d\rho_0} [J_m(\alpha\rho_0)]\right)^2}}}} \right) \\
&= \lim_{\varrho_0 \rightarrow \infty} \left(\alpha \sqrt{m^2 - \varrho_0^2} \sqrt{\frac{1}{2\mu^2 \varrho_0^2} + \frac{1}{2\mu^2 \varrho_0^2}} \right) \\
&= \lim_{\varrho_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{\mu} \sqrt{\frac{m^2}{\varrho_0^2} - 1} \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Mit diesem Grenzwert können wir die Grenzggeschwindigkeiten für $\rho_0 \rightarrow \infty$ angeben. Der Grenzwert¹⁶ der Geschwindigkeit der transversalen Bewegung ist gegeben durch $\rho_0 \dot{\phi} \rightarrow -\frac{\alpha c^2}{\omega}$ und der der Bewegung in z-Richtung durch $v_z = \frac{c^2 k}{\omega}$.¹⁷ Betrachtet man das Verhalten für kleine ρ_0 , so ist (3.80) von besonderer Bedeutung, da nach dieser Ungleichung für fixiertes m ein kleinstes mögliches ρ_0 existiert. Dieses kleinste mögliche ρ_0 wollen wir wie oben $\tilde{\rho}_0$ nennen. Dann nähert sich $\chi_i \mu \rho_0^2$ für $\rho_0 \rightarrow \tilde{\rho}_0$ dem Wert $\pm \sqrt{\frac{\kappa}{2}}$ ¹⁸ an, sodass die Grenzggeschwindigkeiten durch Ersetzen des Ausdrucks $\chi_i \mu \rho_0^2$ in (3.94) durch $\pm \sqrt{\frac{\kappa}{2}}$ gewonnen werden können. Nach diesen Betrachtungen kann man relativ leicht auch das Verhalten der Geschwindigkeit des Elektrons für große m und ρ_0 fixiert charakterisieren. Wieder untersuchen wir den Ausdruck $\chi_i \mu \rho_0^2$, der für $m \rightarrow \infty$ sehr divergent ist, aber nach (3.80) eine obere Schranke besitzt und bemerken, dass die Grenzggeschwindigkeit gleich der im Fall $\rho_0 \rightarrow \tilde{\rho}_0$ und m fixiert ist.

In den nachfolgenden Abbildungen (Abbildung 1) sind beispielhaft die vier Bahnkurven für zwei Fälle, die sich bezüglich des radialen Abstands vom Zentrum der Besselwelle um drei Größenordnungen unterscheiden, dargestellt. Entsprechend unserer Diskussion ist klar, dass der große Unterschied des Durchmessers der Helices die Anwesenheit von Besselwellen erfordert, deren Ordnung ebenfalls um mehrere Größenordnungen differiert. Man erkennt in den Abbildungen deutlich, dass die durch i nummerierten Lösungen tatsächlich verschieden sind. Lediglich in der rechten Darstellung sind sich die Bahnkurven 3 und 4 aufgrund der Parameterwahl relativ ähnlich.

¹⁵Bei nachfolgender Rechnung haben wir (3.83) verwendet.

¹⁶Es ist darauf zu achten, dass $\rho_0 \rightarrow \infty$ nach (3.83) zwangsläufig auch $m \rightarrow \infty$ zur Folge hat

¹⁷Es gilt für die Gesamtgeschwindigkeit für $\rho_0 \rightarrow \infty$: $v_{gesamt} \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha^2 c^4}{\omega^2} + \frac{c^4 k^2}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega} \sqrt{c^4 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 + k^2 \right)} = c$

¹⁸Das Vorzeichen hängt vom Index i ab und ist definit.

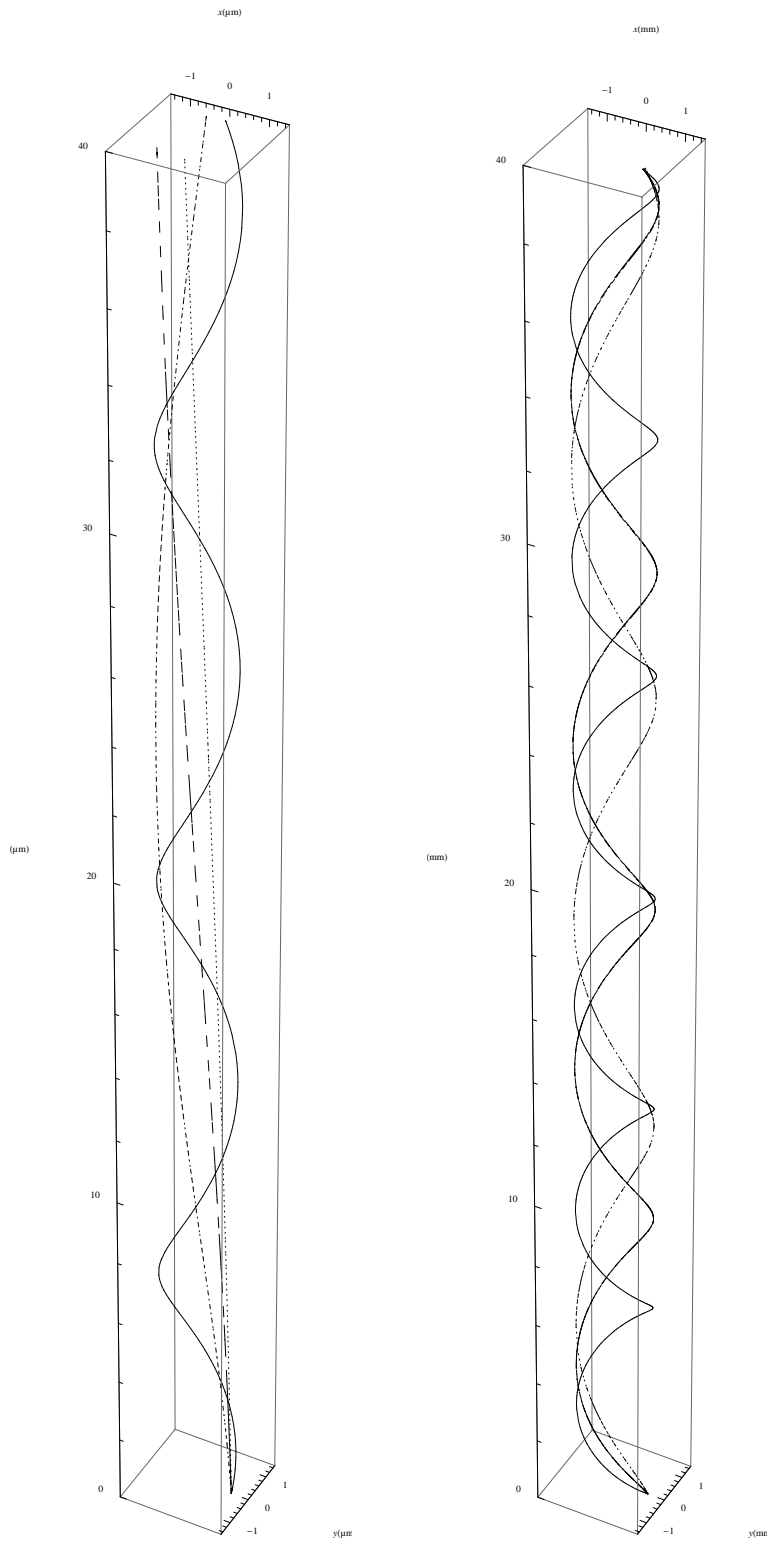


Abbildung 1: Dargestellung der Bahnkurven (3.94) eines Elektrons in einer Besselwelle. Links bewegt sich ein Elektron auf einer Spiralbahn mit Radius $1\mu\text{m}$ in einer Besselwelle der Ordnung $m = 10$. Rechts beträgt der Radius 1mm und die Ordnung der Besselwelle ist $m = 1150$. Die verschiedenen Darstellungen der Bahnen entsprechen dem Index i , wobei $i = 1 \leftrightarrow$ durchgezogen, $i = 2 \leftrightarrow$ gepunktet, $i = 3 \leftrightarrow$ gestrichpunktet und $i = 4 \leftrightarrow$ gestrichelt. Die zur Berechnung verwendeten Parameter sind: $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $k = \frac{5}{3} \cdot 10^9 \frac{1}{\text{m}}$, $\omega = 6 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{s}}$, $\mu = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ und $\lambda = 2.15 \cdot 10^{21} \frac{1}{\text{s}}$. Als Anfangsbedingung wurde $\omega t_0 - kz_0 + m\phi_0 = l\pi$ mit $l \in \mathbb{Z}$ gewählt.

Kreisbahnen Es stellt sich nun die Frage, ob auch Bewegungen mit der Ganghöhe Null, sprich Kreisbahnen, möglich sind. Hierzu untersuchen wir für welche Parameter die Ableitung der z-Komponente der Bahnen (3.94) verschwindet, d.h., $z(\tau) = z_0 = konst$ gilt. Um eine Antwort zu finden, betrachten wir die Gleichung

$$c\omega\chi_i\mu\rho_0^2 - c^2km = 0. \quad (3.96)$$

und stellen fest, dass diese für folgende Wahl der Anfangswerte, die auch vom Feld abhängt, eine Nullstelle aufweist

$$\cos(\xi_0) = \frac{\rho_0\omega^2\mu}{me\Phi_0\frac{d}{d\rho_0}[J_m(\alpha\rho_0)]\sqrt{m^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\rho_0^2}}. \quad (3.97)$$

Wir hatten oben gefunden, dass $m > \alpha\rho_0$ gelten muss, damit eine Lösung existiert. Betrachten wir nun die Wurzel in (3.97), so erhalten wir für den Fall von Kreisbahnen eine strengere Bedingung¹⁹ an m

$$m > \frac{\omega}{c}\rho_0. \quad (3.98)$$

Damit können wir die Lösung (3.86) für den Fall, dass die Anfangsbedingung (3.97) gewählt ist, schreiben als

$$\begin{pmatrix} ct \\ \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} \left(k(C - \lambda \cos(\xi_0) J_m(\alpha\rho_0)) - \frac{\omega}{c} \frac{L_z m}{\mu\rho_0^2} \right) \tau + ct_0 \\ \rho_0 \\ \frac{L_z}{\mu\rho_0^2} \tau + \phi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

womit wie oben mittels (3.87) folgende Darstellung, der durch die Koordiantenzeit parametrisierten Bahnkrurve des Elektrons, notiert werden kann

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \frac{\alpha^2 c^2}{ck\chi_i\mu\rho_0^2 - \omega m} t + \phi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Hierbei haben wir wieder den Index i an die Lösungen angebracht, womit der Tatsache, dass die χ_i auch hier verschieden sind Rechnung getragen wird. Wieder wollen wir die einzelnen χ_i angeben

$$\chi_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu^2\rho_0^4} - \frac{c^2k^2m^2}{\mu^2\rho_0^4\omega^2}} \quad (3.101)$$

$$\chi_2 = -\sqrt{\frac{\kappa}{\mu^2\rho_0^4} - \frac{c^2k^2m^2}{\mu^2\rho_0^4\omega^2}} \quad (3.102)$$

$$\chi_3 = \frac{ckm}{\mu\rho_0^2\omega} \quad (3.103)$$

$$\chi_4 = -\frac{ckm}{\mu\rho_0^2\omega}. \quad (3.104)$$

Mit den χ_i sind wir nun in der Lage die Bahnkrurve eines Elektrons, welches unter den Anfangsbe-

¹⁹Strengere Bedingung meint hier: $\frac{\omega}{c}\rho_0 > \alpha\rho_0$

dingungen (3.97) und (3.93) in das Feld eingebracht wird und somit Kreisbahnen durchläuft, explizit angeben. Hierzu setzen wir die χ_i in (3.100) ein und können schreiben

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix}_1 &= \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \frac{\alpha^2 c^2}{\alpha \frac{c^2 k}{\omega} \sqrt{m^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \rho_0^2 - \omega m}} t + \phi_0 \\ z_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix}_3 &= \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -\frac{\omega}{m} t + \phi_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix}_2 &= \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -\frac{\alpha^2 c^2}{\alpha \frac{c^2 k}{\omega} \sqrt{m^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \rho_0^2 + \omega m}} t + \phi_0 \\ z_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix}_4 &= \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -\frac{\alpha^2 c^2}{\frac{c^2 k^2}{\omega} + \omega m} t + \phi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Wir sehen also, dass vier bezüglich des Drehimpulses verschiedene Kreisbahnen existieren, auf denen sich das Elektron in einer Besselwelle höherer Ordnung bewegen kann. Betrachten wir wieder die Beträge der Grenzggeschwindigkeiten²⁰ $v_i^{\rho_0}$ für große ρ_0 , so errechnen sich diese zu $v_1^{\rho_0} = c \left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}\right) < c$, $v_2^{\rho_0} = c \left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}\right) < c$, $v_3^{\rho_0} = c$ und $v_4^{\rho_0} = c \left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}\right) < c$. Es gibt also eine Bahn, deren Grenzggeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, während die anderen Drei Grenzggeschwindigkeiten aufweisen, die kleiner der Lichtgeschwindigkeit sind. Hält man den Radius ρ_0 konstant und variiert die Ordnung m der Besselwelle, so nimmt die Umlaufgeschwindigkeit des Elektrons mit steigender Ordnung ab. Für $m \rightarrow \infty$ streben die Umlaufgeschwindigkeiten aller vier Bahnen gegen Null. In den Abbildungen 2 und 3 ist die eben erläuterte Abhängigkeit der Umlaufgeschwindigkeit von den Parametern ρ_0 und m dargestellt. Des Weiteren fällt auf, dass die Umlauffrequenzen $\dot{\phi}_3$ und $\dot{\phi}_4$ im Gegensatz zu $\dot{\phi}_1$ und $\dot{\phi}_2$ nicht vom radialen Abstand vom Zentrum der Besselwelle abhängen, sondern nur von der Ordnung m der Besselwelle, was zunächst merkwürdig erscheint, da man erwarten könnte, dass dies zur Folge hat, dass für große ρ_0 die Umlaufgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit überschreiten könnte. Dies ist allerdings nach (3.98) ausgeschlossen, da mit größer werdendem ρ_0 zwangsläufig auch m anwächst beziehungsweise für ρ_0 , die größer einem gewissen ‘‘Grenz- ρ_0 ’’ sind, keine Bahnen existieren, wenn man m als fixiert annimmt.

²⁰Es ist darauf zu achten, dass $\rho_0 \rightarrow \infty$ nach (3.98) zwangsläufig auch $m \rightarrow \infty$ zur Folge hat

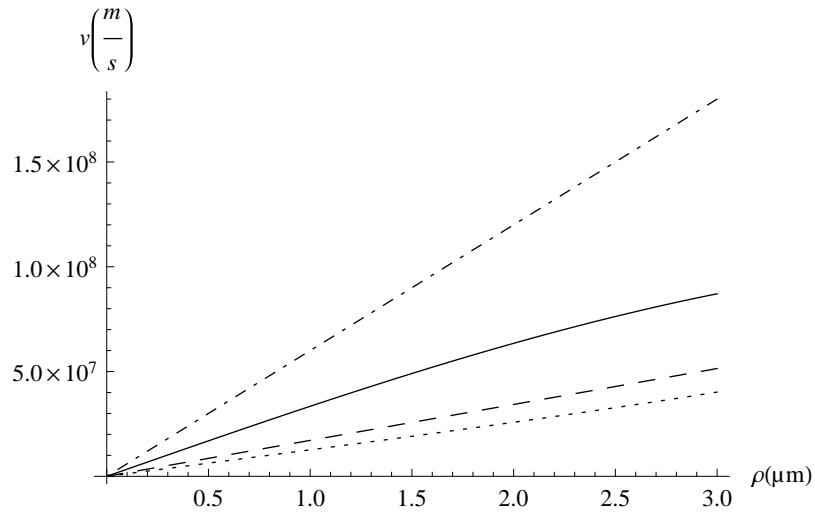


Abbildung 2: Darstellung der Abhängigkeit der Bahngeschwindigkeit eines Elektrons, das sich auf einer Kreisbahn um das Zentrum einer Besselwelle bewegt, vom radialen Abstand ρ_0 vom Zentrum einer Besselwelle. Es wurden folgende Parameter für die Berechnung verwendet: $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$, $k = \frac{5}{3} \cdot 10^9 \frac{1}{m}$, $\omega = 6 \cdot 10^{14} \frac{1}{s}$ und $m = 10$. Die verschiedenen Darstellungen der Bahnen entsprechen dem Index i , wobei $i = 1 \longleftrightarrow$ durchgezogene Linie, $i = 2 \longleftrightarrow$ gepunktet, $i = 3 \longleftrightarrow$ gestrichpunktet und $i = 4 \longleftrightarrow$ gestrichelt.

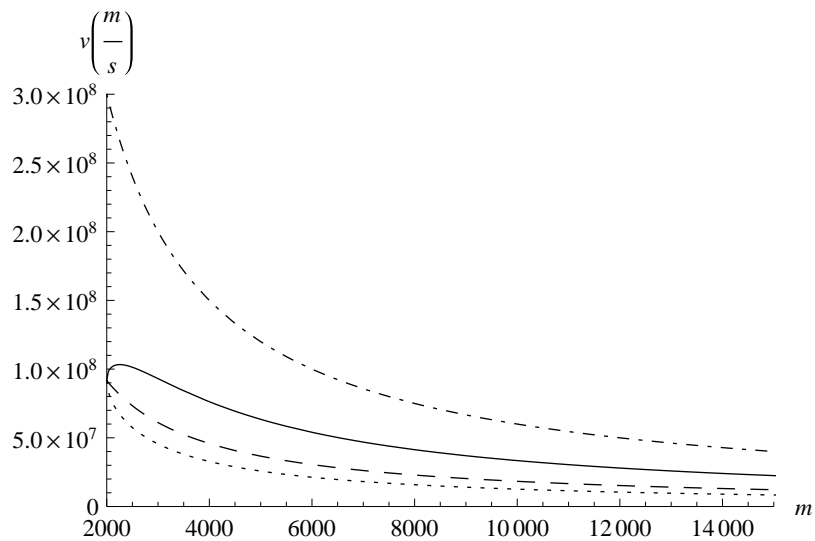


Abbildung 3: Darstellung der Abhängigkeit der Bahngeschwindigkeit eines Elektrons, das sich auf einer Kreisbahn um das Zentrum einer Besselwelle bewegt, von der Ordnung m der Besselwelle. Zur Berechnung wurden die Parameter $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$, $k = \frac{5}{3} \cdot 10^9 \frac{1}{m}$, $\omega = 6 \cdot 10^{14} \frac{1}{s}$ und $\rho_0 = 10^{-3} m$ verwendet. Die verschiedenen Darstellungen der Bahnen entsprechen dem Index i , wobei $i = 1 \longleftrightarrow$ durchgezogene Linie, $i = 2 \longleftrightarrow$ gepunktet, $i = 3 \longleftrightarrow$ gestrichpunktet und $i = 4 \longleftrightarrow$ gestrichelt.

4 Dirac-Gleichung

Wir wollen nun zur quantenmechanischen Behandlung des Problems kommen. Dazu suchen wir Lösungen der durch die Dirac-Gleichung gegebenen Bewegungsgleichung eines Elektrons in einer Besselwelle. Im Folgenden werden wir natürliche Einheiten verwenden. Das bedeutet, wir setzen $c = \hbar = 1$. Wie in (2.3.2) dargestellt kann die Dirac-Gleichung dann in Anwesenheit eines äußeren elektromagnetischen Feldes geschrieben werden als

$$[i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - \mu] \psi(x) = 0. \quad (4.1)$$

Analog zur Untersuchung der Lorentz-Gleichung wählen wir auch hier dem Problem angepasste Koordinaten. Für die transversale Komponente der Bewegung wollen wir Zylinderkoordinaten verwenden und, da die t - und z -Abhängigkeit des Potentials lediglich als $\omega t - kz$ auftritt, führen wir weiterhin die Koordinaten $u = \omega t - kz$ und $v = \omega z - kt$ ein, wie wir das auch bei der klassischen Behandlung getan haben. Die Dirac-Gleichung transformiert auf die folgende Weise in krummlinige Koordinaten [6]

$$\left[i \left(\tilde{\partial}_\mu + ie\tilde{A}_\mu \right) \tilde{\gamma}^\mu - \mu \right] \psi(y) = 0 \quad (4.2)$$

mit den Gamma-Matrizen in krummlinigen Koordinaten $\tilde{\gamma}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ und dem transformierten Potential $\tilde{A}_\mu = g_{\mu\beta} \Lambda^\beta{}_\nu A^\nu$. Dies ist äquivalent zu der "üblichen" Form der Dirac-Gleichung in krummlinigen Koordinaten²¹

$$\left[i\tilde{\gamma}^\mu \left(\tilde{\partial}_\mu + \Gamma_\mu + ie\tilde{A}_\mu \right) - \mu \right] \psi(y) = 0, \quad (4.3)$$

wobei $\Gamma_\mu = g_{\mu\nu} \Gamma^\nu$ die Spin-Konnexion darstellt. Diese berechnet sich in einer 4-dimensionalen Raumzeit nach [7]

$$\Gamma^\mu = \frac{1}{4} \text{tr} \left[\tilde{\gamma}^\mu \tilde{\partial}_\nu \tilde{\gamma}^\nu \right]. \quad (4.4)$$

Da wir den metrischen Tensor ($g_{\mu\nu}$) zur weiteren Rechnung benötigen, wollen wir ihn für die gewählten Koordinaten y^μ angeben. Die zur Rechnung gewählten Koordinaten lauten

$$y^0 = u = \omega t - kz \quad (4.5)$$

$$y^1 = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.6)$$

$$y^2 = \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4.7)$$

$$y^3 = v = \omega z - kt. \quad (4.8)$$

Durch eine kurze Rechnung zeigt man, dass die Metrik bei Verwendung der Koordinaten (4.5) - (4.8) folgende Gestalt annimmt

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

²¹Dies werden wir hier nicht beweisen. Es wurde allerdings für den Spezialfall der hier verwendeten Koordinaten verifiziert (siehe (6.4)).

Die Transformationsmatrix $(\Lambda^\mu{}_\nu)$ berechnet sich, wie bei der Transformation der Lorentzgleichung in (3) beschrieben. Es ergibt sich

$$\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\right) = (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & -k \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & -\frac{\sin(\phi)}{\rho} & \frac{\cos(\phi)}{\rho} & 0 \\ -k & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Als Nächstes wollen wir das Viererpotential in den neuen Koordianten (\tilde{A}_μ) notieren. Das transformierte Potential hat die Form²²

$$(\tilde{A}_\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{k} \end{pmatrix} A^0. \quad (4.11)$$

Mit diesen Ergebnissen sind wir nun in der Lage die Dirac-Gleichung in den neuen Koordinaten y^μ anzugeben²³. Für den allgemeinen Fall, dass $m \in \mathbb{Z}$ beliebig ist, schreiben wir die transformierte Dirac-Gleichung als

$$(i\omega\partial_u + ik\partial_v - eA^0(u, \rho, \phi) - \mu) \Psi_+ + \begin{pmatrix} -ik\partial_u - i\omega\partial_v + e\frac{\omega}{k}A^0(u, \rho, \phi) & -ie^{-i\phi} \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}i\partial_\phi\right) \\ -ie^{i\phi} \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}i\partial_\phi\right) & ik\partial_u + i\omega\partial_v - e\frac{\omega}{k}A^0(u, \rho, \phi) \end{pmatrix} \Psi_- = 0 \quad (4.12)$$

$$(i\omega\partial_u + ik\partial_v - eA^0(u, \rho, \phi) + \mu) \Psi_- + \begin{pmatrix} -ik\partial_u - i\omega\partial_v + e\frac{\omega}{k}A^0(u, \rho, \phi) & -ie^{-i\phi} \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}i\partial_\phi\right) \\ -ie^{i\phi} \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}i\partial_\phi\right) & ik\partial_u + i\omega\partial_v - e\frac{\omega}{k}A^0(u, \rho, \phi) \end{pmatrix} \Psi_+ = 0. \quad (4.13)$$

Hierbei haben wir den Viererspinor, den wir durch Ψ abkürzen, derart in zwei Zweierspinoren Ψ_+ und Ψ_- verlegt, dass $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$ und $\Psi_+ = \begin{pmatrix} \Psi_+^1 \\ \Psi_+^2 \end{pmatrix}$, $\Psi_- = \begin{pmatrix} \Psi_-^1 \\ \Psi_-^2 \end{pmatrix}$ gilt²⁴. Des Weiteren haben wir in (4.12) und (4.13) die z-Komponente des Potentials durch die 0-Komponente ausgedrückt. Es gilt $A^3(u, \rho, \phi) = \frac{\omega}{k}A^0(u, \rho, \phi)$. Zur Erinnerung sei an dieser Stelle die 0-Komponente des Potentials noch einmal angeben

$$A^0 = \Phi_0 J_m(\alpha\rho) e^{i(u+m\phi)}. \quad (4.14)$$

4.1 Betrachtungen für die fundamentale Besselwelle ($m = 0$)

Beim Studium der Dirac-Gleichung für ein Elektron in einer Besselwelle werden wir uns anders als bei der klassischen Bewegung auf den Fall der fundamentalen Besselwelle beschränken. Die Bewegungsgleichungen sind durch (4.12) und (4.13) gegeben. Wir müssen lediglich im Potential $m = 0$ setzen. Das Potential \tilde{A}_μ hängt dann nur noch von den Koordinaten u und ρ ab. In diesem Fall kommutiert der

²²Die Berechnungsvorschrift ist im Anhang angegeben. Zu finden ist sie als Formel (6.31)

²³Eine genauere Rechnung findet sich im Anhang unter (6.3). Dort ist die Ableitung auch für etwas allgemeinere Koordinaten angegeben

²⁴Wir werden Spinoren auch im Folgenden auf diese Art und Weise schreiben.

Dirac-Operator also mit $i\partial_v$, sodass wir die Abhängigkeit des Spinors von der Koordinate v auf folgende Weise abspalten können

$$\Psi(u, \rho, \phi, v) = e^{inv} \tilde{\Psi}(u, \rho, \phi), \quad (4.15)$$

wobei $n \in \mathbb{R}$.

Als nächstes wollen wir überlegen, was wir für die ϕ -Abhängigkeit von $\tilde{\Psi}(u, \rho, \phi)$ erwarten. Wenn wir uns die Rotationssymmetrie der fundamentalen Besselwelle in den Kopf zurückrufen und uns an den in (3.1) gefundenen Erhaltungssatz (3.29) erinnern, so liegt es nahe, dass die ϕ -Abhängigkeit des Spinors $\tilde{\Psi}(u, \rho, \phi)$ gleich der eines Spinors ist, der die freie Dirac-Gleichung in Zylinderkoordinaten löst. Sieht man (4.12) und (4.13) nun scharf an, so erkennt man, dass die ϕ -Abhängigkeit durch folgenden Ansatz separiert werden kann

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_+^1 \\ \tilde{\Psi}_+^2 \\ \tilde{\Psi}_-^1 \\ \tilde{\Psi}_-^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{il\phi} \Omega_+^1 \\ e^{i(l+1)\phi} \Omega_+^2 \\ e^{il\phi} \Omega_-^1 \\ e^{i(l+1)\phi} \Omega_-^2 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Hierbei ist $l \in \mathbb{R}$ und $\Omega_{+/-}^{1/2} = \Omega_{+/-}^{1/2}(u, \rho)$. Dies entspricht, wie wir erwartet hatten, der ϕ -Abhängigkeit der Lösung der freien Dirac-Gleichung in Zylinderkoordinaten. Wir gehen also mit dem Ansatz

$$\Psi_{+/-}(u, \rho, \phi, v) = \begin{pmatrix} e^{il\phi} e^{inv} \Omega_{+/-}^1(u, \rho) \\ e^{i(l+1)\phi} e^{inv} \Omega_{+/-}^2(u, \rho) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

in die Dirac-Gleichung (4.12) und (4.13) (mit $m = 0$) ein und erhalten als Resultat, das nur noch von u und ρ abhängt, die folgenden Gleichungen

$$(i\omega\partial_u - eA^0(u, \rho) - \mu - nk) \Omega_+(u, \rho) + \begin{pmatrix} -ik\partial_u + e\frac{\omega}{k}A^0(u, \rho) + n\omega & -i\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(l+1)\right) \\ -i\left(\partial_\rho - \frac{1}{\rho}l\right) & ik\partial_u - e\frac{\omega}{k}A^0(u, \rho) - n\omega \end{pmatrix} \Omega_-(u, \rho) = 0 \quad (4.18)$$

$$(i\omega\partial_u - eA^0(u, \rho) + \mu - nk) \Omega_-(u, \rho) + \begin{pmatrix} -ik\partial_u + e\frac{\omega}{k}A^0(u, \rho) + n\omega & -i\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(l+1)\right) \\ -i\left(\partial_\rho - \frac{1}{\rho}l\right) & ik\partial_u - e\frac{\omega}{k}A^0(u, \rho) - n\omega \end{pmatrix} \Omega_+(u, \rho) = 0, \quad (4.19)$$

wobei $\Omega_+(u, \rho)$ und $\Omega_-(u, \rho)$ wie oben die zweikomponentigen Spinoren sind, die zusammen den Viererspinor $\Omega(u, \rho)$ bilden. Das Potential schreiben wir als

$$A^0(\rho, u) = \Phi_0 J_0(\alpha\rho) e^{iu}. \quad (4.20)$$

Für die vier gekoppelten, partiellen Differentialgleichungen (4.18) und (4.19) konnte keine Lösung gefunden werden. Daher werden wir uns hier darauf beschränken einen der Ansätze, welche versucht wurden, darzustellen und zu erörtern, wo Probleme auftreten. Der nachfolgende Ansatz ist gut geeignet einige prinzipielle Strukturen und Eigenschaften der zu lösenden Differentialgleichungen zu erkennen.

Der Ansatz $\Omega_+(u, \rho) = e^{iu}\Gamma_+(\rho)$

Wir wollen den Ansatz machen, dass wir einen der beiden zweikomponentigen Spinoren als Produkt aus e^{iu} und einer Funktion $\Gamma(\rho)$ schreiben können. Hierzu setzen wir ohne Einschränkung

$$\Omega_+(u, \rho) = e^{iu}\Gamma_+(\rho). \quad (4.21)$$

Mit diesem Ansatz gehen wir in (4.18) und (4.19) ein, multiplizieren anschließend von links mit e^{-iu} und erhalten dann

$$\begin{aligned} 0 &= (-\omega - eJ_0e^{iu} - \mu - nk)\Gamma_+(\rho) + \begin{pmatrix} e^{-iu}(-ik\partial_u + n\omega) + e\frac{\omega}{k}J_0 & -ie^{-iu}\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(l+1)\right) \\ -ie^{-iu}\left(\partial_\rho - \frac{1}{\rho}l\right) & e^{-iu}(ik\partial_u - n\omega) - e\frac{\omega}{k}J_0 \end{pmatrix} \Omega_-(u, \rho) \\ 0 &= (e^{-iu}(i\omega\partial_u + \mu - nk) - eJ_0)\Omega_-(u, \rho) + \begin{pmatrix} k + e\frac{\omega}{k}J_0e^{iu} + n\omega & -i\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(l+1)\right) \\ -i\left(\partial_\rho - \frac{1}{\rho}l\right) & -k - e\frac{\omega}{k}J_0e^{iu} - n\omega \end{pmatrix} \Gamma_+(\rho), \end{aligned} \quad (4.22)$$

wobei wir der Kürze halber $e\Phi_0$ als e geschrieben und das Argument der Besselfunktion $J_0(\alpha\rho)$ weglassen haben. Damit haben wir vier gekoppelte Differentialgleichungen für die Funktionen $\Gamma_+(\rho)$, $\Gamma_+^2(\rho)$, $\Omega_-^1(u, \rho)$ und $\Omega_-^2(u, \rho)$, welche wir auf naheliegende Weise durch (i) nummerieren, d.h., wir zählen von oben mit (i) ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) ab. Dann können wir die Gleichungen derart umschreiben, dass wir folgende Operationen ausführen $(1) + \frac{\omega}{k}(3)$, $\frac{\omega}{k}(1) + (3)$, $(2) - \frac{\omega}{k}(4)$ und $-\frac{\omega}{k}(2) + (4)$. Damit erhalten wir folgendes System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\alpha^2}{k} + \frac{\omega}{k}\mu\right)\Gamma_+^2(\rho) - i\left(\partial_\rho - \frac{1}{\rho}l\right)\Gamma_+^1(\rho) + i\frac{\omega}{k}e^{-iu}\left(\partial_\rho - \frac{1}{\rho}l\right)\Omega_-^1(u, \rho) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha^2}{k^2}eJ_0 + e^{-iu}\left(\mu + \frac{\alpha^2}{k}n\right)\right)\Omega_-^2(u, \rho) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\alpha^2}{k} + \frac{\omega}{k}\mu\right)\Gamma_+^1(\rho) + i\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(l+1)\right)\Gamma_+^2(\rho) + i\frac{\omega}{k}e^{-iu}\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(l+1)\right)\Omega_-^2(u, \rho) \\ &\quad - \left(\frac{\alpha^2}{k^2}eJ_0 + e^{-iu}\left(\mu + \frac{\alpha^2}{k}n\right)\right)\Omega_-^1(u, \rho) \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} 0 &= i\frac{\omega}{k}\left(\partial_\rho - \frac{1}{\rho}l\right)\Gamma_+^1(\rho) - ie^{-iu}\left(\partial_\rho - \frac{1}{\rho}l\right)\Omega_-^1(u, \rho) - e^{-iu}\left(i\frac{\alpha^2}{k}\partial_u + \frac{\omega}{k}\mu\right)\Omega_-^2(u, \rho) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha^2}{k^2}eJ_0e^{iu} - \mu + \frac{\alpha^2}{k}n\right)\Gamma_+^2(\rho) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -i\frac{\omega}{k}\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(l+1)\right)\Gamma_+^2(\rho) - ie^{-iu}\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}(l+1)\right)\Omega_-^2(u, \rho) + e^{-iu}\left(i\frac{\alpha^2}{k}\partial_u + \frac{\omega}{k}\mu\right)\Omega_-^1(u, \rho) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha^2}{k^2}eJ_0e^{iu} - \mu + \frac{\alpha^2}{k}n\right)\Gamma_+^1(\rho). \end{aligned} \quad (4.26)$$

(4.23) kann dann nach $\Gamma_+^2(\rho)$ und (4.24) nach $\Gamma_+^1(\rho)$ aufgelöst werden. Mittels (4.25) können wir schließlich noch $\Omega_-^1(u, \rho)$ aus der Gleichung für $\Gamma_+^2(\rho)$ und unter Verwendung von (4.26) $\Omega_-^2(u, \rho)$ aus

der Gleichung für $\Gamma_+^1(\rho)$ eliminieren, sodass wir die folgenden zwei Ausdrücke erhalten

$$-(k + \omega n) \Gamma_+^1(\rho) + i \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} (l + 1) \right) \Gamma_+^2(\rho) = [-eJ_0 + e^{-iu} (i\omega \partial_u + \mu - kn)] \Omega_-^1(u, \rho) + e^{iu} \frac{\omega}{k} eJ_0 \Gamma_+^1(\rho) \quad (4.27)$$

$$(k + \omega n) \Gamma_+^2(\rho) + i \left(\partial_\rho - \frac{1}{\rho} l \right) \Gamma_+^1(\rho) = [-eJ_0 + e^{-iu} (i\omega \partial_u + \mu - kn)] \Omega_-^2(u, \rho) - e^{iu} \frac{\omega}{k} eJ_0 \Gamma_+^2(\rho). \quad (4.28)$$

Die linke Seite hängt also jeweils nicht von u ab, sodass auch die rechte Seite bezüglich u konstant sein muss. Wir leiten daher vorstehende Gleichungen nach u ab und schreiben

$$[-eJ_0 \partial_u + e^{-iu} (i\omega (\partial_u^2 - i\partial_u) + \mu (\partial_u - i) - kn (\partial_u - i))] \Omega_-^1(u, \rho) = ie^{iu} \frac{\omega}{k} eJ_0 \Gamma_+^1(\rho) \quad (4.29)$$

$$[-eJ_0 \partial_u + e^{-iu} (i\omega (\partial_u^2 - i\partial_u) + \mu (\partial_u - i) - kn (\partial_u - i))] \Omega_-^2(u, \rho) = -ie^{iu} \frac{\omega}{k} eJ_0 \Gamma_+^2(\rho) \quad (4.30)$$

Diese Gleichungen können gelöst werden und es kann für $\Omega_-^1(u, \rho)$ und $\Omega_-^2(u, \rho)$ notiert werden

$$\Omega_-^{1/2}(u, \rho) = e^\delta [e^{i\beta} \omega^{-\beta} J_0^\beta C_2^{1/2}(\rho) + (-1)^\beta e^\beta e^{i\beta u} (\beta - 1) \omega^{-\beta} J_0^\beta C_1^{1/2}(\rho) (\gamma(-\beta + 1) - \gamma(-\beta + 1, -\delta)) \mp \frac{\omega}{k} e^{iu} (-\delta)^{-1+\beta} \gamma(-\beta + 2, -\delta) \Gamma_+^{1/2}(\rho)] \quad (4.31)$$

mit den zwei beliebigen Funktionen $C_1^{1/2}(\rho)$ und $C_2^{1/2}(\rho)$, sowie $\delta = \frac{e}{\omega} e^{iu} J_0$ und der Konstanten $\beta = \frac{\mu - kn}{\omega}$. Des Weiteren stellen $\gamma(x)$ die Gamma- und $\gamma(x, a)$ die unvollständige Gamma-Funktion dar. Wir haben also bis zu dieser Stelle das Problem vollständig auf die Bestimmung der ρ -Abhängigkeit des Spinors $\Omega(u, \rho)$ zurückgeführt. Es sind noch die Funktionen $\Gamma_+^1(\rho)$, $\Gamma_+^2(\rho)$, $C_1^{1/2}(\rho)$ und $C_2^{1/2}(\rho)$ zu bestimmen. Dies ist allerdings nicht gelungen. Es ist an dieser Stelle auch nicht klar, ob der Ansatz, von dem wir ausgegangen sind, zielführend ist, beziehungsweise eine streng analytische Lösung erlaubt.

5 Zusammenfassung

Es war das Ziel vorstehender Arbeit die Bewegung eines relativistischen Elektrons in Besselwellen beliebiger Ordnung zu charakterisieren. Der direkte Weg die Lorentz- und die Dirac-Gleichung für das vorliegende Potential allgemein exakt zu lösen konnte hierbei nicht gegangen werden. Vielmehr wurden Eigenschaften der Lösungen bestimmt, verschiedene Lösungstypen ausgeschlossen und Spezialfälle untersucht.

Hierbei konnten Lösungen für die Lorentz-Gleichung im Fall der fundamentalen Besselwelle, sowie im Fall von Besselwellen höherer Ordnung gefunden und diskutiert werden. Insbesondere im Fall der Bewegung eines Elektrons in Besselwellen höherer Ordnung wurden interessante Bahnkurven, die einer geführten Bewegung des Elektrons entlang der z-Achse entsprechen, sowie Kreisbahnen als Spezialfall dieser Lösungen ausgemacht.

Eine Lösung der Dirac-Gleichung gelang nicht. Selbige konnte allerdings für den Fall der Bewegung in einer fundamentalen Besselwelle auf eine Form gebracht werden, in der sie nur noch von zwei Koordinaten abhängt. Des Weiteren wurde einer der versuchten Lösungsansätze vorgestellt.

6 Anhang

6.1 Transformation des Feldstärketensors

Da wir die Lorentz-Gleichung in Zylinderkoordinaten y^μ gelöst haben, war eine Transformation des elektromagnetischen Feldstärketensors (F^μ_ν) in eben diese Koordinaten y^μ notwendig. Wir wollen hier näher auf die explizite Rechnung eingehen. (F^μ_ν) transformiert als Tensor zweiter Stufe gemäß

$$\tilde{F}^\alpha_\beta = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} F^\mu_\nu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}. \quad (6.1)$$

In Kapitel 3 haben wir $\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} =: (\Lambda^{-1})^\nu_\beta$ und $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} =: \Lambda^\alpha_\mu$ eingeführt. Diese wollen wir nun explizit angeben

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} =: \Lambda^\alpha_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & -\frac{\sin(\phi)}{\rho} & \frac{\cos(\phi)}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} =: (\Lambda^{-1})^\nu_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & -\rho \sin(\phi) & \rho \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

(F^μ_ν) bezeichnet den Feldstärketensor in kartesischen Koordinaten und hat folgende Darstellung

$$(F^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Es folgt nun die Berechnung der einzelnen Elemente von (\tilde{F}^α_β) . Hierbei sind die Elemente des Feldstärketensors in kartesischen Koordinaten wie oben ohne Schlangel kenntlich gemacht.

$$\tilde{F}^\alpha_\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (6.5)$$

$$\tilde{F}^1_0 = \cos(\phi) F^1_0 + \sin(\phi) F^2_0 \quad (6.6)$$

$$\tilde{F}^2_0 = -\frac{\sin(\phi)}{\rho} F^1_0 + \frac{\cos(\phi)}{\rho} F^2_0 \quad (6.7)$$

$$\tilde{F}^3_0 = F^3_0 \quad (6.8)$$

$$\tilde{F}^0_3 = F^0_3 \quad (6.9)$$

$$\tilde{F}^0_1 = \cos(\phi) F^0_1 + \sin(\phi) F^0_2 \quad (6.10)$$

$$\tilde{F}^0_2 = -\rho \sin(\phi) F^0_1 + \rho \cos(\phi) F^0_2 \quad (6.11)$$

$$\tilde{F}^1_2 = (\rho \cos^2(\phi)) F^1_2 - (\rho \sin^2(\phi)) F^2_1 \quad (6.12)$$

$$\tilde{F}_1^2 = (\rho \cos^2(\phi)) F_2^1 - (\rho \sin^2(\phi)) F_1^2 \quad (6.13)$$

$$\tilde{F}_3^1 = \cos(\phi) F_3^1 + \sin(\phi) F_3^2 \quad (6.14)$$

$$\tilde{F}_1^3 = \cos(\phi) F_1^3 + \sin(\phi) F_2^3 \quad (6.15)$$

$$\tilde{F}_3^2 = -\frac{\sin(\phi)}{\rho} F_3^1 + \frac{\cos(\phi)}{\rho} F_3^2 \quad (6.16)$$

$$\tilde{F}_2^3 = -\rho \sin(\phi) F_1^3 + \rho \cos(\phi) F_2^3 \quad (6.17)$$

Hiermit ergibt sich der Feldstärketensor in Zylinderkoordinaten, wobei wir im Folgenden wieder aus Platzgründen die Abkürzung $\xi = \omega t - kz + m\phi$ eingeführt haben, zu

$$\left(\tilde{F}^\mu_\nu \right) = \Phi_0 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] \cos(\xi) & m J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) & \frac{\alpha^2}{k} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) \\ -\frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] \cos(\xi) & 0 & 0 & \frac{\omega}{kc} \frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] \cos(\xi) \\ \frac{m}{\rho^2} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) & 0 & 0 & -\frac{m}{\rho^2} \frac{\omega}{kc} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) \\ \frac{\alpha^2}{k} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) & -\frac{\omega}{kc} \frac{d}{d\rho} [J_m(\alpha\rho)] \cos(\xi) & m \frac{\omega}{kc} J_m(\alpha\rho) \sin(\xi) & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

6.2 Bahnkurven mit $m \neq 0$ und $u + m\phi = \text{konst}$

Wir wollen die durch die Koordiantenzeit t parametrisierten Bahnkurven explizit angeben. i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) nummeriert diese entsprechend dem jeweils verwendeten χ_i . Wir setzen in (3.94) ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0}{\alpha^2 c^2} t + \phi_0 \\ ck \sqrt{\frac{m^2 - \alpha^2 \rho_0^2}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{c^4 \rho_0^2 k^2 \mu}{(m^2 - \alpha^2 \rho_0^2)^2 e^2 \Phi_0^2 \cos^2(\omega t_0 - k z_0 + m \phi_0) (J_{m-1}(\alpha \rho_0) - J_{m+1}(\alpha \rho_0))^2}\right) - \omega m}} \\ c\omega \sqrt{\frac{m^2 - \alpha^2 \rho_0^2}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{c^4 \rho_0^2 k^2 \mu}{(m^2 - \alpha^2 \rho_0^2)^2 e^2 \Phi_0^2 \cos^2(\omega t_0 - k z_0 + m \phi_0) (J_{m-1}(\alpha \rho_0) - J_{m+1}(\alpha \rho_0))^2}\right) - c^2 k m}} \\ ck \sqrt{\frac{m^2 - \alpha^2 \rho_0^2}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{c^4 \rho_0^2 k^2 \mu}{(m^2 - \alpha^2 \rho_0^2)^2 e^2 \Phi_0^2 \cos^2(\omega t_0 - k z_0 + m \phi_0) (J_{m-1}(\alpha \rho_0) - J_{m+1}(\alpha \rho_0))^2}\right) - \omega m}} t + z_0 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0}{\alpha^2 c^2} t + \phi_0 \\ ck\sqrt{\frac{m^2 - \alpha^2 \rho_0^2}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{c^4 \rho_0^2 k^2 \mu}{(m^2 - \alpha^2 \rho_0^2)^2 e^2 \Phi_0^2 \cos^2(\omega t_0 - kz_0 + m\phi_0)(J_{m-1}(\alpha\rho_0) - J_{m+1}(\alpha\rho_0))^2}\right)} + \omega m} \\ c\omega\sqrt{\frac{m^2 - \alpha^2 \rho_0^2}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{c^4 \rho_0^2 k^2 \mu}{(m^2 - \alpha^2 \rho_0^2)^2 e^2 \Phi_0^2 \cos^2(\omega t_0 - kz_0 + m\phi_0)(J_{m-1}(\alpha\rho_0) - J_{m+1}(\alpha\rho_0))^2}\right)} + c^2 km} \\ \frac{\rho_0}{\alpha^2 c^2} t + z_0 \\ ck\sqrt{\frac{m^2 - \alpha^2 \rho_0^2}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{c^4 \rho_0^2 k^2 \mu}{(m^2 - \alpha^2 \rho_0^2)^2 e^2 \Phi_0^2 \cos^2(\omega t_0 - kz_0 + m\phi_0)(J_{m-1}(\alpha\rho_0) - J_{m+1}(\alpha\rho_0))^2}\right)} + \omega m} \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0}{\alpha^2 c^2} t + \phi_0 \\ ck\sqrt{\frac{m^2 - \alpha^2 \rho_0^2}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{c^4 \rho_0^2 k^2 \mu}{(m^2 - \alpha^2 \rho_0^2)^2 e^2 \Phi_0^2 \cos^2(\omega t_0 - kz_0 + m\phi_0)(J_{m-1}(\alpha\rho_0) - J_{m+1}(\alpha\rho_0))^2}\right)} - \omega m} \\ c\omega\sqrt{\frac{m^2 - \alpha^2 \rho_0^2}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{c^4 \rho_0^2 k^2 \mu}{(m^2 - \alpha^2 \rho_0^2)^2 e^2 \Phi_0^2 \cos^2(\omega t_0 - kz_0 + m\phi_0)(J_{m-1}(\alpha\rho_0) - J_{m+1}(\alpha\rho_0))^2}\right)} - c^2 km} \\ \frac{\rho_0}{\alpha^2 c^2} t + z_0 \\ ck\sqrt{\frac{m^2 - \alpha^2 \rho_0^2}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{c^4 \rho_0^2 k^2 \mu}{(m^2 - \alpha^2 \rho_0^2)^2 e^2 \Phi_0^2 \cos^2(\omega t_0 - kz_0 + m\phi_0)(J_{m-1}(\alpha\rho_0) - J_{m+1}(\alpha\rho_0))^2}\right)} - \omega m} \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix}_4 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0}{\alpha^2 c^2} t + \phi_0 \\ ck\sqrt{\frac{m^2 - \alpha^2 \rho_0^2}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{c^4 \rho_0^2 k^2 \mu}{(m^2 - \alpha^2 \rho_0^2)^2 e^2 \Phi_0^2 \cos^2(\omega t_0 - kz_0 + m\phi_0)(J_{m-1}(\alpha\rho_0) - J_{m+1}(\alpha\rho_0))^2}\right)} + \omega m} \\ c\omega\sqrt{\frac{m^2 - \alpha^2 \rho_0^2}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{c^4 \rho_0^2 k^2 \mu}{(m^2 - \alpha^2 \rho_0^2)^2 e^2 \Phi_0^2 \cos^2(\omega t_0 - kz_0 + m\phi_0)(J_{m-1}(\alpha\rho_0) - J_{m+1}(\alpha\rho_0))^2}\right)} + c^2 km} \\ \frac{\rho_0}{\alpha^2 c^2} t + z_0 \\ ck\sqrt{\frac{m^2 - \alpha^2 \rho_0^2}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{c^4 \rho_0^2 k^2 \mu}{(m^2 - \alpha^2 \rho_0^2)^2 e^2 \Phi_0^2 \cos^2(\omega t_0 - kz_0 + m\phi_0)(J_{m-1}(\alpha\rho_0) - J_{m+1}(\alpha\rho_0))^2}\right)} + \omega m} \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

6.3 Transformation der Dirac-Gleichung

Wie beschrieben lautet die Dirac-Gleichung in beliebigen krummlinigen Koordinaten [6]

$$\left[i \left(\tilde{\partial}_\mu + ie\tilde{A}_\mu \right) \tilde{\gamma}^\mu - \mu \right] \psi(y) = 0. \quad (6.23)$$

mit $\tilde{\gamma}^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \gamma^\nu$, $\tilde{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial y^\mu}$ und $\tilde{A}_\mu = g_{\mu\beta} \Lambda^\beta_\nu A^\nu$.

Aufgrund der Zylindersymmetrie unseres Problems und der Tatsache, dass im Potential lediglich Linearkombinationen der Koordinaten x^0 und x^3 auftreten, wollen wir die Dirac-Gleichung in folgenden

etwas allgemeineren Koordinaten y^μ aufstellen

$$y^0 = u = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_3 x^3 \quad (6.24)$$

$$y^1 = \rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad (6.25)$$

$$y^2 = \phi = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \quad (6.26)$$

$$y^3 = v = \Lambda^3_0 x^0 + \Lambda^3_3 x^3 \quad (6.27)$$

mit konstanten $\Lambda^0_0, \Lambda^0_3, \Lambda^3_0, \Lambda^3_3$. In diesem Fall ist $\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\right)$ gegeben durch

$$\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\right) =: (\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & 0 & 0 & \Lambda^0_3 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & -\frac{\sin(\phi)}{\rho} & \frac{\cos(\phi)}{\rho} & 0 \\ \Lambda^3_0 & 0 & 0 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

Für die aus den gewählten Koordinaten y^μ folgende Metrik gilt

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & g_{03} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ g_{30} & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

mit konstanten $g_{00}, g_{03}, g_{30}, g_{33}$. Damit kann nun (\tilde{A}_μ) in diesen Koordinaten berechnet werden. Aufgrund der Struktur des von uns verwendeten Potentials setzen wir voraus, dass das Potential (A^μ) der Form

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} A^0 \\ 0 \\ 0 \\ A^3 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

ist. Damit folgt

$$(\tilde{A}_\mu) = \begin{pmatrix} (g_{00}\Lambda^0_0 + g_{03}\Lambda^3_0) A^0 + (g_{00}\Lambda^0_3 + g_{03}\Lambda^3_3) A^3 \\ 0 \\ 0 \\ (g_{30}\Lambda^0_0 + g_{33}\Lambda^3_0) A^0 + (g_{30}\Lambda^0_3 + g_{33}\Lambda^3_3) A^3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \beta_1 A^0 + \beta_2 A^3 \\ 0 \\ 0 \\ \beta_3 A^0 + \beta_4 A^3 \end{pmatrix}, \quad (6.31)$$

wobei die Abkürzungen $\beta_1 = g_{00}\Lambda^0_0 + g_{03}\Lambda^3_0$, $\beta_2 = g_{00}\Lambda^0_3 + g_{03}\Lambda^3_3$, $\beta_3 = g_{30}\Lambda^0_0 + g_{33}\Lambda^3_0$ und $\beta_4 = g_{30}\Lambda^0_3 + g_{33}\Lambda^3_3$ eingeführt wurden. Des Weiteren können wir die $\tilde{\gamma}^\mu$ angeben. Diese lauten

$$(\tilde{\gamma}^\mu) = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 \gamma^0 + \Lambda^0_3 \gamma^3 \\ \Lambda^1_1 \gamma^1 + \Lambda^1_2 \gamma^2 \\ \Lambda^2_1 \gamma^1 + \Lambda^2_2 \gamma^2 \\ \Lambda^3_0 \gamma^0 + \Lambda^3_3 \gamma^3 \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

Unter Verwendung der erhaltenen Ergebnisse können wir nun einen Ausdruck für $i(\tilde{\partial}_\mu + ie\tilde{A}_\mu)\tilde{\gamma}^\mu$ angeben

$$\begin{aligned} i(\tilde{\partial}_\mu + ie\tilde{A}_\mu)\tilde{\gamma}^\mu &= \gamma^0 (i\partial_0\Lambda^0_0 - i\partial_3\Lambda^3_0 - e[\Lambda^0_0(\beta_1A^0 + \beta_2A^3) + \Lambda^3_0(\beta_3A^0 + \beta_4A^3)]) \\ &+ \gamma^1 \left(-i\cos(\phi)\partial_1 + i\frac{\sin(\phi)}{\rho}\partial_2 + i\frac{\cos(\phi)}{\rho} \right) \\ &+ \gamma^2 \left(-i\sin(\phi)\partial_1 - i\frac{\cos(\phi)}{\rho}\partial_2 + i\frac{\sin(\phi)}{\rho} \right) \\ &+ \gamma^3 (i\partial_0\Lambda^0_3 - i\partial_3\Lambda^3_3 - e[\Lambda^0_3(\beta_1A^0 + \beta_2A^3) + \Lambda^3_3(\beta_3A^0 + \beta_4A^3)]) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Spezifizieren wir die verwendeten Koordinaten nun dahin gehend, dass

$$\begin{aligned} \Lambda^0_0 &= \omega \\ \Lambda^0_3 &= -k \\ \Lambda^3_0 &= -k \\ \Lambda^3_3 &= \omega, \end{aligned} \quad (6.34)$$

so können wir den metrischen Tensor $(g_{\mu\nu})$ folgendermaßen schreiben

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix}, \quad (6.35)$$

womit wir folgende Gleichungen

$$(i\partial_u\omega + i\partial_vk - eA^0 - m)\Psi_+ + \begin{pmatrix} -i\partial_uk - i\partial_v\omega + e\frac{\omega}{k}A^0 & -ie^{-i\phi}\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}i\partial_\phi\right) \\ -ie^{i\phi}\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}i\partial_\phi\right) & i\partial_uk + i\partial_v\omega - e\frac{\omega}{k}A^0 \end{pmatrix}\Psi_- = 0 \quad (6.36)$$

und

$$(i\partial_u\omega + i\partial_vk - eA^0 + m)\Psi_- + \begin{pmatrix} -i\partial_uk - i\partial_v\omega + e\frac{\omega}{k}A^0 & -ie^{-i\phi}\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}i\partial_\phi\right) \\ -ie^{i\phi}\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}i\partial_\phi\right) & i\partial_uk + i\partial_v\omega - e\frac{\omega}{k}A^0 \end{pmatrix}\Psi_+ = 0 \quad (6.37)$$

mit $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$ erhalten.

6.4 Spin-Konnexion

Wir wollen nun zeigen, dass die Gleichungen

$$\left[i \left(\tilde{\partial}_\mu + ie\tilde{A}_\mu \right) \tilde{\gamma}^\mu - \mu \right] \psi(y) = 0 \quad (6.38)$$

und

$$\left[i\tilde{\gamma}^\mu \left(\tilde{\partial}_\mu + \Gamma_\mu + ie\tilde{A}_\mu \right) - \mu \right] \psi(y) = 0 \quad (6.39)$$

für die oben gewählten Koordinaten (4.5) - (4.8) äquivalent sind. Hierzu berechnen wir die Spin-Konnexion $\Gamma_\mu = g_{\mu\nu}\Gamma^\nu$. Γ^ν ist nach (4.4) gegeben durch $\Gamma^\nu = \frac{1}{4} \text{tr} \left[\tilde{\gamma}^\nu \tilde{\partial}_\mu \tilde{\gamma}^\mu \right]$. Wir werden daher zunächst $\tilde{\partial}_\mu \tilde{\gamma}^\mu$ berechnen

$$\tilde{\partial}_\mu \tilde{\gamma}^\mu = \frac{\cos(\phi)}{\rho} \gamma^1 + \frac{\sin(\phi)}{\rho} \gamma^2, \quad (6.40)$$

wobei die $(\tilde{\gamma}^\mu)$ die explizite Darstellung

$$(\tilde{\gamma}^\mu) = \begin{pmatrix} \omega\gamma^0 - k\gamma^3 \\ \cos(\phi)\gamma^1 + \sin(\phi)\gamma^2 \\ -\frac{\sin(\phi)}{\rho}\gamma^1 + \frac{\cos(\phi)}{\rho}\gamma^2 \\ -k\gamma^0 + \omega\gamma^3 \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

haben. Aufgrund der Diagonalform der Matrix γ^0 ($\gamma^0 = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$) und der Tatsache, dass γ^3 keine Diagonalelemente besitzt, ist sofort klar, dass

$$\Gamma_0 = \Gamma_3 = 0. \quad (6.42)$$

Für Γ_2 erhalten wir

$$\Gamma_2 = g_{22} \frac{1}{4\rho^2} \text{tr} \begin{pmatrix} ie^{-i\phi}e^{i\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi}e^{i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ie^{-i\phi}e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi}e^{i\phi} \end{pmatrix} = 0. \quad (6.43)$$

Als einziges trägt also Γ_1 zur Spin-Konnexion bei. Dieses wollen wir nun berechnen

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= g_{11} \frac{1}{4\rho} \text{tr} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}e^{i\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-i\phi}e^{i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-i\phi}e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-i\phi}e^{i\phi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Damit folgt

$$i\tilde{\gamma}^\mu\Gamma_\mu = i\frac{\cos(\phi)}{\rho}\gamma^1 + i\frac{\sin(\phi)}{\rho}\gamma^2. \quad (6.45)$$

Der Vergleich mit (6.33) zeigt nun, dass die durch das Differenzieren der $\tilde{\gamma}^\mu$ zusätzlich entstehenden Terme gleich des Beitrags der Spin-Konnexion sind, der nicht beachtet zu sein schien. Damit sind die Gleichungen (6.38) und (6.39) (zumindest in den von uns verwendeten Koordinaten) äquivalent.

Abbildungsverzeichnis

1	Dargestellung der Bahnkurven (3.94) eines Elektrons in einer Besselwelle.	23
2	Darstellung der Abhängigkeit der Bahngeschwindigkeit eines Elektrons, das sich auf einer Kreisbahn um das Zentrum einer Besselwelle bewegt, vom radialen Abstand ρ_0 vom Zentrum einer Besselwelle.	26
3	Darstellung der Abhängigkeit der Bahngeschwindigkeit eines Elektrons, das sich auf einer Kreisbahn um das Zentrum einer Besselwelle bewegt, von der Ordnung m der Besselwelle.	26

Literatur

- [1] Z. Bouchal, J. Wagner und M. Chlup; Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam. Optics Communications 151, 207-211 (1998)
- [2] Selcuk Akturk, Cord L. Arnold, Bernard Prade und Andre Mysyrowicz; Generation of high quality tunable Bessel beams using a liquid-immersion axicon. Optics Communications 282, 16 (2009)
- [3] Narupon Chattrapiban, Elizabeth A. Rogers, David Cofield, Wendell T. Hill und Rajarshi Roy; Generation of nondiffracting Bessel beams by use of a spatial light modulator. Optics Letters, Vol. 28, Issue 22, pp. 2183-2185 (2003)
- [4] Iwo Bialynicki-Birulaar; Trojan states of electrons guided by Bessel beams. Xiv:physics/0502025v1
- [5] Andreas Wipf; Skript zur Vorlesung Elektrodynamik an der Friedrich Schiller Universität Jena. <http://www.tpi.uni-jena.de/qfphysics/homepage/wipf/lecturenotes.html> 25.05.2011 20:00
- [6] V.G.Bagrov und D.M. Gitman; Exact Solutions of Relativistic Wave Equations. Kluwer Academic Publishers (1990)
- [7] A. D. Alhaidari und A. Jellal; Dirac and Klein-Gordon Equations in Curved Space. arXiv:1106.2236v1