

Der Renormierungsgruppenfluss supersymmetrischer $O(N)$ -Modelle

DIPLOMARBEIT



seit 1558

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE FAKULTÄT
THEORETISCH-PHYSIKALISCHES INSTITUT

zur Erlangung des
akademischen Grades einer
Diplom-Physikerin (Dipl.-Phys.)

eingereicht von Marianne Christine Mastaler,
geboren am 22. Januar 1986 in Suhl

Jena, den 29. November 2010

1. *Gutachter:* Prof. Dr. Andreas Wipf

2. *Gutachter:* Prof. Dr. Jan Martin Pawlowski

Tag der Verleihung des Diploms:

Inhaltsverzeichnis

I	Grundlagen	1
1	Theoretischer Rahmen und Einordnung	1
2	Die Theorie der supersymmetrischen Sigma-Modelle	7
2.1	Supersymmetrie als Erweiterung der Poincaré-Symmetrie	7
2.1.1	Lie-Gruppen und Lie-Algebren	7
2.1.2	Von der Drehgruppe zur Poincaré-Gruppe	9
2.1.3	Spinorfelder	11
2.1.4	Die Super-Poincaré-Algebra	15
2.2	Das Superraumkonzept	17
2.3	Das $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische lineare $O(N)$ -Sigma-Modell in $d = 3$	18
3	Die Methoden der funktionalen Renormierungsgruppe	22
3.1	Einleitung	22
3.2	Der Renormierungsgruppenfluss	23
3.2.1	Die effektive Wirkung	23
3.2.2	Die Renormierungsgruppen Flussgleichung	24
3.3	Trunkierungen	26
3.4	Regulatoren	27
3.5	Fixpunktanalyse	29
II	Das lineare $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische $O(N)$-Sigma-Modell in $d = 3$	31
4	Die Flussgleichung des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells in LPA	31
4.1	Herleitung der Flussgleichung im Superraum	31
4.2	Spezifizierung der Regulatorfunktionen	39
5	Die Flussgleichung im Grenzfall $N \gg 1$	41
5.1	Exakte Lösung der Flussgleichung	41
5.2	Fixpunktlösungen	43
5.2.1	Die Lösungen der Fixpunktgleichung	43
5.2.2	Fixpunktanalyse	48
5.3	Der Fluss des effektiven Mittelwertpotentials	53
5.4	Phasenstruktur und Interpretation der kritische Exponenten	57
5.5	Test der polynomialen Entwicklung für $N \gg 1$	61
III	Resümee	66

Symbolverzeichnis

Symbol	Definition	Bedeutung
α	(5.2)	Parameter, gegeben durch $\alpha = N/(8\pi^2)$; entspricht der Fixpunktkopplung $\kappa_* = \alpha$
β	(5.71)	kritischer Exponent
β_i	(3.32)	β -Funktion der Kopplung $a_i(t)$
γ, γ'	(5.78), (5.77)	kritische Exponenten
γ^μ		Gamma-Matrizen
Γ	(3.5)	effektive Wirkung
Γ_k	(3.15)	effektive Mittelwertwirkung
δ	(5.75)	kritischer Exponent
δ_ϵ		$\delta_\epsilon := i\bar{\epsilon}\mathcal{Q}$, infinitesimale SUSY-Transformation
$\delta\kappa_\Lambda$	(5.62)	Abweichung der klassischen Kopplung κ_Λ von der Fixpunktkopplung $\kappa_* = \alpha$
ϵ		konstanter Majorana-Spinor
η		Kapitel 1-2: Minkowski-Metrik; ab Kapitel 3: anomale Dimension
$\bar{\eta}$		rechtshändiger Weyl-Spinor
ϑ		lineare Störung der Fixpunktlösung u_*
θ^i	(2.51)	Grassmann-Koordinaten
θ		konstanter Majorana-Spinor
θ_n	(3.35)	kritische Exponenten
κ		relevante Kopplung
λ		marginale Kopplung
Λ		Kapitel 1-2: Lorentz-Transformation; ab Kapitel 3: UV-cutoff-Impulsskala
ν, ν'	(5.80) (5.79)	kritische Exponenten
ξ	Tabelle 3	Korrelationslänge
ρ	(4.3)	reelles skalares Superfeld
$\hat{\rho}$		dimensionsloses Skalarfeld
$\tilde{\rho}$		dimensionsbehaftetes Skalarfeld
$\tilde{\rho}_0$	(5.63)	Potentialminimum im Limes $k \rightarrow 0$
σ_i		Pauli-Matrizen
$\Sigma^{\mu\nu}$	(2.33)	Spinordarstellung der Lorentz-Gruppe
φ_i		Quantenfelder
ϕ_i	(3.11)	Erwartungswerte der Felder φ_i in Anwesenheit der Quelle J
Φ^i	(2.53)	N reelle skalare Superfelder
χ	Tabelle 3	Kapitel 2: linkshändiger Weyl-Spinor; Kapitel 5.4: magnetische Suszeptibilität
Ψ		Spinorfeld
Ψ^i	(2.53)	N reelle Majorana-Spinorfelder
ω_n	(3.35)	Eigenwerte der Stabilitätsmatrix B_i^j
a_i		dimensionslose Kopplungen
B		externes Magnetfeld
B_i^j	(3.34)	Stabilitätsmatrix
c_1		Integrationskonstante der Fixpunktlösung u_*
\tilde{c}_1	(5.28)	kritischer Wert der Integrationskonstanten c_1
C		Ladungskonjugationsmatrix (Kapitel 2)
d		Dimension des euklidischen Raumes bzw. der Raumzeit

Symbol	Definition	Bedeutung
$\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}}$	(2.59)	superkovariante Ableitungen
$f(\mathcal{M}, T)$		freie Energiedichte
F		freie Energie (Kapitel 5.4)
F^i	(2.53)	N reelle pseudoskalare Hilfsfelder
G_k		verbundene Zweipunktsfunktion
h		$h := 1 + r_2$
I_k		Generatoren der inneren Symmetrie-Gruppe
J bzw. J_i		Kapitel 2: räumliche Rotationen, sonst: externer Strom
k		Impulsskala mit $k \in [0, \Lambda]$
K	(1.5)	kinetischer Operator
K_i		Lorentz-Boosts
\mathcal{L}		Kapitel 1-2.2: Lorentz-Gruppe; ab Kapitel 2.3: Lagrangedichte
M		renormierte Masse
\mathcal{M}		Kapitel 1-2: Mannigfaltigkeit; Kapitel 5.4: spontane Magnetisierung
$M_{\mu\nu}$		Erzeugende der Lorentz-Gruppe
n^i	(2.53)	N reelle Skalarfelder
N		Anzahl der Superfelder Φ^i bzw. der Felder n^i, F^i und ψ^i
\mathcal{N}		Anzahl der fermionischen Generator-Paare
p		Impulskoordinaten
P_μ		Generatoren der Translations-Gruppe
\mathcal{P}	Tabelle 1	Poincaré-Gruppe
r	(5.91)	Konvergenzradius
r_1, r_2	(3.30)	Regulator-Funktionen
R_k	(3.10)	Regulatorfunktion
$\mathbb{R}^{t,d}$		Minkowski-Raumzeit mit t zeitlichen und d räumlichen Richtungen
$\mathbb{R}^{d p}$		Superraum, bestehend aus d Raum(zeit)- und p Grassmann-Koordinaten
$\mathcal{Q}, \bar{\mathcal{Q}}$		fermionische Generatoren (Superladungen)
S		Kapitel 5.4: Entropie, sonst: klassische Wirkung
ΔS_k	(3.10)	Regulator-Term
S_i^j		Matrix-Darstellung der Lorentz-Gruppe
t	(3.19)	dimensionsloser Skalenparameter $t \in [-\infty, 0]$
T		Systemtemperatur
T_c		kritische Temperatur
\mathcal{T}		innere Symmetrie-Gruppe
u_t bzw. u		dimensionsloses Superpotential
$W[J]$		Schwinger-Funktional
W		Superpotential
W_k		skalenabhängiges Superpotential
\mathcal{W}'_k		$\mathcal{W}'_k := W'_k + r_1$
V		effektives Potential
V_k		effektives dimensionsbehaftetes Mittelwertpotential
V_t		effektives dimensionsloses Mittelwertpotential
V_i^n	(3.35)	Eigenvektoren der Stabilitätsmatrix B_i^j
x		Raum(zeit)koordinaten
$Z[J]$	(3.2)	erzeugendes Funktional der n -Punkts-Korrelationsfunktionen

*Come, my friends,
'T is not too late to seek a newer world.
Push off, and sitting well in order smite
The sounding furrows; for my purpose holds
To sail beyond the sunset, and the baths
Of all the western stars, until I die.
It may be that the gulfs will wash us down:
It may be we shall touch the Happy Isles,
And see the great Achilles, whom we knew.
Tho' much is taken, much abides; and tho'
We are not now that strength which in old days
Moved earth and heaven, that which we are, we are;
One equal temper of heroic hearts,
Made weak by time and fate, but strong in will
To strive, to seek, to find, and not to yield¹.*

¹Gedicht aus „Ulysses“ von Alfred, Lord Tennyson (1833).

Teil I

Grundlagen

Inhalt dieser Arbeit ist die Untersuchung einer speziellen quantenfeldtheoretischen Theorie – dem **supersymmetrischen $O(N)$ -Modell in $d = 3$ Raumdimensionen**². Als Methode zur Beschreibung dieses Modells soll die *funktionale Renormierungsgruppentheorie* dienen. **Intention**³ dieser Arbeit ist

1. die Bestimmung des Skalenverhaltens von supersymmetrischen $O(N)$ -Modellen
2. die Untersuchung der Phasenstruktur und des kritischen Verhaltens am Phasenübergang sowie die Ermittlung der kritischen Exponenten
3. das Aufzeigen von Analogien und Unterschieden zwischen skalaren und supersymmetrischen $O(N)$ -Modellen.

Die theoretischen Grundlagen sind didaktisch wie folgt aufgebaut:

- 1.) Zunächst wird in den Kapiteln 1 und 2 die zu untersuchende **Theorie** in das „Gesamtkonzept“ Quantenfeldtheorie eingeordnet und erläutert.
- 2.) Nachfolgend wird in Abschnitt 3 die mathematische/physikalische **Methode** der funktionalen Renormierungsgruppe detailliert erklärt.

1 Theoretischer Rahmen und Einordnung

Abb. 1 gibt einen schematischen Überblick über die Einordnung und Definition von „supersymmetrischen Sigma-Modellen“. Das übergeordnete Gesamtkonzept, in das sich das lineare Sigma-Modell einordnen lässt, lautet „**relativistische Quantenfeldtheorie**“.

Letztere verkörpert die konsistente Vereinheitlichung von Quantenmechanik und spezieller Relativitätstheorie, erlaubt jedoch keine Aussagen über gravitative Phänomene. Die Bezeichnung Quantenfeld-Theorie impliziert dabei ihr Wesen: Hier werden die klassischen Felder wie z. B. das elektromagnetische Feld quantisiert und stellen somit *operatorwertige Funktionen* von Raum und Zeit dar. Die Anzahl der vorhandenen Freiheitsgrade ist folglich unbegrenzt – es existiert mindestens ein Freiheitsgrad für jeden Punkt im Raum. Für jedes zu beschreibende Teilchen wird ein adäquates fundamentales Feld konstruiert. Die Einführung von Feldern als Konzept zur Beschreibung von Wechselwirkungen beruht dabei auf folgenden nützlichen Aspekten: 1. Wechselwirkungen werden *lokal* vermittelt. 2. Teilchenzahlen können veränderlich sein. 3. Alle Teilchen des gleichen Typs sind gleich.

Die die Dynamik einer jeden Quantenfeldtheorie bestimmende Größe ist die *Wirkung S* . Aus diesem Funktional der Quantenfelder folgen mit dem Variationsprinzip der extremalen/stationären Wirkung die klassischen Bewegungsgleichungen der Felder, z. B. für das elektromagnetische Feld die Maxwellgleichungen. Die physikalische Dimension der Wirkung ist Energie-Zeit und entspricht der des (gequantelten) Drehimpulses.

Reelle Skalarfelder $\phi(\vec{x}, t)$ sind zentrale Objekte vieler quantenfeldtheoretischer Modelle. Die Anregungen von quantisierten skalaren Feldern entsprechen spinlosen Teilchen – den Bosonen. Experimentell wurden bisher noch keine skalaren Felder in der Natur nachgewiesen. Dieser Nachweis könnte jedoch mit der Beobachtung des sogenannten „Higgs-Bosons“ am *Large Hadron Collider* [43] in naher Zukunft erbracht werden. Aufgrund der mathematischen Einfachheit skalarer Feldtheorien werden diese aber oft Spinor-Feldtheorien vorgezogen. Auch erhält man,

²Äquivalent zur Bezeichnung „supersymmetrisches $O(N)$ -Modell“, ist der Ausdruck „supersymmetrisches lineares $O(N)$ -Sigma-Modell“. Letzterer betont die Einordnung der Theorie in die Klasse der *linearen Sigma-Modelle*, siehe Abschnitt 1.

³Diese Ziele werden u. a. am Ende von Abschnitt 1 motiviert.

ausgehend von skalaren Theorien, z.B. für bestimmte Berechnungen der Casimir-Kraft oder e^-e^+ -Produktionsraten im Kontext des Schwinger-Effekts exakte Ergebnisse bis auf den Faktor zwei, der aus der Spin-Entartung $g = 2s + 1$ für das Elektron resultiert.

In dieser Arbeit werden keine relativistischen Quantenfeldtheorien, sondern deren äquivalente *euklidische Formulierungen* betrachtet (siehe Abb. 1). Diese erhält man durch eine analytische Fortsetzung der Zeitkomponente zu imaginären Zeiten $t \rightarrow -i\tau$ mit $\tau \in \mathbb{R}$ („Wick-Rotation“). Dies impliziert den Übergang der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ zur euklidischen Metrik $\delta_{\mu\nu} = -\text{diag}(1, 1, 1, 1)$.

Die wohl wichtigste intrinsische Eigenschaft einer gegebenen Wirkung ist ihre **Symmetrie**. Dabei versteht man unter einer Symmetrie intuitiv zunächst eine Art Einschränkung oder Ordnung. Mathematisch bedeutet dieser Begriff die Invarianz einer Größe unter einer Operation oder Transformation, die auf diese Größe wirkt. So ist z. B. von einem festen Standpunkt aus betrachtet das Bild einer Kugel invariant unter Drehungen beliebigen Winkels um eine Achse durch ihr Zentrum. Anders formuliert: Symmetrien bedingen Restriktionen und können – falls sie bekannt sind – eine theoretische Betrachtung erheblich vereinfachen. Eine *relativistische* Quantenfeld-

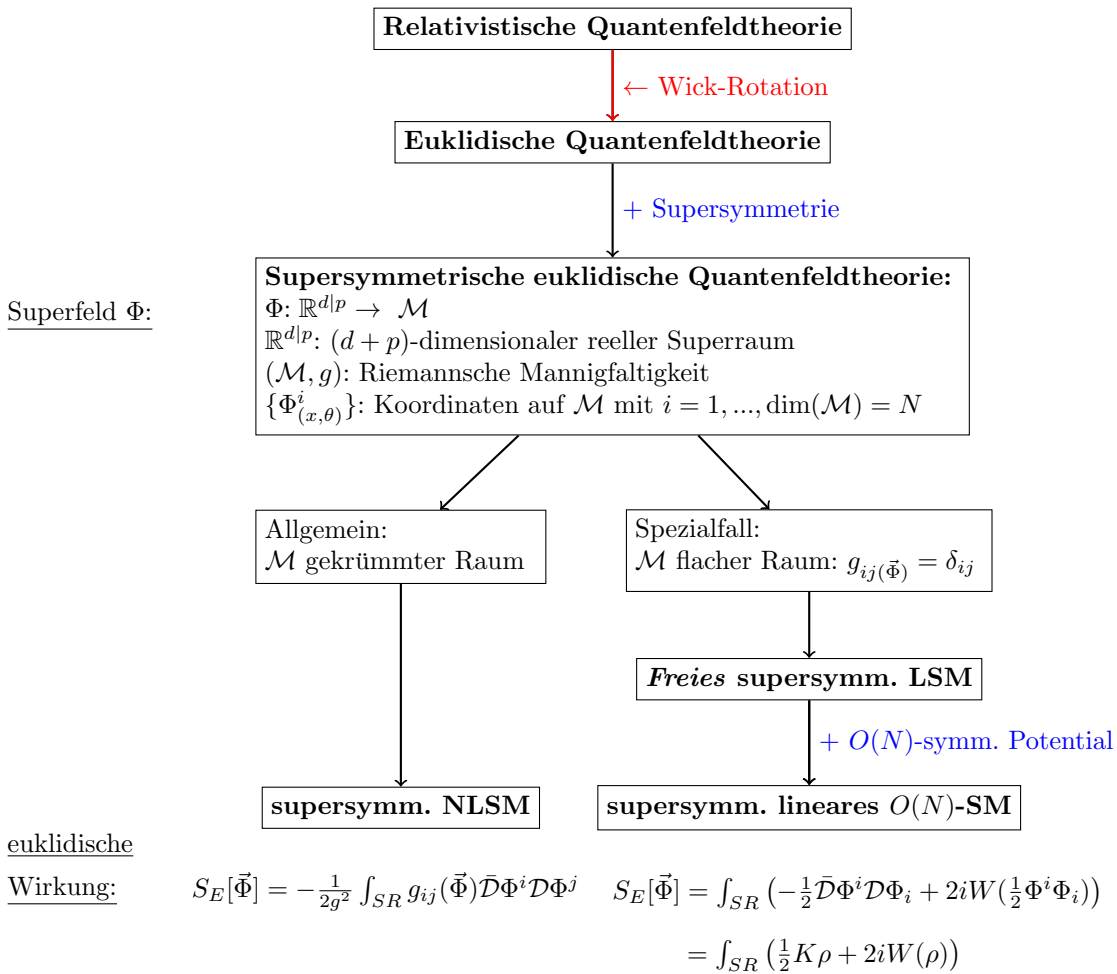


Abbildung 1: Theoretischer Rahmen. Bezeichnungen: SM \rightarrow „Sigma-Modell“, LSM \rightarrow „lineares Sigma-Modell“ und NLSM \rightarrow „nichtlineares Sigma-Modell“.

theorie genügt offensichtlich den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie. So folgt für die *skalare* Wirkung, dass diese invariant unter *Poincaré-Transformationen* $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ ist. Man bezeichnet eine solche kontinuierliche Symmetrie $\phi \rightarrow \phi'$ mit $S[\phi] = S[\phi'] \quad \forall \phi$ und beliebige Transformationsparameter auch als eine *Symmetrie der Wirkung*. Dabei bedingt eine kontinuierliche Symmetrie von S dem *Noether-Theorem* folgend immer eine Erhaltungsgröße –

die erhaltene Ladung. Raumzeit-Translationsinvarianz impliziert z. B. als Erhaltungsgröße den Viererimpuls P^μ mit $\frac{d}{dt}P^\mu = 0$. Dies stimmt mit den bereits aus der klassischen Mechanik bekannten Gesetzmäßigkeiten überein: Invarianz der Wirkung unter Zeittranslation bedingt Energieerhaltung; Invarianz von S unter räumlichen Verschiebungen ist gleichbedeutend mit Impulserhaltung.

Neben der Invarianz unter Poincaré-Transformationen soll die in dieser Arbeit eine weitere Symmetrie betrachtet werden: **Supersymmetrie**. Wie noch näher in Abschnitt 2.1 erläutert wird, stellt letztere eine konsistente *Erweiterung* der Poincaré-Symmetrie dar und führt ebenfalls zu einer erhaltenen Größe – der „Superladung“. Allgemein verkörpert die Supersymmetrie eine Fermionen (elementare Materie) und Bosonen (Vermittler der fundamentalen Kräfte) vereinigende Symmetrie. Der supersymmetrische Generator Q dieser Symmetrie setzt dabei Fermionen und Bosonen zueinander in Beziehung:

$$Q|Fermion\rangle \propto |Boson\rangle \quad \text{und} \quad Q|Boson\rangle \propto |Fermion\rangle. \quad (1.1)$$

Untenstehende Abbildung 2 veranschaulicht die gegensätzlichen Eigenschaften dieser Teilchen. In welche der beiden Kategorien sich ein Teilchen einordnet, bestimmt sein Spin. Bosonen tra-

Bosonen	Spin	Fermionen
ganzzahlig		halbzahlig
Tensor c -Zahl	mathematisches Wesen	Spinor a -Zahl
Austauschteilchen	physikalisches Wesen	elementare Materie
Bose-Statistik	Besetzungs-Statistik	Fermi-Dirac-Statistik
Kommutator-Relationen	Feldoperatoren erfüllen	Antikommutator-Relationen

Abbildung 2: Eigenschaften bosonischer und fermionischer Teilchen, siehe auch [25].

gen einen ganzzahligen, Fermionen einen halbzahligen Spin. Erstere verhalten sich unter Drehungen wie Tensoren, letztere hingegen wie Spinoren⁴. Mathematisch muss – im Gegensatz zu der Behandlung von bosonischen Teilchen – zur Beschreibung der Fermionen das Konzept der *Grassmann*- oder a -Zahlen eingeführt werden⁵. Die a - bzw. c -Zahlen gehen durch die Quantisierung in Operatoren über, die algebraischen Antikommutator- bzw. Kommutator-Relationen genügen. Diese bedingen wiederum das so verschiedene Besetzungsverhalten von Bosonen und Fermionen.

Invarianz der Wirkung unter Supersymmetrie-Transformationen führt neben der Existenz einer Erhaltungsgröße zu einer *Entartung*, d. h. mehreren Zuständen mit gleichen Quantenzahlen (mit Ausnahme der Spinquantenzahl). Die Teilchen bilden Supermultipletts, wobei die Supersymmetrie-Transformation zwischen zwei Teilchen eines Multipletts vermittelt. Jedes Multiplett enthält mindestens ein Boson und ein Fermion mit einer Spindifferenz von $1/2$ und alle Teilchen des Multipletts besitzen die *gleiche Masse*. Man bezeichnet ein solches Boson-Fermion-Paar gleicher Masse auch als „Superpartner“.

Experimentell konnten jedoch keine Superpartner-Teilchen identischer Masse, z. B. das Seletron als Superpartner des Elektrons, nachgewiesen werden. Dies bedeutet, dass die Supersymmetrie

⁴In Abschnitt 2.1.3 wird der Begriff eines *Spinorfeldes* ausführlich erörtert.

⁵Eine detaillierte Behandlung von Grassmann-Zahlen findet sich z. B. in [25], Kapitel 4.

in der realen Welt *spontan gebrochen* ist, denn dies erlaubt unterschiedliche Massen der Partnerteilchen. Die Supersymmetrie als gebrochene Symmetrie stellt aber keinen Einzelfall in der Natur dar: So seien nur die Ladungskonjugation (C), die Paritätssymmetrie (P) oder deren Kombination (CP) als gebrochen auftretende Symmetrien genannt.

Doch worin liegt die Motivation, eine *supersymmetrische* Theorie zu untersuchen?

Aus *gruppentheoretischer Sicht* wird dies dadurch begründet, dass die Supersymmetrie eine Erweiterung der Raumzeit-Symmetrie darstellt. Erste Aussagen über die Verallgemeinerung der Poincaré-Symmetrie wurden im „*Coleman-Mandula-Theorem*“ [22] 1967 getroffen. Dieses „no-go theorem“ legt fest, in welcher Art und Weise man die Poincaré-Gruppe \mathcal{P} mit anderen Symmetrie-Gruppen \mathcal{T} unter physikalisch sinnvollen Annahmen zu einer resultierenden Gruppe \mathcal{G} verbinden bzw. erweitern kann. Hierzu geht man von der Gruppe \mathcal{G} als einer verbundenen Symmetrie-Gruppe der S-Matrix ($\rightarrow [G, S] = 0$) aus. Unter der Verwendung von wenigen physikalischen Forderungen folgt, dass \mathcal{G} lokal isomorph zu dem direkten Produkt $\mathcal{P} \otimes \mathcal{T}$ der Poincaré-Gruppe \mathcal{P} und einer kompakten Lie-Gruppe \mathcal{T} mit interner Symmetrie sein muss. Ist dies *nicht* der Fall, d. h. ist \mathcal{P} in nicht-trivialer Weise mit \mathcal{T} verbunden, erhält man nur triviale physikalische Aussagen. Des Weiteren erlaubt das Theorem zusätzliche $U(1)$ -Untergruppen von \mathcal{G} . Erstrebenswert sind aber gerade nichttriviale Erweiterungen der Poincaré-Symmetrie. Lösung dieser Problematik ist die Abänderung der Annahme „ \mathcal{G} sei eine Lie-Gruppe“ und somit der Übergang zur Betrachtung allgemeinerer Symmetrie-Gruppen. Die *Superalgebra* als \mathbb{Z}_2 -graduierte Lie-Algebra, die in Abschnitt 2.1 näher erläutert wird, stellt gerade eine nichttriviale Erweiterung von \mathcal{P} dar. Historisch wurde diese Verallgemeinerung des Coleman-Mandula-Theorems acht Jahre nach dessen Formulierung im *Haag-Lopuszanski-Sohnius-Theorem* 1975 formuliert. Anlehnend an den Titel der Arbeit von S. Coleman und J. Mandula „All Possible Symmetries of the S-Matrix“ [22] bezeichneten R. Haag, J. T. Lopuszanski und M. Sohnius ihr Werk [23] als „All possible generators of supersymmetries of the S-matrix“.

Auch existieren *physikalische Argumente*, in denen Supersymmetrie als eine Möglichkeit zur Behebung von Diskrepanzen und Problemen des *Standardmodells* gesehen wird. Hierzu zählen unter anderem:

- Lösung des Eich-Hierarchie-Problems des Standardmodells.
- Vereinigung der Eichkopplungen von schwacher, elektromagnetischer und starker Wechselwirkung bei hohen Energien.
- Die Superpartner der bekannten Teilchen gelten als möglicher Kandidat der dunklen Materie.

Nach der Klärung des Begriffs einer „supersymmetrischen euklidischen Quantenfeldtheorie“ sollen nun die Quantenfelder (siehe Abb. 1) näher spezifiziert werden. Skalaren euklidischen Quantenfeldtheorien liegt, wie bereits erwähnt, ein reelles bosonisches skalares Quantenfeld

$$\phi : (x) \in \mathbb{R}^d \mapsto \phi(x) \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

zugrunde. Untersucht man nun eine supersymmetrische Quantenfeldtheorie, so geht das bosonische Skalarfeld $\phi(x)$ in ein Superfeld $\Phi(x, \theta)$ über. Die d euklidischen Koordinaten $(x) = (x^1, \dots, x^d)$ werden nun allgemein durch p fermionische Grassmann-Koordinaten $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^p)$ ergänzt, sodass das Superfeld eine Abbildung

$$\Phi : (x, \theta) \in \mathbb{R}^{d|p} \mapsto \Phi(x, \theta) \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

von dem *Superraum* $\mathbb{R}^{d|p}$ in die reellen Zahlen repräsentiert.

Um zu der Definition von supersymmetrischen *nichtlinearen* Sigma-Modellen (NLSM) zu gelangen, geht man zu einem Superfeld über, das nicht mehr in die reellen Zahlen, sondern in eine N -dimensionale, nichtlineare Riemannsche Mannigfaltigkeit (\mathcal{M}, g) , ausgestattet mit dem metrischen Tensor $g_{ij}(\Phi^k)$, abbildet. Φ bildet dann eine differenzierbare Karte von $\mathbb{R}^{d|p}$ in die Ziel-Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Um auf der Mannigfaltigkeit Mathematik betreiben zu können, wähle

man die Koordinaten $\{\Phi^i(x, \theta)\}$ mit $i = 1, \dots, \dim(\mathcal{M}) = N$. Relevant ist hierbei, dass die zu beschreibende Physik unabhängig von der Wahl der Koordinaten Φ^i sein muss. Folglich wird die zu konstruierende Wirkung invariant unter allgemeinen Koordinaten-Transformationen auf \mathcal{M} sein. Dies bedeutet auch, dass das Wirkungsfunktional aus rein tensoriellen Strukturen auf \mathcal{M} gebildet wird. Die Wirkung S lautet konkret

$$S_E[\vec{\Phi}] = -\frac{1}{2g^2} \int_{SR} g_{ij}(\vec{\Phi}) \bar{\mathcal{D}}\Phi^i \mathcal{D}\Phi^j, \quad (1.4)$$

wobei die Integration der Lagrangedichte über den Superraum („ SR “) $\mathbb{R}^{d|p}$ zur Wirkung S führt. Bildet die Ziel-Mannigfaltigkeit \mathcal{M} einen flachen euklidischen Raum, d. h. gilt $g_{ij}(\vec{\Phi}) = \delta_{ij}$, so gelangt man ausgehend von (1.4) zu dem freien *linearen Sigma-Modell* (LSM) (siehe Abb. 1). Die Hinzunahme einer $O(N)$ -symmetrischen potentiellen Energiedichte führt auf ein *wechselseitiges* lineares Sigma-Modell. Dessen Wirkung lautet folglich

$$\begin{aligned} S_E[\vec{\Phi}] &= \int_{SR} \left(-\frac{1}{2} \bar{\mathcal{D}}\Phi^i \mathcal{D}\Phi_i + 2iW\left(\frac{1}{2}\Phi^i \Phi_i\right) \right) \\ &= \int_{SR} \left(\frac{1}{2} K \rho + 2iW(\rho) \right) \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{1}{2} \Phi^i \Phi_i \quad \text{und} \quad K := \frac{1}{2} (\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} - \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Die Ziel-Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist somit der N -dimensionale lineare Raum $\mathcal{M} = \mathbb{R}^N$. Obiges Wirkungsfunktional ist so konstruiert, dass es nur von der Länge ρ , d. h. dem inneren Produkt $\rho = \frac{1}{2} \Phi^i \Phi_i = \frac{1}{2} \Phi^T \Phi$ der Superfelder abhängt und demnach invariant unter Drehungen bzw. Drehspiegelungen O ist:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = O\Phi \quad \implies \quad S_E[\Phi] = S_E[\Phi'] \quad \forall \Phi, \text{ Transformationsparameter} \quad (1.6)$$

Begründung: Mit der orthogonalen Matrix O mit $O^T = O^{-1}$ erhält man:

$\Phi^T \Phi \rightarrow (O\Phi)^T (O\Phi) = \Phi^T O^T O \Phi = \Phi^T \Phi$. Die kovarianten Ableitungen $\bar{\mathcal{D}}$ und \mathcal{D} wirken nicht auf O , was die Invarianz des kinetischen Terms in (1.5) bedingt. Die Wirkung ist folglich $O(N)$ -symmetrisch. Mathematisch handelt es sich dabei um eine kontinuierliche Symmetriegruppe $(O(N), \cdot)$ der orthogonalen $N \times N$ -Matrizen mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung. Mit überabzählbar vielen Elementen und einer endlichen Zahl von Erzeugenden $\binom{N}{2} = N(N-1)/2 = \dim(O(N))$ gehört sie zur Klasse der Lie-Gruppen. Da es sich in diesem Fall nicht um Raumzeit-Transformationen handelt, liegt eine innere Symmetrie vor.

Doch worin liegt die Motivation, *supersymmetrische lineare Sigma-Modelle* zu untersuchen?

Skalare $O(N)$ -Feldtheorien wurden bereits detailliert in Arbeiten wie [6, 10–12] untersucht und dienen als Prototyp für eine ganze Klasse von Theorien, in denen eine spontan gebrochene Symmetrie bei hohen Temperaturen wiederhergestellt wird. Die *Universalitätshypothese* begründet die Gültigkeit der Phasenstruktur sowie der kritischen Phänomene des skalaren $O(N)$ -Modells für eine große Klasse von Theorien, die lediglich bezüglich der Raum-Dimension und $O(N)$ -Symmetrie mit diesem Modell übereinstimmen müssen. So zeigt das skalare $O(N)$ -Modell in $d = 3$ für $N \geq 2$ einen Phasenübergang 2. Ordnung analog zu ferromagnetischen Materialien, die oberhalb der Curie-Temperatur paramagnetisches Verhalten zeigen. Speziell beschreibt der Fall $N = 0$ die statistischen Eigenschaften langer Polymerketten, $N = 1$ die Verdampfung von Wasser als Phasenübergang 1. Ordnung, $N = 2$ den Phasenübergang zu suprafluidem Helium und $N = 3$ das Heisenberg-Modell des ferromagnetischen Phasenübergangs [6].

Falls Supersymmetrie eine geeignete Darstellung der realen Welt verkörpert, so ist die Phasenstruktur und Dynamik des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells demnach von hoher Brisanz. Kann die Phasenstruktur des linearen supersymmetrischen Sigma-Modells bestimmt werden, so dient dies auch als Demonstration der Universalität des kritischen Verhaltens. Auch können

durch den Vergleich zwischen skalarer- und supersymmetrischer $O(N)$ -Feldtheorie Unterschiede und Gemeinsamkeiten dieser Modelle aufgezeigt werden. All diese Aspekte motivieren die zu Beginn dieser Einführung (siehe Seite 1) erwähnten Ziele dieser Arbeit.

Adäquates Mittel zur Untersuchung von supersymmetrischen $O(N)$ -Modellen ist die Methode der **funktionalen Renormierungsgruppe**, denn sie erlaubt ein grundsätzliches Verständnis der komplexen Makrophysik bei großen Längenskalen in Abhängigkeit der fundamentalen mikroskopischen Wechselwirkungen. Dieses Konzept ermöglicht die Analyse von Änderungen der Kopplungsstärken, Freiheitsgrade, Symmetrien und der Phasenstruktur des Systems in Abhängigkeit von einer Längen- bzw. Energie-Skala und unterliegt im Gegensatz zur Störungstheorie *nicht* der Beschränkung auf schwache Kopplungsstärken. Die Lösung der Evolutionsgleichung für das effektive Mittelwertpotential mit Hilfe dieser Methode wird dabei die Beschreibung des Übergangs von der Mikro- zur Makrophysik ermöglichen.

David Tong schreibt in seinen Lecture Notes der Quantenfeldtheorie ([21], S. 4): „*It will turn out that the possible interactions in quantum field theory are governed by a few basic principles: locality, symmetry and renormalisation group flow (the decoupling of short distance phenomena from physics at larger scales).*“ Wie das Zitat andeutet, werden genau diese Prinzipien das Fundament dieser Arbeit bilden.

2 Die Theorie der supersymmetrischen Sigma-Modelle

2.1 Supersymmetrie als Erweiterung der Poincaré-Symmetrie

2.1.1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

In diesem Abschnitt soll auf die gruppentheoretischen Hintergründe der Supersymmetrie-Algebra detailliert eingegangen werden. Wie bereits in Abschnitt 1 erwähnt wurde, verkörpert die Supersymmetrie eine Erweiterung der Poincaré-Symmetrie. Hin zu komplexeren Gruppenstrukturen kann die aufbauende Reihenfolge mit *Drehgruppe* \rightarrow *Lorentz-Gruppe* \rightarrow *Poincaré-Gruppe* \rightarrow *Poincaré-Supergruppe* angegeben werden. Die ersten drei stellen Lie-Gruppen dar, letztere hingegen eine verallgemeinerte Liegruppe mit \mathbb{Z}_2 -Graduierung. Folglich ist es zunächst relevant, die Begrifflichkeiten „Lie-Gruppe“ und „Lie-Algebra“ zu klären. Abb. 3 gibt hierzu schematisch einen Überblick.

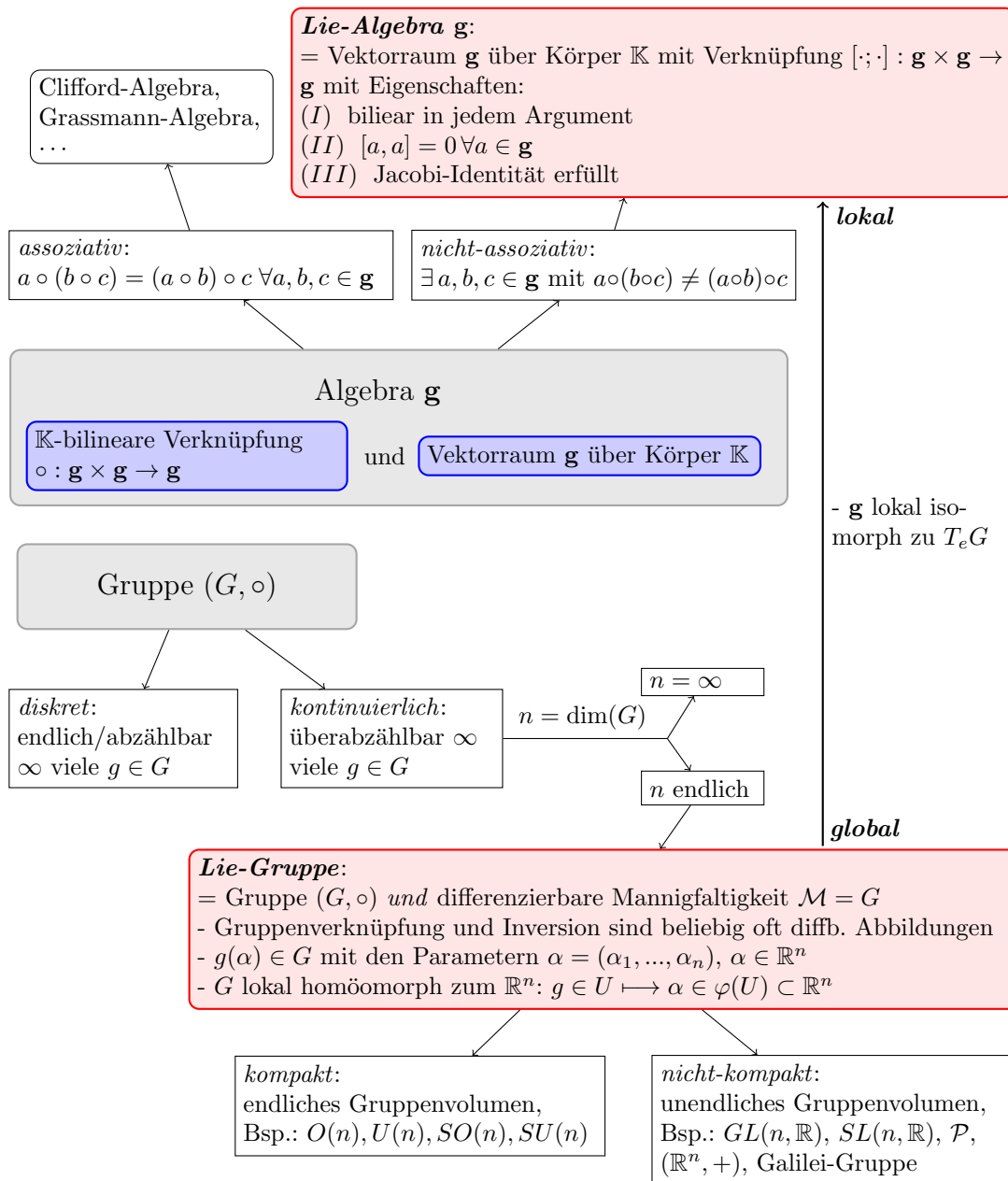


Abbildung 3: Schematische Einordnung von Lie-Gruppen und Lie-Algebren bzw. deren Verknüpfung.

Generell lassen sich **Gruppen** (G, \circ) in Abhängigkeit von der Anzahl ihrer Elemente in zwei Klassen unterteilen. Besitzt die betrachtete Gruppe endlich oder abzählbar unendlich viele $g \in G$, so spricht man von *diskreten* Gruppen. Sind überabzählbar viele Elemente in G enthalten, so nennt man die Gruppe auch *kontinuierlich*. Die Elemente $g(\alpha)$ kontinuierlicher Gruppen können als Funktionen von n reellen kontinuierlichen Parametern $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ beschrieben werden, wobei $\alpha = 0$ dem Einselement $g(0, \dots, 0) = e$ entspricht. Die Geschlossenheit der Gruppe G kann dabei durch die Forderung

$$g(\alpha) \circ g(\beta) = g(\gamma) \quad \text{mit} \quad \gamma = f(\alpha, \beta) \quad \text{und} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

ausgedrückt werden. Die Abbildung $f(\alpha, \beta)$ ordnet zwei Vektoren im Parameterraum wiederum einen Vektor in diesem zu. Die minimale Anzahl n der reellen Parameter, durch die alle $g \in G$ dargestellt werden können, entspricht der Dimension von G . Unter einer *Lie-Gruppe* versteht man eine kontinuierliche Gruppe, deren Gruppenmultiplikation im Parameterraum $f(\alpha, \beta)$ eine in ihren Argumenten analytische Funktion repräsentiert. Präziser ausgedrückt, muss gewährleistet sein, dass die Operationen

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G : (g_1, g_2) \longmapsto g_1 \circ g_2 && \text{(multiplikative Verknüpfung)} && \text{und} \\ G &\longrightarrow G : g \longmapsto g^{-1} && \text{(Inversion)} && (2.2) \end{aligned}$$

unendlich oft differenzierbare Abbildungen sind. Eine Lie-Gruppe ist genau dann *kompakt*, falls der Parameterbereich beschränkt ist. Das charakteristische Merkmal einer Lie-Gruppe ist nun, dass sie sowohl die Struktur einer Gruppe (G, \circ) besitzt als auch topologisch eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit* darstellt. Dies ist dadurch möglich, dass die Gruppenverknüpfung \circ als auch die Inversion von Gruppenelementen beliebig oft differenzierbare Abbildungen auf dieser Mannigfaltigkeit sind. Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit zeichnet sich besonders dadurch aus, dass sie lokal mit einer offenen Menge des \mathbb{R}^n durch eine geeignete Anzahl von Karten (Homöomorphismen) $\varphi : U \subset \mathcal{M} \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ assoziiert werden kann. Konkret beschreiben die Karten im Falle einer Lie-Gruppe die Zuordnung $g(\alpha) \mapsto \alpha$ mit $g \in U \subset G$ und $\alpha \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Um die Supersymmetrie-Algebra zu verstehen, muss dem Namen nach der Begriff einer **Algebra** geklärt werden. Eine *Algebra* repräsentiert einen linearen Raum V über einem Körper \mathbb{K} mit einer zusätzlichen, nicht aus der Algebra herausführenden \mathbb{K} -bilinearen Verknüpfung (siehe Abb. 3). Dabei sind im Folgenden die nicht-assoziativen Algebren im Blickpunkt. Eine *Lie-Algebra* ist nun eine Algebra, in der die Lie-Klammer – der Kommutator – als bilineare Verknüpfung fungiert. Dabei erfüllt die Lie-Klammer die in Abb. 3 gegebenen Forderungen. Da die Verknüpfung $\circ = [\cdot; \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ die Geschlossenheit der Algebra gewährleisten muss, ergibt der Kommutator zweier Elemente von \mathfrak{g}

$$[X_i, X_j] = f_{ij}^k X_k \quad (2.3)$$

wieder ein Element in \mathfrak{g} mit den Basiselementen X_i , $i = 1, \dots, n$ des n -dimensionalen Vektorraumes V und den n^3 Strukturkonstanten f_{ij}^k . Dabei impliziert die Antisymmetrie der Lie-Klammer die Antisymmetrie der Strukturkonstanten in den unteren Indizes: $f_{ij}^k = -f_{ji}^k \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n$. Wie kann nun eine mathematische Verknüpfung zwischen dem Begriff einer Lie-Gruppe und dem der Lie-Algebra hergestellt werden?

Differentialgeometrisch lautet der Zusammenhang wie folgt: Der Tangentialraum $T_e G$ am neutralen Element e einer n -dimensionalen Lie-Gruppe G stellt zusammen mit der Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ eine Lie-Algebra \mathfrak{g} der Gruppe G dar. In einer Umgebung $U \subset G$ des Einselements e mit $g, e \in U$ können die Gruppenelemente in eine Taylor-Reihe um e entwickelt werden:

$$g(\alpha) = g(0) + \alpha^k \left. \frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha^k} \right|_{\alpha=0} + \mathcal{O}(\alpha^2) = e + \alpha^k X_k + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (2.4)$$

Die *lokale Struktur der Gruppe* nahe dem neutralen Element $g(0) = e$ wird somit durch die ersten Ableitungen

$$X_k \equiv \left. \frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha^k} \right|_{\alpha=0}, \quad (2.5)$$

die auch als *Generatoren* bzw. *infinitesimale Erzeugende* der Lie-Gruppe bezeichnet werden, beschrieben. Für ein gegebenes Gruppenelement $g(\alpha)$ in U kann der Weg zwischen diesem Element und e durch die mit λ parametrisierte Kurve $\alpha(\lambda) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\alpha(0) = 0$ ausgedrückt werden. Für die analoge Kurve $g(\alpha(\lambda)) = g(\lambda)$ auf $G = \mathcal{M}$ gilt dann $g(\alpha(0)) = e$ und der Tangentenvektor an e in Richtung dieser Kurve ist demnach durch

$$X = \left. \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha^k} \frac{d\alpha^k}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = X_k \dot{\alpha}^k(0) \quad (2.6)$$

gegeben. Aus (2.6) wird offensichtlich, dass die Menge der Generatoren $\{X_i\}$, mit $i = 1, \dots, n$ eine Basis des n -dimensionalen Tangentialraumes $T_e G$ bildet. Die Dimension von $T_e G$ entspricht bekanntlich der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = G$. Es kann nun gezeigt werden [32, 36], dass die infinitesimalen Erzeugenden X_i von G (mit der Lie-Klammer als Verknüpfung) eine n -dimensionale Lie-Algebra gemäß (2.3) bilden. Umgekehrt gelangt man von einer gegebenen Lie-Algebra über die *Exponentialabbildung* zur Lie-Gruppe. Dabei wird von der Darstellung der Gruppenelemente durch *Matrizen*, definiert als lineare Abbildung der Gruppenelemente $g(\alpha)$ auf einen \mathbb{K} -Vektorraum V

$$D : G \rightarrow GL(V) \text{ mit } g(\alpha) \mapsto D(g(\alpha)) \text{ und } D(g(\alpha))D(g(\beta)) = D(g(\alpha) \circ g(\beta)) \quad (2.7)$$

ausgegangen. Ein beliebiges Gruppenelement in der gewählten Darstellung ist dann gegeben durch

$$D(g(\alpha)) = e^{i\alpha X} = e^{i\alpha_i X^i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i X^i)^n}{n!} \quad \text{mit} \quad X^i \in \mathfrak{g} \quad (2.8)$$

Dies erklärt die Bezeichnung „infinitesimale Erzeugende“ bzw. „Generatoren“ der Lie-Gruppe für die Elemente $X^i \in \mathfrak{g}$.

Der erläuterte geometrische Hintergrund motiviert die anschauliche Erklärung, dass Lie-Gruppen *globale* Strukturen (Mannigfaltigkeiten) verkörpern, während die assoziierten Lie-Algebren einen *lokalen* Charakter (Elemente spannen Tangentialraum $T_e G$ am Einselement auf) besitzen. Die Exponentialabbildung (2.8) verknüpft dabei diese beiden Charakterzüge miteinander.

2.1.2 Von der Drehgruppe zur Poincaré-Gruppe

Um sich dem zentralen Objekt dieses Kapitels - der Supersymmetrie - anzunähern, werden im Folgenden aufeinander aufbauend die in Tabelle 1 gelisteten Symmetrie-Transformationen und die damit assoziierten Gruppen erläutert.

Gruppe		Transformation
<i>Orthogonale Gruppe</i>	$O(3) = \{R \in GL(3, \mathbb{R}) \mid R^T = R^{-1}\}$	$x_i \mapsto x'_i = R_{ij} x_j$
<i>Euklidische Gruppe</i>	$E(3) = \{(R, a), R \in O(3), a \in \mathbb{R}^3\}$	$x_i \mapsto x'_i = R_{ij} x_j + a_i$
<i>Lorentz-Gruppe</i>	$\mathcal{L}_{(\mathbb{R}^{1,3})} = \{\Lambda \in GL(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}$	$x^\mu \mapsto x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$
<i>Poincaré-Gruppe</i>	$\mathcal{P} = \{(\Lambda, a), \Lambda \in \mathcal{L}_{(\mathbb{R}^{1,3})}, a \in \mathbb{R}^{1,3}\}$	$x^\mu \mapsto x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$

Tabelle 1: Relevante Gruppen im Überblick.

Die *orthogonale Gruppe* $O(3)$ der Drehspiegelungen im dreidimensionalen Raum stellt als die Gruppe der Transformationen $x_i \rightarrow R_{ij} x_j$, die das Skalarprodukt $x_i x^i$ invariant lassen, eine

kompakte Lie-Gruppe dar. In der Matrix-Darstellung sind die Gruppenelemente durch die 3×3 -Matrizen R , die $R^T R = R R^T = 1$ erfüllen, gegeben. Anhängig von der Determinante von R zerfällt die Gruppe in zwei nichtzusammenhängende Anteile: Die eigentliche Drehgruppe $SO(3)$ ($\det R = +1$) und die Drehspiegelungen $O(3)/SO(3)$ ($\det R = -1$). Da unter Beachtung von $R R^T = 1$ alle Gruppenelemente durch $9 - 6 = 3$ reelle Parameter beschrieben werden können, gilt $\dim(O(3)) = 3$.

Zu der 6-dimensionalen **Euklidischen Gruppe** $E(3)$ gelangt man ausgehend von den Rotationen durch Hinzunahme von räumlichen Translationen $a \in \mathbb{R}^3$. Die $E(3)$ erhält somit Winkel und Längen bezüglich des Skalarprodukts im \mathbb{R}^3 und kann als nicht-kompakte Lie-Gruppe klassifiziert werden.

Lorentz-Transformationen sind lineare Koordinaten-Transformationen $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, die das Skalarprodukt $x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ mit $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ invariant lassen. Äquivalent zur Invarianz des Skalarproduktes ist die Forderung $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

Die Menge $\mathcal{L}_{(\mathbb{R}^{1,3})} = \{\Lambda \in GL(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}$ der Matrizen Λ bezeichnet man als die **Lorentz-Gruppe** $\mathcal{L} = O(1, 3)$. Diese nicht-kompakte Lie-Gruppe zerfällt gemäß der Zuordnung $\det \Lambda = \pm 1$ und $\Lambda^0{}_0 \geq 0$ in vier topologisch separierte Gebiete (Zusammenhangskomponenten). Physikalisch relevant sind vor allem die eigentlichen, orthochronen Lorentz-Transformationen $SO_+(1, 3)$, die eine 6-dimensionale Untergruppe von \mathcal{L} bilden. Orthochrone Lorentz-Transformationen „ $O^+(1, 3)$ “ erhalten mit $\Lambda^0{}_0 > 0$ die Richtung der Zeit, eigentliche Lorentz-Transformationen „ $SO(1, 3)$ “ mit $\det \Lambda = +1$ die Richtung im Raum. Die 6-dimensionale Lorentzgruppe \mathcal{L} lässt sich durch drei infinitesimale räumliche Rotationen J_i und drei Lorentz-Boosts K_i generieren. Die Erzeuger J_i bilden dabei eine dreidimensionale kompakte Lie-Unteralgebra – die $\mathfrak{so}(3)$ (gegeben durch den ersten Kommutator in (2.9)). Da der Parameterraum der Lorentz-Boosts unbeschränkt ist, ist \mathcal{L} nicht-kompakt. Die Generatoren J_i und K_i mit $i = 1, 2, 3$ von \mathcal{L} erzeugen die durch

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \quad (2.9)$$

bestimmte Lie-Algebra. Äquivalent erhält man mittels der Definitionen $J_k \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} M_{ij}$ und $K_i \equiv M_{0i}$ die neuen sechs antisymmetrischen Generatoren $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ mit $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ von \mathcal{L} . Diese Erzeugenden der Lorentz-Gruppe gehorchen der entsprechenden Lie-Algebra

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma}) \quad (2.10)$$

und generieren durch die Exponentialabbildung

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}} \quad (2.11)$$

die Gruppenelemente Λ von \mathcal{L} .

Die **Poincaré-Gruppe** \mathcal{P} ist definiert als Gruppe der inhomogenen, linearen Koordinaten-Transformationen auf dem Minkowski-Raum $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ (siehe Tabelle 1). Man gelangt zu ihr durch die Erweiterung der Lorentz-Transformationen um Raumzeit-Translationen $a \in \mathbb{R}^{1,3}$. Die Poincaré-Transformationen bilden mit dem semidirekten Produkt $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$(\Lambda, a)(\Lambda', a') = (\Lambda\Lambda', \Lambda a' + a) \quad (2.12)$$

eine nicht-abelsche, nicht-kompakte Lie-Gruppe. Analog zur Euklidischen Gruppe $E(3)$, die Längen und Winkel bzgl. des Skalarproduktes im \mathbb{R}^3 erhält, garantiert \mathcal{P} als affine Invarianzgruppe die Erhaltung der Längen und Winkel im Minkowski-Raum bezüglich des indefiniten Pseudo-Skalarproduktes in diesem. Die Darstellung der Poincaré-Gruppe als semidirektes Produkt der Lorentzgruppe \mathcal{L} und der Translationsgruppe des $\mathbb{R}^{1,3}$

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}_{(\mathbb{R}^{1,3})} \rtimes \mathbb{R}^{1,3} \quad (2.13)$$

impliziert $\dim(\mathcal{P}) = \dim(\mathcal{L}) + \dim(\mathbb{R}^{1,3}) = 6 + 4 = 10$. Als infinitesimale Erzeugende der Poincaré-Gruppe \mathcal{P} fungieren neben den sechs Generatoren $M^{\mu\nu}$ der Lorentz-Boosts und räumlichen Rotationen die vier Generatoren P^μ der Raumzeit-Translationen. Die Kommutatoren dieser Erzeugenden bilden die *Poincaré-Lie-Algebra*

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (2.14)$$

$$[P_\rho, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu), \quad (2.15)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}). \quad (2.16)$$

Des Weiteren erzeugen sie durch die exponentielle Abbildung

$$(\Lambda, a) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} - ia_\mu P^\mu} \quad (2.17)$$

analog zu (2.11) die Gruppenelemente $(\Lambda, a) \in \mathcal{P}$.

Nach dieser gruppentheoretischen Einführung, in der die mit bestimmten Raumzeit-Transformationen assoziierten Lie-Gruppen $O(3), E(3), \mathcal{L} = O(1,3)$ und \mathcal{P} erörtert wurden, muss noch ein weiteres wesentliches physikalisch-mathematisches Objekt eingeführt werden, um eine Brücke von klassischen Feldtheorien zu supersymmetrischen Feldtheorien zu schlagen - der *Spinor*.

2.1.3 Spinorfelder

Spinoren zeichnen sich durch ein charakteristisches Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformationen aus. Wesentlich ist die Aussage, dass verschiedene Darstellungen der Lorentzgruppe verschiedenen Typen von Feldern entsprechen. Exemplarisch seien hier

Skalarfeld:	$\phi'(x') = \phi(x)$	Tensor 0. Stufe (Skalar)
Eichpotential:	$A^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$	Tensor 1. Stufe (Vektor)
Feldstärke:	$F^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}(x)$	Tensor 2. Stufe

gegeben. Allgemein transformiert ein n -komponentiges Feld unter Lorentz-Transformationen gemäß [19]

$$\varphi'_i(x') = D(\Lambda)_i^j \varphi_j(x) \quad \text{mit} \quad \Lambda \mapsto D(\Lambda) \quad (2.18)$$

mit den $n \times n$ -Matrizen $D(\Lambda)$ in der Matrix-Darstellung. Somit ist jede Lorentz-Transformation von Feldern $\varphi_i(x)$ eine Darstellung⁶ der Lorentz-Gruppe \mathcal{L} . Die infinitesimalen Lorentz-Transformationen $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(M^{\rho\sigma})^\mu_\nu$ lauten in einer gewählten Darstellung

$$D(\Lambda)_i^j = \delta_i^j - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\Sigma^{\mu\nu})_i^j = \delta_i^j - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}D(M^{\mu\nu})_i^j. \quad (2.19)$$

Die in (2.19) auftretende Matrix $(\Sigma^{\mu\nu})_i^j$ repräsentiert eine $d \times d$ -Matrix, aufgebaut aus $n \times n$ -Matrizen als Elementen. $d = 4$ gibt die Raumzeit-Dimension wieder und n die Dimension des Vektorraumes der Felder. Sie bildet somit eine Darstellung $D(M^{\mu\nu})$ der die Lorentz-Algebra erfüllenden Generatoren $M^{\mu\nu}$ auf dem n -komponentigen Feld. Demnach erfüllen sowohl die Generatoren $M^{\mu\nu}$, als auch die $\Sigma^{\mu\nu}$ die Lie-Algebra (2.10) von \mathcal{L} . Den endlichen Lorentz-Transformationen Λ entspricht die Matrix $D(\Lambda)$ gemäß

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \longrightarrow D(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}D(M^{\mu\nu})} = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}. \quad (2.20)$$

Eine Zerlegung der sechs Generatoren $M_{\mu\nu}$ in räumliche Drehungen \vec{J} und Boosts \vec{K} führt, wie bereits in (2.9) gezeigt, auf die $\mathfrak{so}(3)$ -Lie-Algebra der Drehungen J_i . Man kann nun durch einen

⁶Präziser handelt es sich um eine Darstellung (D, V) mit V als dem n -dimensionalen Vektorraum der Felder $\vec{\varphi}(x)$.

Basiswechsel $A_i \equiv \frac{1}{2}(J_i + iK_i)$ und $B_i \equiv \frac{1}{2}(J_i - iK_i)$ mit $i = 1, 2, 3$ die Lie-Algebra von \mathcal{L} komplexifizieren. \vec{A} und \vec{B} bezeichnet man dabei als Spin-Operatoren, die den Kommutator-Relationen

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= i\epsilon_{ijk}A_k \\ [B_i, B_j] &= i\epsilon_{ijk}B_k \\ [A_j, B_j] &= 0 \quad \text{mit } i, j, k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.21)$$

– zwei kommutierenden Drehimpulsalgebren – genügen. Es liegt folglich der Isomorphismus

$$\mathfrak{so}(\mathbf{1}, \mathbf{3}) \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(\mathbf{2}, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(\mathbf{2}, \mathbb{C}) \quad (2.22)$$

vor. Damit ist jede *irreduzible Darstellung* der Lie-Algebra der eigentlichen Lorentz-Transformationen $\mathfrak{so}(\mathbf{1}, \mathbf{3})$ eindeutig durch die Paare (A, B) mit $A, B = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ bestimmt, wobei die Dimension des Darstellungsraumes $\dim(D, V) = n = (2A + 1)(2B + 1)$ ist. (2.22) zeigt, dass sich alle Transformationen der eigentlichen Lorentz-Gruppe durch komplexe 2×2 -Matrizen mit Determinante eins darstellen lassen. Die zwei $\mathfrak{sl}(\mathbf{2}, \mathbb{C})$ -Algebren sind aber nicht unabhängig voneinander, da sie durch eine Paritätstransformation ineinander überführt werden können.

Man bezeichnet die $SL(2, \mathbb{C})$ aufgrund des Isomorphismus (2.22) auch als *universelle Überlagerungsgruppe* der $SO(1, 3)$. So besitzt die $SL(2, \mathbb{C})$ die gleiche *lokale* Struktur (Lie-Algebra) wie die $SO(1, 3)$. Ihre *globalen* Topologien (Lie-Gruppen) sind jedoch verschieden. Generell ist jede Lie-Algebra die Algebra⁷ genau einer einfach zusammenhängenden Gruppe – der universellen Überlagerungsgruppe. Alle anderen nicht-zusammenhängenden Gruppen werden von dieser „überdeckt“. Jede Darstellung (A, B) von \mathcal{L} entspricht nun unterschiedlichen Feld-Typen

$$\varphi_i(x), \quad i = (a, b) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A, -A + 1, \dots, A - 1, A \\ -B, -B + 1, \dots, B - 1, B \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

mit (a, b) als den Eigenwerten von A_3 und B_3 . Als repräsentative Beispiele unterschiedlicher Darstellungen seien erwähnt:

$(A, B) = (0, 0)$	1-dim. skalare Darstellung mit Spin 0.
$(A, B) = (1/2, 0)$	2-dim. linkshändige Spinor-Darstellung mit Spin 1/2.
$(A, B) = (0, 1/2)$	2-dim. rechtshändige Spinor-Darstellung mit Spin 1/2.
$(A, B) = (1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$	4-dim. Bispinor-Darstellung mit Spin 1/2.
$(A, B) = (1/2, 0) \otimes (0, 1/2) = (1/2, 1/2)$	4-dim. Vektor-Darstellung mit Spin 1.

Die zweikomponentigen Spinoren, die gemäß der $(\frac{1}{2}, 0)$ - bzw. $(0, \frac{1}{2})$ -Darstellung transformieren, werden auch *linkshändige* bzw. *rechtshändige Weyl-Spinoren* genannt. Diese transformieren folglich unter der einen $SL(2, \mathbb{C})$ -Subgruppe trivial und unter der anderen gemäß der Spin-1/2-Darstellung. Für den Fall $(A, B) = (1/2, 0)$ handelt es sich um ein zweikomponentiges Spinorfeld, das mit χ_j , $j = 1, 2$ bezeichnet werde. Als mögliche Darstellungen von A und B folgen $D(\vec{A}) = \vec{\sigma}/2$, $D(\vec{B}) = 0$ und somit $D(\vec{J}) = \vec{\sigma}/2$ bzw. $D(\vec{K}) = -i\vec{\sigma}/2$. Mit $\omega_{i0} = \vec{\omega}$ und $(\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}) = -\vec{\Theta}$ lautet die Exponentialabbildung der endlichen Lorentz-Transformationen

$$\Lambda = e^{i\vec{\Theta} \cdot \vec{J} + i\vec{\omega} \cdot \vec{K}} \quad (2.24)$$

bzw. die Matrix-Darstellung $D(\Lambda)$ von \mathcal{L} auf dem zwei-komponentigen Spin-1/2-Feld der Form $(1/2, 0)$

$$D(\Lambda)^{(\frac{1}{2}, 0)} \equiv S_i^j = \left(e^{\frac{i}{2}\vec{\Theta} \cdot \vec{\sigma} + \frac{i}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}} \right)_i^j. \quad (2.25)$$

Unter Lorentz-Transformationen transformiert das Spinorfeld folglich gemäß

$$\chi'_j(x') = S_j^k \chi_k(x) \quad (2.26)$$

⁷abgesehen von Isomorphismen

mit $S_i^j \in SL(2, \mathbb{C})$. Es zeigt sich nun, dass der komplex konjugierte Spinor von χ_k , hier mit $(\chi_k)^* \equiv \bar{\chi}_k$, $k = 1, 2$ bezeichnet, bzgl. der $(0, 1/2)$ -Darstellung transformiert. Dieser rechtshändige Weyl-Spinor verhält sich unter Lorentz-Transformationen wie

$$\bar{\chi}'_k(x') = S_k^*{}^i \bar{\chi}_i(x) = \left(e^{-\frac{i}{2} \vec{\Theta} \cdot \vec{\sigma}^* + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}^*} \right)_k^i \bar{\chi}_i(x) \quad (2.27)$$

mit $D(\Lambda)^{(0, \frac{1}{2})} = (S_k^l)^* \equiv S_k^*{}^l$. Mit $(S_k^l)^*$ aus (2.27) lautet die Darstellung der \vec{A} - und \vec{B} -Spin-Matrizen $D(\vec{A}) = 0$ und $D(\vec{B}) = -\vec{\sigma}^*/2$. Relevant ist weiterhin die Frage nach dem Transformationsverhalten der Weyl-Spinoren unter Raumspiegelungen. Für eine Paritätstransformation P gilt

$$P : \vec{J} \rightarrow \vec{J} \quad \text{und} \quad \vec{K} \rightarrow -\vec{K} \quad \implies \quad \vec{A} \rightarrow \vec{B} \quad \text{und} \quad \vec{B} \rightarrow \vec{A}. \quad (2.28)$$

Demnach überführt die Paritätstransformation linkshändige in rechtshändige Weyl-Spinoren und umgekehrt: $\chi \rightarrow \bar{\chi}$ und $\bar{\chi} \rightarrow \chi$ mit $\chi \in (\frac{1}{2}, 0)$ und $\bar{\chi} \in (0, \frac{1}{2})$. Dies bedeutet, dass die Weyl-Spinoren keine Paritätseigenzustände repräsentieren und die Paritätstransformation aus dem entsprechenden Darstellungsraum heraus führt, d. h. nicht definiert ist⁸. Betrachtet man nun Theorien, die invariant unter Paritätstransformationen sind, so ist die Verwendung von Weyl-Spinoren adäquat. Ist die Theorie paritätsverletzend, so geht man von den irreduziblen Darstellungen der Weyl-Spinoren zu den reduziblen Darstellungen der *Dirac-Spinoren* Ψ über. Letztere genügen der Darstellung

$$(A, B) \oplus (B, A) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{2}, B = 0, \quad (2.29)$$

wobei der Darstellungsraum dieses Spinors $\dim(D, V) = 2 \cdot (2A + 1) = 4$ -dimensional ist. Dirac-Spinoren weisen mit (2.29) nachstehendes Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformationen

$$\Psi(x) \equiv \begin{pmatrix} \chi_k \\ \bar{\eta}^i \end{pmatrix} \longrightarrow \Psi'(x') = \begin{pmatrix} D(\Lambda)^{(\frac{1}{2}, 0)} & 0 \\ 0 & D(\Lambda)^{(0, \frac{1}{2})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_k \\ \bar{\eta}^i \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

mit den Weyl-Spinoren $\chi \in (\frac{1}{2}, 0)$ und $\bar{\eta} \in (0, \frac{1}{2})$ sowie den Darstellungsmatrizen (2.25) und (2.27) auf. Für diesen Bispinor ist somit per Konstruktion die Paritätsoperation P definiert durch

$$P : \Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \longrightarrow P\Psi = \begin{pmatrix} \bar{\eta} \\ \chi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Einen Dirac-Spinor Ψ , für den die Zusatzbedingung $\chi = \eta$ erfüllt ist, bezeichnet man als *Majorana-Spinor*⁹.

Interessant ist nun die Frage, ob man für den allgemeinen Fall einer Theorie in ***d Raumzeitdimensionen*** und einer Darstellung $D(M^{\mu\nu})_i^j = (\Sigma^{\mu\nu})_i^j$ der Lorentzgruppe \mathcal{L} auf einem n -komponentigen *Dirac-Spinor-Feld*, Darstellungen der Generatoren $M_{\mu\nu}$ der Lorentz-Algebra (2.10) angeben kann. Dies ist in der Tat möglich. Zunächst werde mit k die Anzahl der zeitlichen und mit l die Anzahl der räumlichen Richtungen bezeichnet und es gilt $d = k + l$. Aus den d Generatoren einer 2^d -dimensionalen *Clifford Algebra* (siehe auch Abb.1)

$$\text{Clifford-Algebra } \mathbf{c}_{k,1} : \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_{n \times n}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, d-1 \quad (2.32)$$

können nun die Generatoren der $\mathfrak{so}(k, 1)$ -Lie-Algebra konstruiert werden. Die Generatoren der $\mathbf{c}_{k,1}$ bezeichnet man als **Gamma-Matrizen**. In dem konkreten Fall der $d=4$ -dimensionalen Minkowski-Raumzeit können die Erzeugenden der $\mathfrak{so}(1, 3)$ -Lie-Algebra gemäß

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad (2.33)$$

⁸Allgemein ist für eine Darstellung $D(\Lambda)^{(A,B)}$ eine Paritätsoperation definiert $\Leftrightarrow A = B$.

⁹siehe auch unter *Konventionen in $\mathbb{R}^{1,2}$* am Ende dieses Abschnitts.

gebildet werden. Mit der Algebra (2.32) für die γ^μ ist automatisch gewährleistet, dass die Generatoren $\Sigma^{\mu\nu}$ (2.33) die Lorentz-Algebra (2.10) erfüllen und somit eine n -dimensionale Darstellung selbiger sind. Die Spinordarstellung $\Sigma^{\mu\nu}$ der Lorentz-Gruppe wird nun bestimmt durch die irreduziblen Matrix-Darstellungen der Clifford-Algebra (2.32). Die Elemente des Darstellungsraumes sind die Dirac-Spinoren und dessen Dimension n entspricht der Anzahl der Spinorkomponenten. Für $d = (k + l)$ Raumzeit-Dimensionen sind die irreduziblen Darstellungen von $\mathbf{c}_{k,l}$ $n \times n$ -Matrizen mit $n = 2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$. Bemerkt werden sollte, dass unendlich viele äquivalente und ebenfalls (2.32) erfüllende Darstellungen, gegeben durch $\tilde{\gamma}^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}$ mit der invertierbaren Matrix S , existieren.

Im letzten Teil dieses Abschnittes soll das Dirac-Spinorfeld und die diesbezüglich in dieser Arbeit verwendeten **Konventionen** speziell für die $d = 3$ -dimensionale Minkowski-Raumzeit $\mathbb{R}^{1,2}$ eingeführt werden.

Konventionen in $\mathbb{R}^{1,2}$

Die eigentliche Lorentz-Gruppe $SO(1, 2)$ der Lorentz-Transformationen der dreidimensionalen Minkowski-Raumzeit wird durch $9 - 6 = 3$ Erzeugende generiert. Die Clifford Algebra in $d = 1 + 2$ Raumzeitdimensionen entspricht (2.32) mit $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ und $\mu, \nu = 0, 1, 2$. Als irreduzible $n \times n$ -Matrixdarstellungen der Clifford-Algebra mit $n = 2^{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} = 2$ stellen diese hier ebenso wie in zwei Dimensionen 2×2 -Matrizen dar. Es wird im Folgenden die Darstellung

$$\gamma^\mu = (\sigma_2, i\sigma_3, i\sigma_1) \quad \text{mit} \quad \mu = 0, 1, 2 \quad (2.34)$$

gewählt. Das Spinor-Feld $\Psi = (\chi_1, \bar{\eta}^1)^T \equiv (\chi, \bar{\eta})^T$ transformiert unter Lorentz-Transformationen wie $\Psi'(x') = S\Psi(x)$ mit

$$S_i^j = \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \right)_i^j = \left(e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_2 + \frac{1}{2}(\omega_{10}\sigma_1 - \omega_{20}\sigma_3)} \right)_i^j \quad (2.35)$$

mit $\theta = -\omega_{12}$ und $i, j = 1, 2$. Weiterhin kann das Dirac-konjugierte Spinorfeld $\bar{\Psi}(x) \equiv \Psi^\dagger A$, dessen Transformationsverhalten durch $\bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x)S^{-1}$ gegeben sein soll, eingeführt werden. Hierzu konstruiere man die $A^\dagger = A$ bzw. $A^* = A^T$ erfüllende hermitesche Matrix¹⁰

$$A = \gamma_0 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\Psi}(x) = (i\bar{\eta}^*, -i\chi^*). \quad (2.36)$$

Mit den aus (2.36) folgenden Relationen $A[\gamma^\mu, \gamma^\nu]A^{-1} = -[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger$ folgt $A^{-1}S^\dagger A = S^{-1}$ und es resultiert das angestrebte Transformationsverhalten des Dirac-konjugierten Spinors

$$\bar{\Psi}'(x') = (S\Psi(x))^\dagger A = \Psi^\dagger(x)S^\dagger A = \bar{\Psi}(x)S^{-1}. \quad (2.37)$$

Weiterhin kann das ladungskonjugierte Spinorfeld Ψ_C , dass ein Fermion mit identischer (reeller) Masse, aber entgegengesetzter Ladung repräsentiert, eingeführt werden. Der Zusammenhang zwischen Ψ und Ψ_C ergibt sich durch den Vergleich der entsprechenden Dirac-Gleichungen mit den Parametern $(m, +e)$ für Ψ und $(m, -e)$ für Ψ_C :

$$\begin{aligned} 0 &= (i\gamma^\nu(\partial_\nu - ieA_\nu) - m)\Psi = (i(A\gamma^\nu A^{-1})(\partial_\nu - ieA_\nu) - m)A\Psi \\ &= (-i(\gamma^\nu)^T(\partial_\nu + ieA_\nu) - m)(A\Psi)^* \\ &= (-iC(\gamma^\nu)^T C^{-1}(\partial_\nu + ieA_\nu) - m)C(A\Psi)^* \\ &= (i\gamma^\nu(\partial_\nu + ieA_\nu) - m)\Psi_C. \end{aligned} \quad (2.38)$$

¹⁰ Allgemein wird die unitäre Matrix A durch $A = \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{t-1}$ mit t als der Anzahl der zeitartigen Dimensionen eingeführt. Diese Matrix genügt den Bedingungen $A^\dagger = (-)^{t(t-1)/2} A$ bzw. $A^* = (-)^{t(t-1)/2} A^T$. Siehe auch [33], Kapitel 3.

Hieraus kann die Forderung

$$\Psi_C = C(A\Psi)^* = C\bar{\Psi}^T \quad \text{mit} \quad (\gamma^\nu)^T = -C^{-1}\gamma^\nu C \quad (2.39)$$

abgelesen werden, wobei C die *Ladungskonjugationsmatrix* bezeichnet. Die Wahl $C = -\sigma_2 = -\gamma^0$ genügt dabei der rechten Bedingung in (2.39). Das Spinorfeld Ψ soll zusätzlich die Eigenschaft der *Invarianz unter Ladungskonjugation* aufweisen. Mathematisch entspricht dies der Invarianz des Spinorfeldes unter der Transformation

$$\Psi \longrightarrow \Psi_C = C\bar{\Psi}^T \stackrel{!}{=} \Psi \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^* \\ \bar{\eta}^* \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Die mathematische Forderung $\Psi = \Psi_C$ beschreibt physikalisch Fermionen, die gleich ihren eigenen Antiteilchen und deshalb ladungslos sind. Diese speziellen Spinorfelder tragen auch den Namen „*Majorana-Spinoren*“. Für die hier gewählten Konventionen entspricht der ladungskonjugierte Spinor gemäß (2.40) dem komplex-konjugierten Spinor $\Psi_C = C\bar{\Psi}^T = \Psi^*$ und die Majorana-Bedingung impliziert

$$\Psi = \Psi_C = \Psi^* \quad \Longrightarrow \quad \Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = (i\bar{\eta}, \quad -i\chi) \quad (2.41)$$

und somit $\chi, \bar{\eta} \in \mathbb{R}$. Für konkrete Rechnungen sind besonders die Symmetrie-Relationen

$$\bar{\Psi}\zeta = \bar{\zeta}\Psi \quad \text{und} \quad \bar{\Psi}\gamma^\mu\zeta = -\bar{\zeta}\gamma^\mu\Psi \quad \text{sowie die Fierz-Identität} \quad \Psi_k\bar{\Psi}_l = -\frac{1}{2}(\bar{\Psi}\Psi)\mathbf{1}_{kl} \quad (2.42)$$

mit den Majorana-Spinoren Ψ und ζ von Relevanz.

2.1.4 Die Super-Poincaré-Algebra

Wie in Abschnitt 1 erörtert wurde, existieren nur triviale Erweiterungen der Poincaré-Gruppe \mathcal{P} zu einer *Lie-Gruppe* \mathcal{G} , die dem direkten Produkt $\mathcal{G} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{T}$ von Poincaré-Gruppe \mathcal{P} und interner Symmetrie-Gruppe \mathcal{T} entsprechen [22]. D. h. die einzig mögliche erweiterte Lie-Algebra besteht aus den Generatoren P_μ , $M_{\mu\nu}$ und I_k der Translationen, homogenen Lorentz-Transformationen und der inneren Symmetrie-Gruppe.

$$[P_\mu, I_k] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, I_k] = 0, \quad \text{und} \quad [I_k, I_l] = ic_{kl}{}^m I_m. \quad (2.43)$$

Die endlich vielen Erzeugenden I_k der inneren Symmetrie-Gruppe kommutieren dabei mit den P_μ und den $M_{\mu\nu}$ und erfüllen die Lie-Algebra (2.43). Sie wirken auf physikalische Zustände als Multiplikation mit spin- und impulsunabhängigen hermiteschen Matrizen. Demnach besitzen alle Teilchen des irreduziblen Multipletts der internen Symmetrie-Gruppe die gleiche Masse und den gleichen Spin. Wie in Abschnitt 2.1.3 diskutiert wurde, transformieren die Felder einer physikalischen Theorie in einer bestimmten Darstellung der Symmetrie-Gruppe. Ebenso transformieren die Generatoren der Symmetrie-Gruppe in einer spezifischen Darstellung der Gruppe. Fragt man nach dem Transformationsverhalten der Erzeugenden von \mathcal{G} , so transformieren die P_μ in der $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -Vektordarstellung, $M_{\mu\nu}$ als antisymmetrischer Tensor 2. Stufe in der $(1, 0) \oplus (0, 1)$ -Darstellung und die I_k in der skalaren $(0, 0)$ -Darstellung.

Durch die Betrachtung der $SL(2, \mathbb{C})$ als der universellen Überlagerungsgruppe von \mathcal{L} wurden die Spinorfelder eingeführt, die z. B. in der $(\frac{1}{2}, 0)$ - oder $(0, \frac{1}{2})$ -Darstellung transformieren und Antivertauschungsregeln genügen. Die Einbeziehung von *fermionischen Generatoren*, die gemäß dieser Spinor-Darstellungen transformieren, bildet den fundamentalen Schritt zur Konstruktion einer **Super-Poincaré-Algebra**. Zunächst werden *zusätzlich* zu den 10 Erzeugenden der Poincaré-Gruppe \mathcal{N} fermionische Generatorpaare Q_k^I, \bar{Q}^{Ik} mit $k = 1, \dots, n$ und $I = 1, \dots, \mathcal{N}$, die

gemäß der $(\frac{1}{2}, 0)$ - bzw. $(0, \frac{1}{2})$ -Spinordarstellung transformieren, eingeführt¹¹. Es werde im Folgenden speziell der Fall von $\mathcal{N} = 4$ fermionischen Erzeugenden und $d = 4$ Raumzeit-Dimensionen betrachtet. Die Einbindung dieser fermionischen Erzeugenden entspricht einer *nichttrivialen Erweiterung* der Poincaré-Symmetrie, die jetzt Transformationen zwischen Teilchen unterschiedlichen Spins enthält. Dies ist möglich durch die Nichterfüllung der Voraussetzung „ \mathcal{G} sei eine Lie-Gruppe“ des Coleman-Mandula-Theorems dadurch, dass die Supersymmetrie-Algebra keine gewöhnliche, sondern eine \mathbb{Z}_2 -graduierte Lie-Algebra repräsentiert.

Wodurch ist nun eine \mathbb{Z}_2 -graduierte Algebra¹² gekennzeichnet? Sie besteht wie eine Algebra aus einem Vektorraum \mathfrak{g} über einem Körper \mathbb{K} mit einer bilinearen Verknüpfung $\circ : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ mit der zusätzlichen Forderung, dass \mathfrak{g} die direkte Summe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ zweier¹³ Unter-Vektorräume \mathfrak{g}_0 und \mathfrak{g}_1 ist mit den Eigenschaften

$$x_0 \circ y_0 \in \mathfrak{g}_0, \quad x_0 \circ x_1 \in \mathfrak{g}_1, \quad \text{und} \quad x_1 \circ y_1 \in \mathfrak{g}_0 \quad \forall x_0, y_0 \in \mathfrak{g}_0, \forall x_1, y_1 \in \mathfrak{g}_1. \quad (2.44)$$

Die Verknüpfung \circ zusammen mit (2.44) bezeichnet man als *Graduierung*. Aus (2.44) resultiert sofort, dass \mathfrak{g}_1 selbst keine Algebra darstellen kann, da die bilineare Verknüpfung $x_1 \circ y_1 \in \mathfrak{g}_0$ die Forderung der Abgeschlossenheit nicht erfüllt. Um eine *graduierte Lie-Algebra* zu konstruieren, benötigt man zusätzlich zu (2.44) nachstehende Annahmen für die Verknüpfung \circ (Vgl. auch Abb. 3, Def. einer Lie-Algebra \mathfrak{g})

$$[1] \text{ Super-Antisymmetrie: } x_i \circ y_j = -(-1)^{i \cdot j} y_j \circ x_i \quad (2.45)$$

$$[2] \text{ Super-Jacobi-Identität: } (-1)^{k \cdot m} x_k \circ (y_l \circ z_m) + (-1)^{l \cdot k} y_l \circ (z_m \circ x_k) \\ + (-1)^{m \cdot l} z_m \circ (x_k \circ y_l) = 0, \quad (2.46)$$

wobei $x_i, y_i, z_i \in \mathfrak{g}_i$, $i = 0, 1$ gilt. Die Bedingungen (2.45) und (2.46) werden erfüllt, falls für die Verknüpfung $x_0 \circ y_0$ der Elemente in \mathfrak{g}_0 bzw. $x_0 \circ x_1$ von Elementen aus \mathfrak{g}_0 und \mathfrak{g}_1 der *Kommutator* $[\cdot, \cdot]$ und für die Verknüpfung $x_1 \circ y_1$ von Elementen aus \mathfrak{g}_1 der *Antikommutator* $\{\cdot, \cdot\}$ gewählt wird. D. h. \mathfrak{g}_0 wird aus den 10 bosonischen Generatoren P_μ , $M_{\mu\nu}$ der Poincaré-Gruppe und \mathfrak{g}_1 aus den $2\mathcal{N}$ fermionischen Erzeugenden Q_k^I , \bar{Q}^{Ik} der Lorentz-Gruppe generiert. Um zu einer strukturell einfachen Variante der Super-Poincaré-Algebra zu gelangen, werden die Weyl-Spinoren Q_k^I , \bar{Q}^{Ik} zu vierkomponentigen Majorana-Spinoren durch $Q^I = (Q_k^I, \bar{Q}^{Ik})^T$ mit $I = 1, \dots, \mathcal{N} = 4$ zusammengefasst. Die zu bestimmende Algebra wird nun wie folgt konstruiert:

(1) Die möglichen Kommutatoren der Erzeugenden P_μ und $M_{\mu\nu}$ aus \mathfrak{g}_0 : $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_0$ entsprechen exakt der Poincaré-Algebra (2.14)-(2.16).

(2) Für die Verknüpfungen $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_1$ zwischen bosonischen und fermionischen Generatoren sind die Kommutatoren $[P_\mu, Q_I] = (C_\mu)_I^J Q_J$ und $[M_{\mu\nu}, Q_I] = (\tilde{C}_{\mu\nu})_I^J Q_J$ mit den Strukturkonstanten $(C_\mu)_I^J$ und $(\tilde{C}_{\mu\nu})_I^J$ zu bestimmen. Es kann allgemein gezeigt werden, dass diese Strukturkonstanten $N \times N$ -Matrix-Darstellungen der entsprechenden Generatoren aus \mathfrak{g}_0 sind. Für die Generatoren $M_{\mu\nu}$ der Lorentz-Transformationen sind dies die in (2.33) eingeführten Matrizen $\Sigma_{\mu\nu}$. Die Translationen betreffend werde die triviale Darstellung gewählt:

$$[P_\mu, Q_I] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, Q_I] = (\Sigma_{\mu\nu})_I^J Q_J. \quad (2.47)$$

(3) Die letzte Verknüpfung der Untervektorräume \mathfrak{g}_0 und \mathfrak{g}_1 bildet der Antikommutator als Lie-Klammer: $\{\cdot, \cdot\} : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_0$. Unter Annahme des allgemeinen Ansatzes $\{Q_I, Q_J\} = A_{IJ}^\mu P_\mu + B_{IJ}^{\mu\nu} M_{\mu\nu}$ mit den Strukturkonstanten A_{IJ}^μ und $B_{IJ}^{\mu\nu}$, lässt sich zeigen¹⁴, dass $\{Q_I, Q_J\} = -2(\gamma^\mu C)_{IJ} P_\mu$ und mit $\bar{Q} = Q^T C$

$$\{Q_I, \bar{Q}_J\} = 2(\gamma^\mu)_{IJ} P_\mu \quad (2.48)$$

¹¹Es gilt $n = 2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$, siehe Abschnitt 2.1.3

¹²Zur Definition von „Algebra“ siehe Abb. 3

¹³Allgemein: \mathfrak{g} ist die direkte Summe von n Unter-Vektorräumen für eine \mathbb{Z}_n -graduierte Algebra.

¹⁴siehe [25], S. 340 und 341

gilt¹⁵. Resümierend lautet eine mögliche Darstellung der Super-Poincaré-Algebra in der Minkowski-Raumzeit $\mathbb{R}^{1,3}$, formuliert mit den 10 bosonischen Generatoren der Poincaré-Algebra $P_\mu, M_{\mu\nu}$ und den vier Majorana-Spinoren Q_I als fermionischen Generatoren

Super-Poincaré-Algebra:

Poincaré-Algebra (2.14)-(2.16),

$$[P_\mu, Q_I] = 0,$$

$$[M_{\mu\nu}, Q_I] = (\Sigma_{\mu\nu})_I^J Q_J,$$

$$\{Q_I, \bar{Q}_J\} = 2(\gamma^\mu)_{IJ} P_\mu, \quad I, J = 1, \dots, 4 \text{ und } \mu, \nu = 0, \dots, 3. \quad (2.49)$$

Eine supersymmetrische Theorie, die obiger Form (2.49) der Superalgebra genügt, kann natürlich noch um endlich viele Erzeugende einer inneren Symmetrie-Gruppe¹⁶ erweitert werden.

Abschließend wird nun die Poincaré-Superalgebra für die Einschränkung auf den in den folgenden Kapiteln relevanten Fall einer $d = 3$ dimensionalen Minkowski-Raumzeit formuliert. Hier geht die Supersymmetrie-Algebra (2.49) unter Beachtung der gewählten Konventionen (2.34) für die Gamma-Matrizen in

$$[P_\mu, Q] = 0, \quad \{Q, \bar{Q}\} = 2\mathbb{1},$$

$$[M_{10}, Q] = \frac{i}{2}\sigma_1 Q, \quad [M_{20}, Q] = -\frac{i}{2}\sigma_3 Q, \quad [M_{12}, Q] = \frac{1}{2}\sigma_2 Q, \quad \text{mit } \mu = 0, 1, 2 \quad (2.50)$$

über.

2.2 Das Superraumkonzept

Analog zu der manifest Lorentz-kovarianten Formulierung relativistischer Theorien verkörpert der Superraumformalismus ein Konzept zur Beschreibung supersymmetrischer Theorien, die in diesem Superraum per Konstruktion manifest supersymmetrisch sind. Wie in Kapitel 1 bereits erwähnt wurde, werden die gewöhnlichen d Raumzeitdimensionen $x = (x^1, \dots, x^d)$ dabei um p reelle fermionische Grassmann-Koordinaten $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^p)$ ergänzt. Die Gesamtheit dieser Koordinaten bezeichnet man als reellen Superraum $\mathbb{R}^{d|p}$ (siehe Abb. 4). Mathematisch stellt

$x \in \mathbb{R}^d \quad \implies \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^{d p}$	Superraum
$\phi : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \phi(x) \in \mathbb{R} \quad \implies \quad \Phi : (x, \theta) \in \mathbb{R}^{d p} \mapsto \Phi(x, \theta) \in \mathbb{R}$	Superfeld

Abbildung 4: Der Übergang von *skalaren* zu *supersymmetrischen* Feldtheorien.

dieser einen \mathbb{Z}_2 -graduerten Vektorraum, bestehend aus dem geraden Untervektorraum \mathbb{R}^d sowie dem ungeraden Untervektorraum \mathbb{R}^p , dar. Diese Struktur entspricht exakt derjenigen einer \mathbb{Z}_2 -graduerten Algebra gemäß (2.44)-(2.46), wenn man die Lie-Klammer als bilineare Verknüpfung mit einschließt. So formen die Superraum-Koordinaten (x, θ) eine abelsche¹⁷ Lie-Superalgebra mit dem Kommutator als Verknüpfung zwischen zwei bosonischen bzw. einer bosonischen und einer Grassmann-Koordinate und dem Antikommutator zwischen zwei Grassmann-Koordinaten. Die n fermionischen und somit antikommutierenden Grassmann-Variablen genügen der reellen **Grassmann-Algebra**

$$\{\theta^i, \theta^j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.51)$$

¹⁵Bem. zu (2.48): Der Vorfaktor zwei ist rein konventionell eingeführt.

¹⁶Innere Symmetrien zeichnen sich durch ihre koordinatenunabhängige Darstellung aus: $\phi'_i(x') = (D(g))_i^j \phi_j(x)$ mit $g \in G$.

¹⁷Die Eigenschaft „abelsch“ bedingt das Verschwinden aller Lie-Klammern zwischen Elementen des Superraumes.

Diese Algebra bedingt den antikommutativen Charakter der fermionischen Variablen $\theta^1\theta^2 = -\theta^2\theta^1$. Auf Ebene der Quantenfelder geht das reelle Skalarfeld $\phi(x)$ so formal in das reelle bosonische Superfeld $\Phi(x, \theta)$ über. Das reelle Superfeld verkörpert eine Superfunktion [25], die in Potenzen von Grassmann-Variablen gemäß

$$\Phi(x, \theta) = A(x) + B_a(x)\theta^a + \dots + \frac{1}{(n-1)!} D^{a_n}(x) \epsilon_{a_1 \dots a_n} \theta^{a_1} \dots \theta^{a_{n-1}} + E(x)\theta^1 \dots \theta^n \quad (2.52)$$

entwickelt werden kann¹⁸. Die Koeffizienten in der Entwicklung in θ repräsentieren lokale Felder über der Minkowski-Raumzeit und werden auch *Komponentenfelder* genannt. Da das Superfeld ein Lorentzskalar darstellt, müssen die Entwicklungskoeffizienten von geraden Potenzen der Grassmann-Zahlen bosonisch und die von einer ungeraden Potenz fermionisch sein. Generell zeigt (2.52), dass das k -te Komponentenfeld $\binom{d}{k-1}$ reelle Freiheitsgrade besitzt, sodass Φ für $n \geq 1$ gleich viele fermionische wie bosonische Freiheitsgrade aufweist.

Fortführende, den Superraumformalismus betreffende Details werden anhand des linearen supersymmetrischen Sigma-Modells im folgenden Kapitel 2.3 erläutert.

2.3 Das $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische lineare $O(N)$ -Sigma-Modell in $d = 3$

Inhalt dieses Abschnittes ist das $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische $O(N)$ -Modell in $\mathbb{R}^{1,2}$. Diese Klasse von Theorien wurde bereits in (1.5) in ihrer euklidischen Formulierung eingeführt. Von besonderer Relevanz sind die Symmetrien des Modells. Zum einen weist die Wirkung des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells Invarianz unter den kontinuierlichen *Supersymmetrie-Transformationen* auf. Die entsprechenden Generatoren P_μ und $M_{\mu\nu}$ der dreidimensionalen Minkowski-Raumzeit sowie das fermionische Generatorpaar \bar{Q}, Q ($\mathcal{N} = 1$) werden somit der in (2.50) vorgestellten Super-Poincaré-Algebra genügen. Des Weiteren zeigt die Wirkung Invarianz gegenüber *orthogonalen Transformationen* (siehe auch (1.6)), die das Skalarprodukt der N Superfelder $\Phi^i \Phi_i$ invariant lassen. Da die Matrix-Darstellungen der Gruppe nicht von den Raumzeit-Koordinaten abhängen, handelt es sich um eine innere Symmetrie. Des Weiteren können in $d = 3$ euklidischen Dimensionen keine Majorana-Spinoren konstruiert werden ([33], Kapitel 3). Demnach müssen die in Kapitel 4.1 folgenden Rechnungen im Kontext der Herleitung der Flussgleichung in der Minkowski-Raumzeit mit $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ durchgeführt werden. Die so ermittelte Flussgleichung kann dann durch Wickrotation des Impulses ins Euklidische überführt werden.

Untersucht werden soll demnach das supersymmetrische $O(N)$ -Modell in der dreidimensionalen Minkowski-Raumzeit. Der $\mathbb{R}^{3|2}$ -Superraum wird aufgespannt durch die reellen Koordinaten (x, θ) mit den drei Raumzeit-Koordinaten $x = (x^0, x^1, x^2)$ sowie den zwei¹⁹ Grassmann-Zahlen $\theta = (\theta^1, \theta^2)$. Wie bereits in Kapitel 1 diskutiert wurde, bildet das Superfeld nun eine differenzierbare Karte $\Phi : \mathbb{R}^{3|2} \rightarrow \mathbb{R}^N$ als Bijektion von dem Superraum $\mathbb{R}^{3|2}$ auf die (flache) N -dimensionale Zielmannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \mathbb{R}^N$. Im Folgenden werden mit $\{\Phi^i\}$, $i = 1, \dots, N$ die gewählten *Koordinaten* auf der Zielmannigfaltigkeit \mathbb{R}^N bezeichnet. Diese können zu einem N -komponentigen *Vektor-Superfeld* $\vec{\Phi}$, aufgebaut aus den N skalaren Superfeldern Φ^i , zusammengefasst werden. Konkret lautet eine Komponente des durch die Taylorentwicklung in θ dargestellten Vektor-Superfeldes $\vec{\Phi}$ gemäß (2.52)

$$\Phi^i(x, \theta) = n^i(x) + \bar{\theta} \Psi^i(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta F^i(x). \quad (2.53)$$

In dieser Formulierung wurden die fermionischen Variablen θ^1 und θ^2 durch die Bezeichnungen $\theta = (\theta^1, \theta^2)^T$ und $\bar{\theta} = (i\theta^2, -i\theta^1)$ zu (konstanten) *Majorana-Spinoren* entsprechend der Darstellung (2.41) zusammengefasst. Die reellen Komponentenfelder umfassen N Skalarfelder

¹⁸ $\epsilon_{a_1 \dots a_k}$ bezeichnet das Levi-Civita-Symbol.

¹⁹ Die Anzahl der Grassmann-Variablen entspricht der Zahl der fermionischen Generatoren. Diese ist durch $2\mathcal{N} = 2$ gegeben.

$n^i(x)$, Pseudoskalarfelder $F^i(x)$ sowie Majorana-Spinorfelder $\Psi^i(x)$ (Darstellung siehe (2.41)). Das durch (2.53) gegebene Superfeld ist ebenso wie die Komponentfelder *reell*:

$$\Phi^{i*}(x, \theta) = n^i + (i\theta^2\chi - i\theta^1\bar{\eta})^* + \frac{1}{2} (2i\theta^2\theta^1)^* F^i = \Phi^i(x, \theta), \quad (2.54)$$

wobei benutzt wurde, dass die komplexe Konjugation von Grassmann-Zahlen $(\theta^p\theta^q)^* = \theta^q\theta^p$ der hermiteschen Konjugation von Matrizen entspricht ([25], Kapitel 4.1.3).

Dieses $O(N)$ -Modell mit einer Supersymmetrie entspricht formal der N -fachen Kopie des *Wess-Zumino-Modells* in $d = 3$ Raumzeitdimensionen [16]. Die aus (2.53) zu konstruierende Wirkung wird die Wechselwirkungen von jeweils N *ungeladenen* Majorana-Fermionen Ψ^i mit Spin $1/2$ sowie den pseudoskalaren Teilchen F^i und skalaren Teilchen n^i mit Spin Null untereinander beschreiben. Erhaltene Supersymmetrie bedingt dabei identische Massen aller Teilchen sowie die gleiche Anzahl von je $2N$ Freiheitsgraden für den bosonischen (n^i, F^i) und den fermionischen (Ψ^i) Sektor. Die *Wechselwirkung* besteht – wie aus der Lagrangedichte hervorgehen wird – zum einen aus einer Selbstkopplung zwischen Bosonen untereinander und zum anderen aus dem die Wechselwirkung zwischen den Skalarfeldern n^i und den Spinorfeldern Ψ^i beschreibenden Yukawa-Term. Für die Majorana-Spinoren gelten die in Abschnitt 2.1.3 erläuterten Konventionen.

Nun werde die globale Supersymmetrie-Transformation

$$(x^\mu, \theta) \longrightarrow (x^{\mu'}, \theta') = (x^\mu + i\bar{\theta}\gamma^\mu\epsilon, \theta + \epsilon) \quad (2.55)$$

mit dem konstanten, fermionischen Transformationsparameter $\bar{\epsilon}$ betrachtet²⁰. Diese globale Transformation auf Ebene der Raumzeitkoordinaten überträgt sich auf die Ebene der Superfelder mit $\Phi^i(x) \rightarrow \Phi^i(x) + \delta_\epsilon\Phi^i(x)$. Mittels der Identifizierung $\delta_\epsilon \equiv i\bar{\epsilon}\mathcal{Q}$ wird der **Supersymmetrie-Generator** \mathcal{Q} definiert, der zusammen mit den Generatoren der Poincaré-Gruppe die Super-Poincaré-Algebra gemäß (2.49) bzw. (2.50) erfüllt. Konkret bedingt (2.55)²¹

$$\delta_\epsilon\Phi^i(x, \theta) = \delta x^\mu \frac{\partial\Phi^i}{\partial x^\mu} + \delta\theta \frac{\partial^L\Phi^i}{\partial\theta} = (\bar{\epsilon}\Psi^i) + \bar{\theta}(F^i + i\bar{\theta}n^i)\epsilon + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta(\bar{\epsilon}\bar{\theta}\Psi^i) \quad (2.56)$$

und mit der Darstellung (2.53) folgt unter Verwendung von (2.56) das Transformationsverhalten

$$\delta_\epsilon n^i = (\bar{\epsilon}\Psi^i), \quad \delta_\epsilon\Psi^i = (F^i + i\bar{\theta}n^i)\epsilon \quad \text{und} \quad \delta_\epsilon F^i = i(\bar{\epsilon}\bar{\theta}\Psi^i) \quad (2.57)$$

der Komponentfelder. Weiterhin ergibt sich für den Supersymmetrie-Generator die Gestalt $\mathcal{Q} = -i\partial_{\bar{\theta}} - \bar{\theta}\partial$ mit $\partial_{\bar{\theta}} \equiv \partial^L/\partial\bar{\theta}$. Zusammen mit $\bar{\mathcal{Q}} = i\partial_{\theta} + \bar{\theta}\bar{\partial}$ wird der antikommutierende Sektor der Super-Algebra (2.50)

$$\{\mathcal{Q}_k, \bar{\mathcal{Q}}_l\} = 2(\gamma^\mu)_{kl}\partial_\mu \quad (2.58)$$

erfüllt. Interessant ist der Ausdruck des transformierten Superfeldes²² $\Phi^{i'} = (1+i\bar{\epsilon}\mathcal{Q})\Phi^i = e^{i\bar{\epsilon}\mathcal{Q}}\Phi^i$ mittels der Exponentialabbildung, die zeigt, dass endliche Supersymmetrie-Transformationen erzeugt werden können. Um unter Supersymmetrie invariante Lagrangefunktionen zu finden, werden Größen benötigt, die mit den Supersymmetrie-Transformationen δ_ϵ kommutieren. Durch die **superkovarianten Ableitungen**

$$\mathcal{D} = \partial_{\bar{\theta}} + i\bar{\theta}\partial \quad \text{und} \quad \bar{\mathcal{D}} = -\partial_{\theta} - i\bar{\theta}\bar{\partial} \quad (2.59)$$

²⁰Formal ist $\bar{\epsilon}$ ein konstanter *Majorana-Spinor*.

²¹ $\frac{\partial^L}{\partial\theta} := \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\theta}}$ wirkt als „Linksableitung“ auf eine beliebige Superfunktion. Ebenso kann die Rechtsableitung $\frac{\partial^R}{\partial\theta} := \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial\theta}}$ verwendet werden. Es gilt $\delta F(\theta) = \delta\theta \frac{\partial^L F}{\partial\theta} = \frac{\partial^R F}{\partial\theta} \delta\theta$.

²² $e^{i\bar{\epsilon}\mathcal{Q}} = 1 + i\bar{\epsilon}\mathcal{Q}$ unter Berücksichtigung der Nilpotenz des Generators $\mathcal{Q}^2 = 0$.

sind zwei Operatoren auf dem Superraum gefunden, die dieses Kriterium erfüllen. Es werden in dieser Arbeit die Notationen \mathcal{D} und \mathcal{D}_l verwendet, wobei erstere den „Vektor“ \mathcal{D} meint, letztere hingegen eine spezielle Komponente von \mathcal{D} . Des Weiteren genügen die superkovarianten Ableitungen den Antikommutator-Relationen

$$\{\mathcal{D}_k, \bar{\mathcal{D}}_l\} = -2(\gamma^\mu)_{kl} \partial_\mu, \quad \{\bar{\mathcal{D}}_k, \bar{\mathcal{D}}_l\} = 0 \quad \text{und} \quad \{\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_l\} = 0. \quad (2.60)$$

Nun soll die Lagrangedichte als reelle, skalare bosonische Größe des linearen Sigma-Modells konstruiert werden. Relevant ist die Aussage, dass keine supersymmetrische Lagrangedichte mit $\delta_\epsilon \mathcal{L} = 0$ existiert, da die Forderung

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \mathcal{L} = -2\bar{\epsilon}_1 \not{\partial} \epsilon_2 \mathcal{L} \sim \partial_\mu \mathcal{L} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.61)$$

eine konstante Lagrangedichte bedingen würde. Die Invarianz unter Supersymmetrie-Variationen bleibt jedoch auch bei einer nicht-supersymmetrischen Lagrangedichte erhalten, falls $\delta_\epsilon \mathcal{L} \sim \partial_\mu K$ einen Divergenzterm darstellt. Betrachtet man z. B. ein einzelnes Superfeld $\Phi(x, \theta)$, so würde sich für die Variation der Wirkung mit $\int dz := \int d^3x d\theta^1 d\theta^2 / (2i)$ für das Integrationsmaß des Superraumes

$$\delta_\epsilon S = \delta_\epsilon \int dz \Phi(x, \theta) = \int dz \underbrace{\bar{\theta}\theta}_{=2i\theta^2\theta^1} \frac{i}{2} (\bar{\epsilon} \not{\partial} \Psi) = \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \int d^3x \partial_\mu \Psi = 0 \quad (2.62)$$

ergeben. Ausintegration der Grassmann-Koordinaten ist somit äquivalent zur Projektion der Lagrangedichte auf den $\bar{\theta}\theta$ -Term. Als zu untersuchende **Wirkung des supersymmetrischen $\mathbf{O}(N)$ -Modells** wird im Folgenden

$$\begin{aligned} S &= \int dz \mathcal{L}(\Phi^i, \mathcal{D}\Phi^i, \bar{\mathcal{D}}\Phi^i) \\ &= \int dz \left(\frac{1}{2} (\bar{\mathcal{D}}\Phi^i)(\mathcal{D}\Phi_i) + 2W\left(\frac{1}{2}\Phi^i\Phi_i\right) \right) = \int dz \left(-\frac{1}{2}K\rho + 2W(\rho) \right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

mit $\rho := \frac{1}{2}\Phi^i\Phi_i$ und dem kinetischen Operator $K := \frac{1}{2}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} - \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}})$ gewählt. Gl. (2.63) setzt sich dabei aus einem kinetischen Beitrag $\frac{1}{2}K\rho$ und einem Potential-Term $W(\rho)$ zusammen und erfüllt offensichtlich die Forderung der Invarianz unter Drehungen und Drehspiegelungen (siehe (1.5) und (1.6)).

Die Wirkung (2.63) ist per Konstruktion invariant unter Supersymmetrie-Transformationen. Dies kann mit der „Wirkung“ des Operators $\mathcal{Q} = -i\partial_{\bar{\theta}} - \not{\partial}\theta$ auf \mathcal{L} gerechtfertigt werden: Die Ableitung $\partial_{\bar{\theta}}$ von \mathcal{Q} ist irrelevant aufgrund der Projektion der Wirkung auf den $\bar{\theta}\theta$ -Term beim Ausintegrieren der Grassmann-Variablen. Der zweite Beitrag $-\not{\partial}\theta$ bedingt einen Oberflächen-Term, der bei hinreichend lokalisierten Komponentenfeldern zu $\delta_\epsilon S = 0$ führt.

Unter Einbeziehung der Darstellung (2.53) des Superfeldes kann die Wirkung (2.63) auch in Abhängigkeit der Komponentenfelder angegeben werden. Notwendig hierzu ist eine Entwicklung der superanalytischen Funktion $W(\rho)$ in den Komponentenfeldern ([25], Kapitel 4.3). Das Superfeld ρ , gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{2}\Phi^i\Phi_i = \underbrace{\frac{1}{2}n^i n_i}_{=: \tilde{\rho}} + \underbrace{(\bar{\theta}\Psi_i)n^i + \bar{\theta}\theta F^i n_i - \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta(\bar{\Psi}^i\Psi_i)}_{=: \rho_S} \quad (2.64)$$

besteht aus einem Ausdruck $\tilde{\rho}$ ohne und einem Beitrag ρ_S mit Beteiligung von Grassmann-Koordinaten. Ist die Funktion $W(\tilde{\rho})$ n -fach differenzierbar, so kann die Superfunktion $W(\rho)$ in einer Taylorreihe um $\tilde{\rho}$ entwickelt werden, die aufgrund der Nilpotenz von θ und $\bar{\theta}$ bei dem

$n = 2$ -ten Glied abbricht:

$$\begin{aligned} W(\rho) &= W(\tilde{\rho}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} W^{(j)}(\tilde{\rho}) (\rho_S)^j \\ &= W(\tilde{\rho}) + W'(\tilde{\rho}) \left((\bar{\theta}\Psi_i)n^i + \bar{\theta}\theta F^i n_i - \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta(\bar{\Psi}^i\Psi_i) \right) - \frac{1}{4}W''(\tilde{\rho})\bar{\theta}\theta\bar{\Psi}^i\Psi^j n_i n_j. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Die Lagrangedichte besitzt somit die Form

$$\mathcal{L}_{off} = -\frac{1}{2}n^i\partial^2 n_i - \frac{i}{2}\bar{\Psi}^i\partial\Psi_i + \frac{1}{2}F^2 + W'(\tilde{\rho})n^i F_i - \frac{1}{2}(W'(\tilde{\rho})\bar{\Psi}^i\Psi_i + W''(\tilde{\rho})\bar{\Psi}^i\Psi^j n_i n_j). \quad (2.66)$$

\mathcal{L}_{off} heißt auch *off-shell Lagrangedichte*, da hier die unphysikalischen Hilfsfelder F^i noch enthalten sind. Deren algebraische Bewegungsgleichungen können durch die Euler-Lagrange-Gleichungen ([25], Kapitel 6.5.8) bestimmt und in (2.66) eingesetzt werden. So gelangt man zu der *on-shell-Wirkung*:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu F^i} = 0 \quad \Rightarrow \quad F^i = -W'(\tilde{\rho})n^i \quad (2.67)$$

$$\mathcal{L}_{on} = -\frac{1}{2}n^i\partial^2 n_i - \frac{i}{2}\bar{\Psi}^i\partial\Psi_i - W'(\tilde{\rho})^2\tilde{\rho} - \frac{1}{2}(W'(\tilde{\rho})\bar{\Psi}^i\Psi_i + W''(\tilde{\rho})\bar{\Psi}^i\Psi^j n_i n_j). \quad (2.68)$$

Das **physikalische Potential** $V(\tilde{\rho}) := (W'(\tilde{\rho}))^2\tilde{\rho}$ bedingt für eine in $\tilde{\rho}$ polynomiale Funktion W' eine verschwindende Grundzustandsenergie des Systems: $V|_{\tilde{\rho}=0} = 0$. Dies und der Aspekt, dass $W(\tilde{\rho}) = W(\frac{1}{2}n^i n_i)$ eine gerade Funktion in den Komponentenfeldern n^i repräsentiert, gewährleisten die Erhaltung der Supersymmetrie für beliebige, in $\tilde{\rho}$ polynomiale Superpotentiale. Auch wird die $O(N)$ -Symmetrie der Wirkung (2.66) auf allen Längenskalen (siehe Kapitel 3) erhalten bleiben. Jedoch schließt dies nicht die Möglichkeit der *spontanen Symmetriebrechung* aus. L. S. Brown beschreibt Systeme mit spontan gebrochener Symmetrie als²³ „[...] *Systems whose dynamics is invariant under some symmetry group but whose ground state does not share this symmetry*“. Es wird in Kapitel 5 gezeigt werden, dass das supersymmetrische $O(N)$ -Modell für spezifische mikroskopische Potentiale zwei entartete Grundzustände bei $\tilde{\rho}_0 = 0$ und $\tilde{\rho}_0 > 0$ aufweist. Entscheidet sich das System für $\tilde{\rho}_0 > 0$, so wird demnach die $O(N)$ -Invarianz spontan gebrochen.

²³aus [18], Seite 99.

3 Die Methoden der funktionalen Renormierungsgruppe

3.1 Einleitung

Nachdem in den Kapiteln 1 und 2 die Grundlagen und theoretischen Hintergründe der supersymmetrischen Sigma-Modelle vorgestellt wurden, soll nun das mathematisch-physikalische Konzept, mit dessen Hilfe diese Modelle zu untersuchen sind, erörtert werden. Die *funktionale Renormierungsgruppe* beschreibt als ein „Werkzeug“ der Quantenfeldtheorie bzw. der statistischen Feldtheorie physikalische Modelle in Abhängigkeit einer *kontinuierlichen Längen- (Energie-, Impuls-) Skala*. Im Zentrum steht dabei die Untersuchung des Übergangs von der Mikrophysik auf klei-

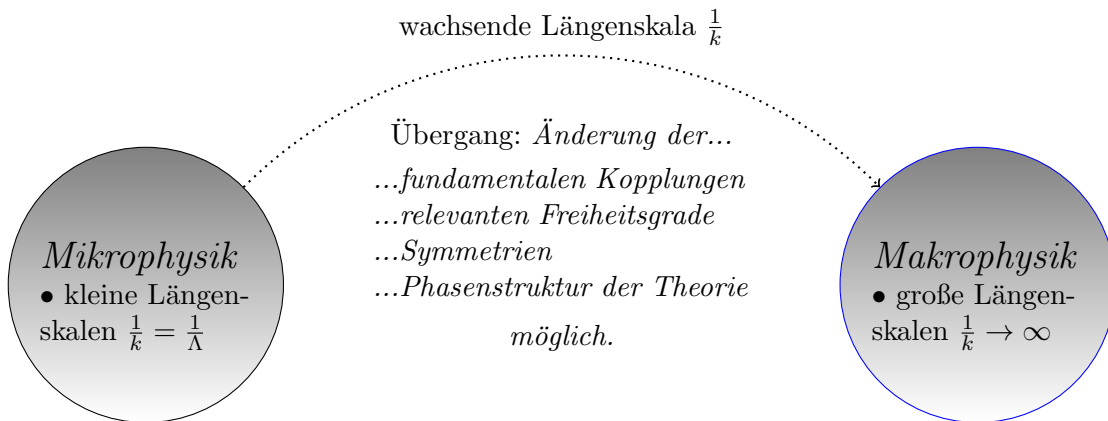


Abbildung 5: Der Renormierungsgruppenfluss beschreibt die *Physik der Skalen*, ausgehend von mikroskopischen Wechselwirkungen auf kleinen Längenskalen hin zu der Makrophysik auf großen Längenskalen.

nen Längenskalen/großen Impulsskalen zu der Makrophysik auf großen Längenskalen/kleinen Impulsskalen, denn hier können sich wesentliche physikalische Eigenschaften der Theorie ändern (siehe Abb. 5). Aus dem Blickwinkel der Mathematik betrachtet, stellt die Renormierungsgruppe eine *funktionale Methode* dar, deren Ziel die Berechnung der skalenabhängigen modifizierten Legendre-Transformierten des skalenabhängigen erzeugenden Funktionals $W_k[J]$ der verbundenen Korrelationsfunktionen ist. Diese essentielle Größe heißt *effektive Mittelwertwirkung* $\Gamma_k[\Phi]$. Ihre Bestimmung erfordert die Lösung einer funktionalen Differentialgleichung mit Anfangsbedingung – der **Flussgleichung**. Diese beschreibt die von Quantenfluktuationen beeinflusste Evolution der effektiven Mittelwertwirkung mit dem Skalenparameter k . Ausgehend von der klassischen Mikrophysik, die nur Quantenfluktuationen auf Skalen unterhalb $1/\Lambda \ll 1$ einschließt, sind mit wachsender Skala $1/k$ Fluktuationen größerer Reichweite enthalten. Die Makrophysik enthält schließlich Fluktuationen auf allen Skalen. Von tragender Bedeutung für die korrekte Beschreibung der Makrophysik ist die zu wählende Struktur der skalenabhängigen effektiven Wirkung $\Gamma_k[\Phi]$. Eine solche Wahl, auch *Trunkierung* genannt, sollte systematisch und durch physikalische Argumente (z. B. die Beachtung relevanter Freiheitsgrade) begründet sein. Durch $\Gamma_k[\Phi]$ wird der makroskopische Erwartungswert der Quantenfelder sowie deren Dynamik bestimmt und jegliche physikalische Information kann aus diesem erzeugenden Funktional gewonnen werden.

Anwendung findet die funktionale Renormierungsgruppe in Eichtheorien wie z. B. der Quantenchromodynamik [39, 41, 42], skalaren Feldtheorien [6], supersymmetrischen Theorien (z. B. der supersymmetrischen Quantenmechanik, Wess-Zumino-Modellen oder Sigma-Modellen [14–17]), der Gravitation [38, 40] oder auch in der Physik der kondensierten Materie [6].

3.2 Der Renormierungsgruppenfluss

Inhalt dieses Kapitels ist die *Herleitung und Erklärung der Flussgleichung* als Bestimmungsgleichung für die effektive Mittelwertwirkung. Diese Flussgleichung stellt den Ausgangspunkt zu allen weiteren Untersuchungen der supersymmetrischen Sigma-Modelle dar. In Abschnitt 3.2.1 wird zunächst der quantenfeldtheoretische Begriff der effektiven Wirkung erörtert, bevor in 3.2.2 die Herleitung der Flussgleichung dargestellt wird. Da dem zu untersuchenden linearen Sigma-Modell die dreidimensionale Minkowski-Raumzeit zugrunde liegt²⁴, wird die Flussgleichung ebenfalls in der *Minkowski-Raumzeit* formuliert. Eine äquivalente Herleitung in der statistischen Feldtheorie gibt z. B. [7]. Weiterhin wird sich in Abschnitt 3.2.1 auf reelle Skalarfelder beschränkt, eine Verallgemeinerung auf andere Felder folgt analog.

3.2.1 Die effektive Wirkung

Die effektive Wirkung fungiert als erzeugendes Funktional von *Korrelationsfunktionen*, aus denen physikalische Erkenntnisse, z. B. über Streuexperimente von Teilchen gewonnen werden können. Eine n -Punkts-Korrelationsfunktion ergibt sich dabei aus dem Produkt von n Feld-Operatoren an verschiedenen Raumzeitpunkten, gemittelt über alle Quantenfluktuationen (Feldkonfigurationen):

$$\langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle := \hat{N} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) e^{iS[\varphi]} \quad \text{mit} \quad \langle 1 \rangle \stackrel{!}{=} 1 \quad (3.1)$$

mit der Normierungskonstanten \hat{N} . Diese Korrelationsfunktionen können mit Hilfe des endlichen, renormierten, erzeugenden Funktionals²⁵

$$Z[J] := \int \mathcal{D}\varphi e^{i(S[\varphi] + \int J\varphi)} \quad \text{durch} \quad \langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle = \frac{(-i)^n}{Z[0]} \left(\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right) \Big|_{J=0} \quad (3.2)$$

generiert werden. Durch die Definition $W[J] := i \ln Z[J]$ kann das erzeugende Funktional der *verbundenen Korrelationsfunktionen* $W[J]$ eingeführt werden. Analog zu (3.2) ergeben sich z. B. die verbundenen Zweipunktsfunktionen

$$(-i)^3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) J(x_2)} = \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle_J - \langle \varphi(x_1) \rangle_J \langle \varphi(x_2) \rangle_J \quad (3.3)$$

in Anwesenheit der Quelle J . Weiterhin gilt

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = -\langle \varphi(x) \rangle_J. \quad (3.4)$$

Die effektive Wirkung $\Gamma[\phi]$ ist nun definiert als *Legendre-Transformierte* des Schwinger-Funktional $W[J]$ mit der Variablen-Transformation $J \rightarrow \phi$:

$$\Gamma[\phi] := \sup_J \left(-W[J] - \int J\phi \right). \quad (3.5)$$

Erwähnt werden sollten an dieser Stelle zwei relevante Eigenschaften von Legendre-Transformationen (LT) [34]:

1. Die LT überführt konvexe Funktionen wieder in konvexe Funktionen.
2. Eine LT ist umkehrbar, d. h. $f \xrightarrow{LT} g \xrightarrow{LT} f$.

Dies impliziert, dass die effektive Wirkung für ein gegebenes konvexes Funktional $W[J]$ ebenfalls

²⁴Begründung: Die Nichtexistenz von Majorana-Spinoren im dreidimensionalen euklidischen Raum.

²⁵Unter $\int fg$ sei im Folgenden $\int d^3x f(x)g(x)$ und unter der abkürzenden Schreibweise $\int_x \equiv \int d^3x$ bzw. $\int_p \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$ zu verstehen.

konvex ist. Gesucht ist für ein beliebiges, gegebenes ϕ ein spezielles $J \equiv J_{sup} = J[\phi]$, für das (3.5) maximal wird. Für $J = J_{sup}$ ergibt sich mit (3.4)

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \left(-W[J] - \int J\phi \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = -\phi(x) = -\langle \varphi(x) \rangle_J, \quad (3.6)$$

d. h. ϕ entspricht dem Erwartungswert der Quantenfelder φ in Anwesenheit der Quelle J : $\langle \varphi \rangle_J = \phi$. Durch die Legendre-Transformation (3.5) und Gl. (3.6) wurde somit der Übergang zur effektiven Wirkung als Funktional der Felder ϕ vollzogen, d. h.

$$\delta\Gamma = \left(- \int \frac{\delta W[J]}{\delta J} \delta J - \int (\delta J)\phi - \int J(\delta\phi) \right) \Big|_{J_{sup}} = - \int J(\delta\phi) \Big|_{J_{sup}} \Rightarrow \Gamma = \Gamma[\phi]. \quad (3.7)$$

Durch die funktionale Ableitung einer gegebenen Wirkung S nach den Feldfunktionen können bekanntlich die Bewegungsgleichungen der Felder abgeleitet werden. Ebenso generiert die funktionale Ableitung der effektiven Wirkung nach den Feldern ϕ an der Stelle $J = J_{sup}$ die die Dynamik des Felderwartungswertes bestimmende *Quanten-Bewegungsgleichung*²⁶

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} = - \int_{x'} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x')} \frac{\delta J(x')}{\delta\phi(x)} - \int_{x'} \frac{\delta J(x')}{\delta\phi(x)} \phi(x') - J(x) = -J(x). \quad (3.8)$$

3.2.2 Die Renormierungsgruppen Flussgleichung

Intention dieses Kapitels ist die Herleitung einer Bestimmungsgleichung in Form einer funktionalen Differentialgleichung für die gemittelte effektive Wirkung $\Gamma_k[\phi]$. Letztere verkörpert dabei eine Interpolation zwischen der klassischen Wirkung $S[\phi]$ für $k \rightarrow \Lambda$ und der effektiven Wirkung $\Gamma[\phi]$ für $k \rightarrow 0$. Als Impulsskala fungiert der Parameter k . Weiterhin wird in Anlehnung an das supersymmetrische $O(N)$ -Sigma-Modell nicht mehr von einem Skalarfeld, sondern von N Feldern φ_i ausgegangen. (Bemerkung: Zwecks Übersichtlichkeit wird auf die Indizes in den Argumenten der Funktionale verzichtet.)

Den Ausgangspunkt bildet das infrarot-regulierte Analogon²⁷ des erzeugenden Funktionals (3.2)

$$Z_k[J] \equiv e^{-iW_k[J]} = e^{i\Delta S_k[\frac{\delta}{\delta J}]} Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{i(S[\varphi] + \int \vec{J} \cdot \vec{\varphi} + \Delta S_k[\varphi])} \quad (3.9)$$

$$\text{mit} \quad \Delta S_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \varphi_i(-p) (R_k)_{ij}(p) \varphi_j(p). \quad (3.10)$$

$\Delta S_k[\varphi]$ stellt einen impulsabhängigen und in den Quantenfeldern quadratischen Massenterm dar, der die Propagation von IR Moden bei geeigneter Wahl der Regulatorfunktion R_k unterdrückt. Analog zu (3.6) bzw. (3.3) ergibt sich wieder an der Stelle $J = J_{sup}$

$$\frac{\delta W_k[J]}{\delta J_i(x)} = -\langle \varphi_i(x) \rangle_J = -\phi_i \quad \text{bzw.} \quad \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J_m(y) \delta J_n(x')} = -\frac{\delta\phi_m(y)}{\delta J_n(x')} \equiv (G_k)_{mn}(y, x')^{28}. \quad (3.11)$$

²⁶Bemerkung: Die zweiten funktionalen Ableitungen einer Funktion und ihrer Legendre-Transformierten sind invers zueinander. Dies bedingt für die effektive Wirkung $\Gamma[\phi]$ und das Schwinger-Funktional $W[J]$: $\frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(x) \delta\phi(y)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta\phi(y)}$; $\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y) \delta J(z)} = -\frac{\delta\phi(y)}{\delta J(z)} \Rightarrow \int_y \Gamma_{(x,y)}^{(2)} W_{(y,z)}^{(2)} = \delta(x-z)$.

²⁷ $f[\frac{\delta}{\delta J}]$ ist ein Funktional des Differentialoperators $\frac{\delta}{\delta J}$. So kann für die in eine Potenzreihe entwickelbare Funktion f gezeigt werden, dass $f[\frac{\delta}{\delta J(x)}] Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi f(\varphi(x)) e^{i(S[\varphi] + \int J\varphi)}$ gilt.

²⁸Im Superraum ist die zweite funktionale Ableitung in (3.11) durch $\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J_m(y)} W_k[J] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta J_n(x')}$ gegeben.

Die in ΔS_k auftretende Regulator-Funktion $R_k(p)$ in (3.10) muss nachstehenden Ansprüchen genügen:

$$(1) \quad \lim_{\frac{p^2}{k^2} \rightarrow 0} R_k(p) > 0 \quad \Rightarrow \text{Infrarotregularisierung} \quad (3.12)$$

$$(2) \quad \lim_{\frac{k^2}{p^2} \rightarrow 0} R_k(p) = 0 \quad \Rightarrow \text{volle effektive Wirkung für } k \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} R_k(p) \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \text{klassische Wirkung für } k \rightarrow \Lambda \quad (3.14)$$

Die Forderungen (3.12)-(3.14) gewährleisten die *regulatorunabhängigen* physikalischen Grenzfälle der Makro- und Mikrophysik. Die Renormierungsgruppen Trajektorie im „Theorie-Raum“ weist jedoch eine spezifische Regulator-Abhängigkeit auf. Dies motiviert die Suche nach optimierten Regulator-Funktionen, die die Konvergenz des Flusses zur vollen Quantentheorie gewährleisten und fördern [4]. Nun kann die *skalenabhängige effektive* Wirkung $\Gamma_k[\phi]$ mittels einer modifizierten Legendre-Transformation²⁹ definiert werden:

$$\Gamma_k[\phi] := \sup_J \left(- \int \vec{J} \cdot \vec{\phi} - W_k[J] \right) - \Delta S_k[\phi]. \quad (3.15)$$

Es kann wiederum die Quanten-Bewegungsgleichung (vgl. Relation (3.8))

$$\frac{\delta \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi_i(x)} = -J_i(x) - \frac{\Delta S_k[\phi]}{\delta \phi_i(x)} = -J_i(x) - \int_{x'} (R_k)_{ij}(x, x') \phi_j(x') \quad (3.16)$$

bzw. die zweite funktionale Ableitung

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi_i(x) \delta \phi_j(y)} = - \frac{\delta J_i(x)}{\delta \phi_j(y)} - (R_k)_{ij}(x, y) \quad (3.17)$$

für $J = J_{sup}$ ermittelt werden. Wie bereits bemerkt wurde, sind die zweiten funktionalen Ableitungen einer Funktion und ihrer Legendre-Transformierten invers zueinander. Bezogen auf die durch eine *modifizierte* Legendre-Transformation gegebene Bestimmungsgleichung (3.15) für die effektive Mittelwertwirkung, ergibt sich mit (3.11) und (3.17) die Relation³⁰

$$\int_y (\Gamma_k^{(2)} + R_k)_{mn}(x, y) (G_k)_{nl}(y, z) = \int_y \frac{\delta J_m(x)}{\delta \phi_n(y)} \frac{\delta \phi_n(y)}{\delta J_l(z)} = \delta_{ml} \delta(x - z). \quad (3.18)$$

Mit Einführung des **einheitenlosen Skalenparameters**

$$t := \ln \left(\frac{k}{\Lambda} \right) \quad (\Rightarrow \partial_t = k \partial_k) \quad (3.19)$$

kann nun die gesuchte funktionale Differentialgleichung für $\Gamma_k[\phi]$ abgeleitet werden. Der Fluss der Wirkung für fixiertes ϕ (und somit skalenabhängiges $J = J_k$) ist an der Stelle $J[\phi] = J_{sup}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\phi] |_{\phi} &= - \int (\partial_t \vec{J}) \cdot \vec{\phi} - \partial_t W_k[J] |_J - \int \underbrace{\frac{\delta W_k[J]}{\delta J_i}}_{=-\phi_i} \partial_t J_i - \partial_t \Delta S_k[\phi] \\ &= - \partial_t W_k[J] |_J - \partial_t \Delta S_k[\phi]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

²⁹Durch die Modifikation ΔS_k der Legendre-Transformation muss Γ_k für endliche k nicht konvex sein. Die Konvexität von Γ_k wird aber immer im Limes $k \rightarrow 0$ durch $\lim_{k \rightarrow 0} \Delta S_k = 0$ (3.13) gewährleistet sein.

³⁰Abkürzende Schreibweise der funktionalen Ableitungen einer Funktion $A[\phi(x)]$:

$$\frac{\delta^n A[\phi]}{\delta \phi_{i_1}(x_1) \dots \delta \phi_{i_n}(x_n)} \equiv (A^{(n)})_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Die Ableitung des Schwinger-Funktional $W_k[J]$ nach dem Skalenparameter t nimmt mit (3.10) und der Definition der Greens-Funktion

$$(G_k)_{mn}(x, y) \equiv \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J_m(x) \delta J_n(y)} = (i)^3 (\langle \varphi_m(x) \varphi_n(y) \rangle_J - \phi_m(x) \phi_n(y)) \quad (3.21)$$

(vgl. Gl. (3.3)) die Form³¹

$$\begin{aligned} \partial_t W_k[J]|_J &= i \partial_t \ln Z[J]|_J = - \int_x \int_y \langle \varphi_m(x) \partial_t (R_k)_{mn}(x, y) \varphi_n(y) \rangle_J \\ &= -i \int_x \int_y (\partial_t (R_k)_{mn}(x, y)) (G_k)_{nm}(y, x) - \partial_t \Delta S_k[\phi] \\ &= -i \text{Tr} ((\partial_t R_k) G_k) - \partial_t \Delta S_k[\phi] \end{aligned} \quad (3.22)$$

an. Die resultierende Flussgleichung im Minkowski-Raum lautet mit (3.18), (3.20) und (3.22) für festes ϕ und $J = J_{sup}$ folglich

$$\partial_t \Gamma_k[\phi] = \frac{i}{2} \text{Tr} \left((\partial_t R_k) (\Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k)^{-1} \right). \quad (3.23)$$

Der Übergang zu supersymmetrischen Theorien ergibt sich durch die Ersetzungen der Felder durch Superfelder $\phi^i \rightarrow \Phi^i$ sowie der Spur durch die Superspur $\text{Tr} \rightarrow \text{STr}$, d. h.

Flussgleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\Phi] &= \frac{i}{2} \text{STr} \left((\partial_t R_k) (\Gamma_k^{(2)}[\Phi] + R_k)^{-1} \right) \\ &= \frac{i}{2} \int dz \int dz' (\partial_t R_k)_{mn}(z, z') (\Gamma_k^{(2)}[\Phi] + R_k)_{nm}^{-1}(z', z), \end{aligned} \quad (3.24)$$

wobei $\int dz = \int d^3x d\theta^1 d\theta^2 / (2i)$ das Integrationsmaß des $\mathbb{R}^{3|2}$ -Superraumes und $n, m = 1, \dots, N$ die Feldindizes darstellen.

Resümierend lässt sich festhalten: Mittels der *Flussgleichung* (3.24) kann die Physik, ausgehend von einer *gegebenen Wirkung* Γ_Λ bei einer mikroskopischen Skala $k = \Lambda$, in Abhängigkeit der Längenskala k anhand der *effektiven Mittelwertwirkung* Γ_k beschrieben werden. Dies eröffnet Kenntnisse über die komplexe Makrophysik bei kleinen Skalen $k \rightarrow 0$ in Form der *effektiven Wirkung* $\Gamma_{k \rightarrow 0} = \Gamma$. Des Weiteren ist die Wahl einer geeigneten und den Bedingungen (3.12)-(3.14) genügenden *Regulatorfunktion* R_k zwecks Regularisierung notwendig.

3.3 Trunkierungen

Der zu bestimmenden effektiven Mittelwertwirkung Γ_k muss eine mathematische Form zugeordnet werden – die Trunkierung. Dieser Schritt ist essenziell, da er der ersten notwendigen Näherung in der Renormierungsgruppen-Methode entspricht. Die theorieangepasste Wahl einer konkreten Trunkierung zeichnet sich dadurch aus, dass sie systematisch und physikalisch sinnvoll ist sowie die relevante Dynamik des Modells enthält und nicht zuletzt eine numerisch/analytisch handhabbare Struktur aufweist.

Nachstehend werden die wichtigsten zwei Trunkierungsmethoden – speziell angewandt auf das *supersymmetrische* $O(N)$ -Modell – vorgestellt.

³¹ $(G_k)_{mn}(x, y) = (G_k)_{nm}(y, x)$.

(i) *Operatorentwicklung* Diese Approximation stellt die Entwicklung der effektiven Wirkung durch Operatoren steigender Massendimension dar. Ein naheliegender Ansatz ist die Wahl von Ableitungsoperatoren wie der partiellen Ableitung ∂^n in skalaren bzw. der superkovarianten Ableitung \mathcal{D}^n in supersymmetrischen Feldtheorien – die „Gradientenentwicklung“. Diese Trunkierungsmethode wird in Kapitel 4.1 zur Herleitung der Flussgleichung des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells in $d = 3$ angewandt und bedingt die Form

$$\Gamma_k[\Phi^i] = \int dz \left(2W_k(\rho) - Z_k(\rho) \frac{1}{2} \Phi^i K \Phi_i - \frac{1}{4} Y_k(\rho) \rho K \rho + \mathcal{O}(K^2) \right) \quad (3.25)$$

der effektiven Mittelwertwirkung Γ_k mit $\int dz = \int d^3x d\theta^1 d\theta^2 / (2i)$ als dem Integrationsmaß im $\mathbb{R}^{3|2}$ -Superraum. Zentraler Operator ist hier der kinetische Operator $K = \frac{1}{2}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} - \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}})$. Diese Ableitungsentwicklung eignet sich trotz der Nicht-Analytizität des kritischen Propagators³² $\Gamma_k^{(2)} \sim p^2(p^2 + k^2)^{-\eta/2}$ bzgl. der Impulskoordinate auch zur Extraktion der Physik in der Nähe des Phasenübergangs. Für kleine Impulse $p^2 \rightarrow 0$ folgt das reguläre Verhalten $\Gamma_k^{(2)} \rightarrow 0$. Für große Impulse $p^2 \gg k^2$ ist der Propagator $\Gamma_k^{(2)} \sim p^{2-\eta}$ zwar manifest nichtanalytisch, der Beitrag zum Impulsintegral in (3.24) ist jedoch durch $\partial_t R_k$ stark unterdrückt.

(ii) *Vertexentwicklung* Die Vertexentwicklung³³

$$\Gamma_k[\Phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dz_1 \dots dz_n \Gamma_k^{(n)}(z_1, \dots, z_n) \Phi(z_1) \dots \Phi(z_n) \quad (3.26)$$

besitzt als Entwicklungskoeffizienten die Ein-Teilchen-irreduziblen (1PI) Greens-Funktionen $\Gamma_k^{(n)}$. Diese Näherung führt auf ein unendliches System von gekoppelten Integro-Differentialgleichungen für die $\Gamma_k^{(n)}$ ähnlich zu den Dyson-Schwinger-Gleichungen. Praktisch wird die Trunkierung nur endlich viele Terme enthalten.

3.4 Regulatoren

Wie bereits in Abschnitt 3.2.2 erwähnt wurde, muss die Regulatorfunktion $R_k(p)$ den drei Bedingungen (3.12)-(3.14) genügen. (3.12) garantiert IR-Regularisierung für kleine Impulsskalen $p^2 \rightarrow 0$, die Forderungen (3.13) und (3.14) gewährleisten einerseits die Dominanz der klassischen Feldkonfigurationen und somit den Übergang von $\Gamma_k[\phi]$ zur mikroskopischen Wirkung S für $k \rightarrow \Lambda$ und andererseits den Übergang von $\Gamma_k[\phi]$ zur vollen effektiven Wirkung Γ im Limes $k \rightarrow 0$. Eine diesen Ansprüchen gerecht werdende Regulatorfunktion ist z. B. gegeben durch [7]

$$R_k(p) = p^2 \left(e^{\frac{p^2}{k^2}} - 1 \right)^{-1} = p^2 f \left(\frac{p^2}{k^2} \right). \quad (3.27)$$

Für kleine Impulse im Infrarotlimit $(p/k)^2 \rightarrow 0$ entspricht $\lim_{(p/k)^2 \rightarrow 0} R_k(p) = k^2$ einem zusätzlichen Massenterm im Nenner der regularisierten Greensfunktion in der Flussgleichung (3.23). Dies prädestiniert die Methode der funktionalen Renormierungsgruppe für die Behandlung von Theorien, die im Infrarotbereich in der Störungstheorie problematisch werden. Als Beispiel sei das bosonische (und folglich auch das in dieser Arbeit betrachtete supersymmetrische) $O(N)$ -Modell erwähnt, in dem masselose Goldstonebosonen für $N > 1$ in der spontan gebrochenen Phase auftreten. Neben der Infrarot-Regularisierung garantiert R_k durch die für $p^2 \gg k^2$ exponentiell abfallende Ableitung $\lim_{(p/k)^2 \rightarrow \infty} \partial_t R_k(p) \approx 2k^2 \left(\frac{p}{k}\right)^4 e^{-\left(\frac{p}{k}\right)^2} \rightarrow 0$ im Zähler von (3.23) auch *UV-Regularisierung*.

³²siehe [6], Kapitel 2.3. $\eta > 0$ bezeichnet die anomale Dimension, gegeben durch $\eta = -\partial_t \ln Z_k$ mit der Wellenfunktionsrenormierung Z_k .

³³ $z \equiv (x, \theta)$ entspricht den Koordinaten im Superraum.

Wie gestaltet sich nun die Einführung des Regulator-Terms in *supersymmetrischen Theorien*? In (3.10) wurde für eine skalare Feldtheorie der in den Quantenfeldern φ^i quadratische Regulator-Ausdruck eingeführt, wobei in die Flussgleichung der Ausdruck $\Delta S_k^{(2)}[\Phi]$ einfließt. Die spezielle Wahl eines in den Feldern *quadratischen* Regulator-Terms ΔS_k gewährleistet die ein-Loop-Struktur der Flussgleichung (3.24). Relevant bei der Konstruktion des supersymmetrischen Regulator-Terms ist, dass $\Delta S_k[\Phi]$ die *Symmetrien der Wirkung* – $O(N)$ -Symmetrie und Supersymmetrie – respektiert. Invarianz unter Rotationen fordert einen Regulator-Term *diagonal* in den Feldindizes. Die zweite Forderung der Invarianz unter Supersymmetrie-Transformationen führt auf den Regulator-Ausdruck

$$\Delta S_k[\Phi] = \frac{1}{2} \int dz \Phi^i (R_k(\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}}) \delta_{ij}) \Phi^j. \quad (3.28)$$

Die Regulator-Funktion $R_k(\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}})$ ist hierbei eine beliebige Funktion der superkovarianten Ableitungen $\bar{\mathcal{D}}$ und \mathcal{D} . Unter Berücksichtigung der Antikommutatoren (2.59), die $\mathcal{D}^2 = \bar{\mathcal{D}}^2 = 0$ und $\bar{\mathcal{D}}_l \mathcal{D}_l = -\mathcal{D}_l \bar{\mathcal{D}}_l$ bedingen³⁴, vereinfacht sich die Struktur der Regulatorfunktion zu $R_k = R_k(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D})$. Eine gerade Potenz des Produktes $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}$ führt unter Verwendung von (2.59) auf Potenzen des d'Alembert-Operators gemäß

$$\left(\frac{1}{2}\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}\right)^{2n} = (-\partial_x^2)^n. \quad (3.29)$$

Demnach besitzt der allgemeine und die Symmetrien der Theorie respektierende Regulator-Term die Form

$$\Delta S_k[\Phi] = \frac{1}{2} \int dz \Phi^i \left[(2r_1(-\partial_x^2, k) - r_2(-\partial_x^2, k)K) \delta_{ij} \right] \Phi^j \quad (3.30)$$

mit dem kinetischen Operator $K = \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} - \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}})$. In Abschnitt 4.2 werden die Regulatorfunktionen $r_1(p^2, k)$ und $r_2(p^2, k)$ spezifiziert und die Erfüllung der Forderungen (3.12)-(3.14) wird überprüft. Sie lauten

$$r_1(p^2, k) = 0 \quad \text{und} \quad r_2(p^2, k) = \left(\frac{k}{|p|} - 1 \right) \Theta(k^2 - p^2). \quad (3.31)$$

Abb. 6 zeigt die Regulator-Funktionen (3.27) und (3.31) sowie deren Ableitung nach $t = \ln(k/\Lambda)$ graphisch.

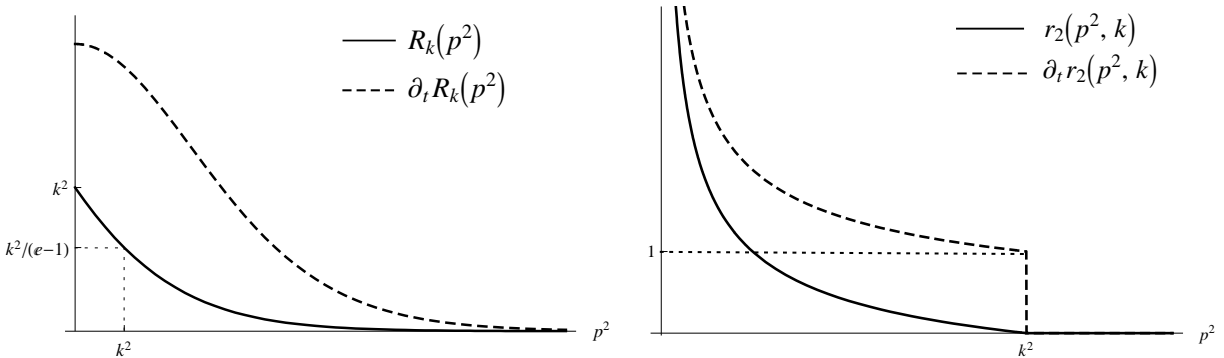


Abbildung 6: Graphische Darstellung der Regulatorfunktionen (3.27) und (3.31) sowie deren Ableitungen nach der dimensionslosen Skala t .

³⁴Die gewählten Gamma-Matrizen $\gamma^\mu = (\sigma_2, i\sigma_3, i\sigma_1)$ (2.34) sind aufgrund der Spurfreiheit der Pauli-Matrizen ebenfalls spurfrei. Es folgt $\{\mathcal{D}_l, \bar{\mathcal{D}}_l\} = -2(\gamma^\mu)_{ll} \partial_\mu = 0$.

3.5 Fixpunktanalyse

Eine fundamentale Quantenfeldtheorie besitzt die Eigenschaft, dass ihre Renormierungsgruppen-trajektorie auf alle Skalen $k \in [0, \infty)$ ausdehnbar ist. Dies ist in der Tat möglich, wenn diese Trajektorie einen *Fixpunkt* im Theorieraum³⁵ erreicht. Dieser Punkt zeichnet sich durch Invarianz unter Renormierungsgruppen-Transformationen – und somit Invarianz unter Variation des Skalenparameters k – aus.

Die Fixpunktanalyse einer Theorie kann z. B. durch die Parametrisierung der effektiven Wirkung Γ_k durch unendlich viele *dimensionslose Kopplungen* $a_i(t)$ erfolgen. Eine vorhersagbare Theorie weist dabei nur *endlich viele*, den Renormierungsgruppenfluss bestimmende, *physikalische Parameter* auf. Aus der Flussgleichung (3.23) folgt die Evolution der Kopplungen

$$\partial_t a_i(t) =: \beta_i(a_k) \quad (3.32)$$

mit dem dimensionslosen Skalenparameter $t = \ln(k/\Lambda)$. Die in (3.32) eingeführte β -Funktion weist keine explizite Abhängigkeit von der Skala t auf. Dies folgt u. a. aus der Struktur der resultierenden Flussgleichung (4.65), die keine explizite t -Abhängigkeit enthält. **Fixpunkte** im Raum der Kopplungen genügen der Bedingung

$$\beta_i(a_{k*}) = 0 \quad \forall i. \quad (3.33)$$

Es handelt sich um einen *Gaußschen Fixpunkt*, falls $a_{i*} = 0 \forall i$ bzw. um einen *nicht-Gaußschen Fixpunkt*, falls (mindestens) ein i existiert, für das $a_{i*} \neq 0$ gilt. Um die Kopplungen in der Nähe des Fixpunktes zu untersuchen, wird der Fluss um diesen linearisiert gemäß

$$\begin{aligned} \beta_i &= \beta_i(a_{k*}) + \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial a_j} \right|_{a_{k*}} (a_j - a_{j*}) + \mathcal{O}((a_j - a_{j*})(a_k - a_{k*})) \\ &\stackrel{(3.33)}{=} B_i^j (a_j - a_{j*}) + \mathcal{O}(a^2) \quad \text{mit} \quad B_i^j := \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial a_j} \right|_{a_{k*}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Die durch den Index n nummerierten Eigenwerte $\omega_n =: -\Theta_n$ können aus der *Stabilitätsmatrix* B_i^j durch Diagonalisieren bestimmt werden:

$$B_i^j V_j^n = \omega_n V_i^n = -\Theta_n V_i^n. \quad (3.35)$$

V_i^n ist hierbei der zu dem Eigenwert ω_n gehörige Eigenvektor. Zentrales Resultat dieser Fixpunktanalyse sind die **kritischen Exponenten** Θ_n als negative Eigenwerte, mit deren Hilfe die Theorie nun klassifiziert werden kann. (3.34) führt mit (3.35) auf die Evolution der Kopplungen

$$a_i(t) = a_{i*} + \sum_n C_n V_i^n e^{-\Theta_n t} \quad (3.36)$$

im linearisierten Fixpunktregime. Die Konstanten C_n werden durch die Anfangsbedingungen bei $k = \Lambda$ fixiert. Durch $\text{sgn}(\Theta_n)$ wird die Evolution von Γ_k zu großen Längenskalen $k \rightarrow 0$ determiniert:

$$\begin{aligned} \Theta_n < 0 &\longrightarrow \textit{irrelevante} \textit{ Eigenrichtung} \\ \Theta_n = 0 &\longrightarrow \textit{marginale} \textit{ Eigenrichtung} \\ \Theta_n > 0 &\longrightarrow \textit{relevante} \textit{ Eigenrichtung}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Irrelevante Eigenrichtungen im Theorieraum mit $\Theta_n < 0$ werden im Limes $t \rightarrow -\infty$ exponentiell unterdrückt und die Kopplung evolviert asymptotisch gegen ihren Fixpunktwert

³⁵Dies ist der Raum, der von allen die effektive Wirkung bestimmenden *Operatoren* wie z. B. $\Phi^i \Phi_i, \Phi^i K \Phi_i, \dots$ aufgespannt wird.

$a_i(t \rightarrow -\infty) \rightarrow a_{i*}$. Tritt mit $\Theta_n = 0$ eine *marginale* Eigenrichtung auf, so kann mittels des linearen Ansatzes (3.34) keine Aussage über das Verhalten der Kopplungen in einer Umgebung der Fixpunktlösung getroffen werden und höhere Ordnungen müssen berücksichtigt werden. Dem Namen nach interessant sind die *relevanten* Richtungen $\Theta_n > 0$. Hier ergibt sich mit (3.36) ein von der Fixpunktkopplung sich exponentiell entfernender Fluss der Kopplung $a_i(t)$. Die Anzahl der zu fixierenden physikalischen Parameter des Modells setzt sich folglich aus der Summe der relevanten und marginal-relevanten Eigenrichtungen zusammen³⁶.

³⁶Die Anzahl der physikalischen Parameter im UV und im IR stimmt im Allgemeinen (z. B. für Kondensate, gebundene Zustände,...) nicht miteinander überein.

Teil II

Das lineare $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische $O(N)$ -Sigma-Modell in $d = 3$

4 Die Flussgleichung des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells in LPA

4.1 Herleitung der Flussgleichung im Superraum

„Phänomenologische“ Grundlage jeder Theorie ist ihre Wirkung. Im Folgenden wird das bereits in den Kapiteln 1 und 2.3 vorgestellte supersymmetrische lineare $O(N)$ -Sigma-Modell³⁷ über dem dreidimensionalen Minkowski-Raum untersucht. **Zielstellung** dieses Abschnitts ist die *Auswertung der Flussgleichung* (3.24) im $\mathbb{R}^{3|2}$ -Superraum für eine gewählte, systematische *Trunkierung* der Wirkung $\Gamma_k[\Phi^i]$.

Um eine möglichst exakte Beschreibung des linearen Sigma-Modells zu erzielen, wird die Lagrangedichte in der *Operatorentwicklung*

$$\Gamma_k[\Phi^i] = \int dz \left(2W_k(\rho) - Z_k(\rho) \frac{1}{2} \Phi^i K \Phi_i - \frac{1}{4} Y_k(\rho) \rho K \rho + \mathcal{O}(K^2) \right) \quad (4.1)$$

entsprechend Gl. (3.25) [7] durch Operatoren steigender Massendimension dargestellt. $\int dz := \int d^3x d\theta^1 d\theta^2 / (2i)$ bezeichnet das Integrationsmaß im $\mathbb{R}^{3|2}$ -Superraum. Als Ableitungsoperatoren fungieren an dieser Stelle die superkovarianten Ableitungen $\bar{\mathcal{D}}$ und \mathcal{D} , die in dem *kinetischen Operator* $K = \frac{1}{2} (\bar{\mathcal{D}}_l \mathcal{D}_l - \mathcal{D}_l \bar{\mathcal{D}}_l)$ enthalten sind. Des Weiteren werde nur die erste Ordnung in der Ableitungsentwicklung – die *Local Potential Approximation* (LPA) – betrachtet. Diese enthält ein skalenabhängiges Superpotential $W_k(\rho)$ sowie einen skalenunabhängigen kinetischen Term mit $Z_k(\rho) = 1$. Die nächste Ordnung würde eine im Allgemeinen feldabhängige Wellenfunktionsrenormierung $Z_k(\rho)$ sowie die Funktion $Y_k(\rho)$ (hier Mischung der Ableitungen verschiedener Felder) beinhalten. Essenziell ist außerdem, dass die Entwicklung in K (4.1) sowohl $O(N)$ -Symmetrie als auch Supersymmetrie erhält.

Ausgangspunkt für die folgende Herleitung der Flussgleichung für das Superpotential $W_k(\rho)$ in der LPA ist demnach die **effektive Mittelwertwirkung** in der Trunkierung

$$\Gamma_k[\Phi^i] = \int dz \left(-\frac{1}{2} \Phi^i K \Phi_i + 2W_k(\rho) \right) \quad (4.2)$$

$$\text{mit } \rho = \frac{1}{2} \Phi^i \Phi_i, \quad K = \frac{1}{2} (\bar{\mathcal{D}} \mathcal{D} - \mathcal{D} \bar{\mathcal{D}}) \quad \text{und} \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

Die Herleitung der Flussgleichung für $W_k(\rho)$ erfolgt direkt im $\mathbb{R}^{3|2}$ -Superraum mit den Koordinaten $z = (x, \theta^1, \theta^2)$ mit $x = (x^0, x^1, x^2)$. Der Fluss der effektiven Wirkung ist gemäß (3.24) durch

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{i}{2} \int dz dz' (\partial_t R_k)_{mn}(z, z') (G_k)_{nm}(z', z) \quad (4.4)$$

$$= \frac{i}{2} \int d^3x d\theta^1 d\theta^2 d^3x' d\theta^{1'} d\theta^{2'} \frac{1}{(2i)^2} (\partial_t R_k)_{mn(x-x', \theta^1-\theta^{1'}, \theta^2-\theta^{2'})} (G_k)_{nm(x'-x, \theta^{1'}-\theta^1, \theta^{2'}-\theta^2)} \quad (4.5)$$

$$= \frac{i}{2} \int d^3x d\theta^1 d\theta^2 d\theta^{1'} d\theta^{2'} \frac{1}{(2i)^2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\partial_t R_k)_{mn(p, \theta^1-\theta^{1'}, \theta^2-\theta^{2'})} (G_k)_{nm(p, \theta^{1'}-\theta^1, \theta^{2'}-\theta^2)} \quad (4.6)$$

³⁷Es werden die in Kapitel 2.3 erörterten Konventionen benutzt.

gegeben. Der Übergang von (4.5) zu (4.6) wurde dabei durch die Fouriertransformation $f(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(p) e^{-ipx}$ ortsabhängiger Funktionen zu impulsabhängigen Größen vollzogen. Des Weiteren stellt $(R_k)_{mn}$ einen supersymmetrischen Regulator-Term und $(G_k)_{nm}$ die verbundene Zweipunktsfunktion dar. Generell gilt, dass die zweiten funktionalen Ableitungen eines Funktionals und dessen Legendre-Transformation invers zueinander sind. Dies gilt folglich in analoger Weise für die effektive Wirkung $\Gamma_k[\Phi^i]$ und das erzeugende Funktional der verbundenen Zweipunktsfunktionen $W_k[J^i]$, die mittels einer durch $\Delta S_k[\Phi]$ modifizierten Legendre-Transformation ineinander übergehen³⁸. Dies führt zu der *Bestimmungsgleichung*

$$\int dz (G_k)_{mn}(\tilde{z}, z) (\Gamma_k^2 + R_k)_{np}(z, z') = \delta_{mp} \delta(\tilde{z} - z') \quad (4.7)$$

der für die Deduktion der Flussgleichung relevanten Greensfunktion G_k . Ebenso wie die trun-kierte effektive Mittelwertwirkung (4.2), muss der Regulator-Term $\Delta S_k[\Phi]$ $O(N)$ - und Super-symmetrie erhalten. In den Grundlagen in Abschnitt 3.4 wurde die allgemeine, die Symmetrien der Theorie erhaltende Struktur des Regualor-Terms bestimmt. Dieser in den Superfeldern qua-dratische Regulator [14, 16] besitzt gemäß (3.30) die Form

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} \int dz \Phi^i \left[(2r_{1(-\partial_x^2, k)} - r_{2(-\partial_x^2, k)} K) \delta_{ij} \right] \Phi^j. \quad (4.8)$$

Für die nachfolgenden Betrachtungen und Rechnungen spielt dessen *Diagonalität* bzgl. der Feldindizes eine tragende Rolle. Zunächst muss die zweite funktionale Ableitung der Wirkung nach den Superfeldern

$$\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi^n(z)} \Gamma_k[\Phi(\tilde{z})] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi^m(z')} \quad (4.9)$$

ermittelt werden. Unter Verwendung von $\int dz (\mathcal{D}_k \bar{\mathcal{D}}_k \Phi^i) \Phi_i = -\int dz \Phi^i (\bar{\mathcal{D}}_k \mathcal{D}_k \Phi_i)$ ergibt sich $\int dz (K \Phi^i) \Phi_i = \int dz \Phi^i (K \Phi_i)$ und mit der Abkürzung

$$\delta(z - \tilde{z}) \equiv 2i \delta(x - \tilde{x}) \delta(\theta^2 - \tilde{\theta}^2) \delta(\theta^1 - \tilde{\theta}^1)^{39} \quad (4.10)$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{\delta} \Gamma_k[\Phi(\tilde{z})]}{\delta \Phi^n(z)} &= \int d\tilde{z} \left(-K \Phi_n(\tilde{z}) \delta(\tilde{z} - z) + 2 \int d\hat{z} \frac{\delta W_k[\rho(\tilde{z})]}{\delta \rho(\hat{z})} \frac{\delta \rho(\hat{z})}{\delta \Phi^n(z)} \right) \\ &= \int dz [-K \Phi_n(\tilde{z}) + 2W'_k(\rho(\tilde{z})) \Phi_n(\tilde{z})] \delta(\tilde{z} - z) \\ &= [-K + 2W'_k(\rho(z))] \Phi_n(z) \end{aligned} \quad (4.11)$$

und somit

$$\Gamma_{k, nm}^{(2)}(z, z') \equiv \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi^n(z)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi^m(z')} = [(-K + 2W'_k(\rho)) \delta_{nm} + 2W''_k \Phi_n \Phi_m]_{(z)} \delta(z - z'). \quad (4.12)$$

Analog erhält man für den Regulator $(R_k)_{nm} = \Delta S_{k, nm}^{(2)}$:

$$(R_k)_{nm}(z, z') = [2r_1 - r_2 K]_{(z)} \delta_{nm} \delta(z - z'). \quad (4.13)$$

Im Folgenden werden die Superfelder (und somit deren Entwicklungskoeffizienten n^i, Ψ^i und F^i) als konstant, d. h. von x unabhängig betrachtet: $\partial_x \Phi^i(x, \theta) = 0$. Damit findet sich eine

³⁸Siehe auch die Bemerkungen hierzu in Kapitel 3.2.2

³⁹Beachte, dass $\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi^j(\tilde{z})} \int d^3 x d\theta^1 d\theta^2 \frac{1}{2i} \Phi^i(z) = \delta_j^i$ mit $\frac{\overleftarrow{\delta} \Phi^i(z)}{\delta \Phi^j(\tilde{z})} = 2i \delta_j^i \delta(x - \tilde{x}) \delta(\theta^2 - \tilde{\theta}^2) \delta(\theta^1 - \tilde{\theta}^1)$ gilt.

x-Abhängigkeit nur noch in den Regulatorfunktionen $r_1(-\partial_x^2)$ und $r_2(-\partial_x^2)$ bzw. in dem Wellenoperator $K(\partial_x)$. Daher können die fouriertransformierten Größen bzgl. der Ortsvariablen leicht ermittelt werden. Der kinetische Operator $K(\partial_x, \theta^1, \theta^2, \partial_{\theta^1}, \partial_{\theta^2})$ enthält Ableitungen nach den Superraum-Koordinaten und wirkt in der nachstehenden Formulierung der Flussgleichung (nur) auf die ihm *nachstehenden Delta-Distributionen*. Ausführlich lautet der Fluss (4.6) der trunkierten effektiven Wirkung $\Gamma_k[\Phi]$ mit (4.12) und (4.13) zunächst

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k &= \frac{i}{2} \int dz dz' (\partial_t R_k)_{mn}(z, z') (\Gamma_k^{(2)} + R_k)_{nm}^{-1}(z', z) \\ &= \frac{i}{2} \int d^3x d\theta^1 d\theta^2 d\theta^{1'} d\theta^{2'} \frac{1}{(2i)^2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [(2\dot{r}_1 - \dot{r}_2 K)_{(p, \theta^1, \theta^2)} \delta_{mn} 2i \delta(\theta^2 - \theta^{2'}) \delta(\theta^1 - \theta^{1'})] \\ &\quad \times \left\{ [(-hK_{(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})} + 2\mathcal{W}')\delta_{nm} + 2\mathcal{W}''\Phi_n\Phi_m] 2i \delta(\theta^{2'} - \theta^2) \delta(\theta^{1'} - \theta^1) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Hierbei wurde die Notation $\mathcal{W}'(\rho) := W'_k(\rho) + r_1$, $h := 1 + r_2$ und $\dot{r}_{1/2} := \partial_t r_{1/2}$ eingeführt. Nun muss das Inverse von

$$(\Gamma_k^{(2)} + R_k)_{nm} = [(-hK_{(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})} + 2\mathcal{W}')\delta_{nm} + 2\mathcal{W}''\Phi_n\Phi_m] 2i \delta_{(\theta^{2'} - \theta^2)} \delta_{(\theta^{1'} - \theta^1)} \quad (4.15)$$

– die *Greensfunktion* – gemäß Gl. (4.7) bestimmt werden. Dazu wird zunächst formal die $N \times N$ -Matrix

$$(M)_{nm}^{-1} := [(-hK + 2\mathcal{W}')\delta_{nm} + 2\mathcal{W}''\Phi_n\Phi_m] \quad (4.16)$$

invertiert und umgeformt und die Delta-Distributionen ignoriert. Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass dieses Inverse, multipliziert mit den entsprechenden Distributionen, die Bestimmungsgleichung (4.7) erfüllt. Die Ableitung der Struktur der gesuchten Matrix $(M)_{nm}$ für den speziellen Fall von zwei Superfeldern Φ_1, Φ_2 kann einfach durchgeführt werden:

$$(M)_{nm}^{-1} = \begin{pmatrix} -hK + 2(\mathcal{W}' + \mathcal{W}''\Phi_1^2) & 2\mathcal{W}''\Phi_1\Phi_2 \\ 2\mathcal{W}''\Phi_1\Phi_2 & -hK + 2(\mathcal{W}' + \mathcal{W}''\Phi_2^2) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow M_{nm} = \frac{1}{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} -hK + 2(\mathcal{W}' + \mathcal{W}''\Phi_1^2) & -2\mathcal{W}''\Phi_1\Phi_2 \\ -2\mathcal{W}''\Phi_1\Phi_2 & -hK + 2(\mathcal{W}' + \mathcal{W}''\Phi_1^2) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\text{mit } \mathcal{P} = [4h^2p^2 - 2hK(2\mathcal{W}' + \mathcal{W}''\Phi^2) + 4\mathcal{W}'(\mathcal{W}' + \mathcal{W}''\Phi^2)]. \quad (4.19)$$

Relevant für die Berechnung von (4.19) war dabei die Relation $K^2(p) = 4p^2$. Diese Identität wird gezeigt, indem man den Wellenoperator $K = \frac{1}{2}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} - \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}})$ im Impulsraum

$$K(p) = -\partial_\theta \partial_{\bar{\theta}} - (\partial_\theta \not{p} \theta) - (\bar{\theta} \not{p} \partial_{\bar{\theta}}) - p^2(\bar{\theta}\theta) \quad (4.20)$$

auf ein allgemeines Superfeld der Form (2.53) wirken lässt:

$$\begin{aligned} K^2(p)\Phi^i &= (-\partial_{\theta_k} \partial_{\bar{\theta}_k} - (\partial_{\theta_k} \not{p}_{kl} \theta_l) - (\bar{\theta}_k \not{p}_{kl} \partial_{\bar{\theta}_l}) - p^2(\bar{\theta}_k \theta_k)) \cdot (-2F^i - 2(\bar{\theta} \not{p} \Psi^i) - p^2(\bar{\theta}\theta)n^i) \\ &= 4p^2 \left(n^i + (\bar{\theta}\Psi^i) + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)F^i \right) = 4p^2\Phi^i. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Die Verallgemeinerung von (4.18) für ein $O(N)$ -Sigma-Modell mit N Superfeldern lautet offensichtlich

$$(M)_{nm} = \frac{(-hK + 2\mathcal{W}')\delta_{nm} + 2\mathcal{W}''(\Phi^2\delta_{nm} - \Phi_n\Phi_m)}{4(h^2p^2 + \mathcal{W}'(\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}''\rho) - hK(\mathcal{W}' + \mathcal{W}''\rho))}. \quad (4.22)$$

Formal ist die Eliminierung des Wellenoperators im Nenner von (4.22) notwendig. Dies wird durch die Erweiterung von (4.22) mit $[(h^2p^2 + \mathcal{W}'(\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}''\rho)) + hK(\mathcal{W}' + \mathcal{W}''\rho)]$ unter Ver-

wendung der Beziehung (4.21) realisiert. Es folgt

$$(M)_{nm} = \frac{-2[h^2 p^2 (\delta_{nm} \mathcal{W}' + \mathcal{W}'' \Phi_n \Phi_m) - \mathcal{W}' (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}'' \rho) (\mathcal{W}' \delta_{nm} + \mathcal{W}'' (\Phi^2 \delta_{nm} - \Phi_n \Phi_m))]}{4(h^2 p^2 - \mathcal{W}'^2)(h^2 p^2 - (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}'' \rho)^2)} - \frac{hK [\delta_{nm} (h^2 p^2 - \mathcal{W}'^2) - 2\mathcal{W}'' (\mathcal{W}' + \mathcal{W}'' \rho) (\Phi^2 \delta_{nm} - \Phi_n \Phi_m)]}{4(h^2 p^2 - \mathcal{W}'^2)(h^2 p^2 - (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}'' \rho)^2)} \quad (4.23)$$

$$=: \frac{-2[(f)_{nm}] - hK [(g)_{nm}]}{\mathcal{R}}, \quad \mathcal{R} := 4(h^2 p^2 - \mathcal{W}'^2)(h^2 p^2 - (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}'' \rho)^2). \quad (4.24)$$

Unter Einbeziehung des Zwischenresultates (4.24) ist die **Greensfunktion** durch

$$(G_k)_{nm(p, \theta^{1'} - \theta^1, \theta^{2'} - \theta^2)} = -\frac{[2(f)_{nm} + hK(g)_{nm}]}{\mathcal{R}}(p, \theta^{1'}, \theta^{2'}) 2i \delta(\theta^{2'} - \theta^2) \delta(\theta^{1'} - \theta^1) \quad (4.25)$$

mit den in (4.23) und (4.24) näher spezifizierten Funktionen f, g und \mathcal{R} gegeben. Jetzt soll abschließend gezeigt werden, dass die Greensfunktion (4.25) ihre Bestimmungsgleichung (4.7) erfüllt, d. h.

$$\underline{\text{z. z.:}} \int \frac{d\theta^1 d\theta^2}{2i} (G_k)_{mn(p, \theta^{2'} - \theta^2, \theta^{1'} - \theta^1)} (\Gamma^{(2)} + R_k)_{np(p, \theta^2 - \tilde{\theta}^2, \theta^1 - \tilde{\theta}^1)} = 2i \delta_{mp} \delta_{(\theta^{2'} - \tilde{\theta}^2)} \delta_{(\theta^{1'} - \tilde{\theta}^1)}. \quad (4.26)$$

Beweis: Die linke Seite (LHS) in (4.26) lautet explizit unter Verwendung von (4.15) und (4.25)

$$LHS = \int \frac{d\theta^1 d\theta^2}{2i} \frac{[-hK g_{mn} - 2f_{mn}]_{(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})}}{\mathcal{R}_{(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})}} 2i \delta_{(\theta^{2'} - \theta^2)} \delta_{(\theta^{1'} - \theta^1)} \times \\ [-hK \delta_{np} + 2(\mathcal{W}' \delta_{np} + \mathcal{W}'' \Phi_n \Phi_p)]_{(p, \theta^1, \theta^2)} 2i \delta_{(\theta^2 - \tilde{\theta}^2)} \delta_{(\theta^1 - \tilde{\theta}^1)} \quad (4.27)$$

• Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(K^0)$ können unter Beachtung der Integrationsregeln für Grassmann-Variablen $\int d\theta^1 \delta_{(\theta^1 - \theta^{1'})} \mathcal{F}_{(\theta^1, \theta^1)} = \mathcal{F}_{(\theta^1, \theta^{1'})}$ usw. ausgewertet werden:

$$LHS_{\mathcal{O}(K^0)} = -4 \left(\frac{f_{mn} (\mathcal{W}' \delta_{np} + \mathcal{W}'' \Phi_n \Phi_p)}{\mathcal{R}} \right) (p, \theta^{1'}, \theta^{2'}) 2i \delta_{(\theta^{2'} - \tilde{\theta}^2)} \delta_{(\theta^{1'} - \tilde{\theta}^1)}. \quad (4.28)$$

• Die Terme linear in dem Wellenoperator $\mathcal{O}(K^1)$ summieren sich unter Verwendung der Beziehung $g_{mn} (\mathcal{W}' \delta_{np} + \mathcal{W}'' \Phi_n \Phi_p) = f_{mp}$ zu Null:

$$LHS_{\mathcal{O}(K^1)} = \int d\theta^1 d\theta^2 4i h \left([K_{(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})} \delta_{(\theta^{2'} - \theta^2)} \delta_{(\theta^{1'} - \theta^1)}] \left(-\frac{g_{mn} (\mathcal{W}' \delta_{np} + \mathcal{W}'' \Phi_n \Phi_p)}{\mathcal{R}} \right)_{(p, \theta^1, \theta^2)} \right. \\ \left. \times \delta_{(\theta^2 - \tilde{\theta}^2)} \delta_{(\theta^1 - \tilde{\theta}^1)} + \frac{f_{mp(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})}}{\mathcal{R}_{(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})}} \delta_{(\theta^{2'} - \theta^2)} \delta_{(\theta^{1'} - \theta^1)} [K_{(p, \theta^1, \theta^2)} \delta_{(\theta^2 - \tilde{\theta}^2)} \delta_{(\theta^1 - \tilde{\theta}^1)}] \right) \\ = 4i h [K_{(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})} \delta_{(\theta^{2'} - \tilde{\theta}^2)} \delta_{(\theta^{1'} - \tilde{\theta}^1)}] \left(-\frac{f_{mp}}{\mathcal{R}}(p, \tilde{\theta}^1, \tilde{\theta}^2) + \frac{f_{mp}}{\mathcal{R}}(p, \theta^{1'}, \theta^{2'}) \right) = 0. \quad (4.29)$$

• Ausdrücke der Ordnung $\mathcal{O}(K^2)$ ergeben das nachstehende Resultat

$$LHS_{\mathcal{O}(K^2)} = \int d\theta^1 d\theta^2 2i h^2 \frac{g_{mp(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})}}{\mathcal{R}_{(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})}} [K_{(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})} \delta_{(\theta^{2'} - \theta^2)} \delta_{(\theta^{1'} - \theta^1)}] [K_{(p, \theta^1, \theta^2)} \delta_{(\theta^2 - \tilde{\theta}^2)} \delta_{(\theta^1 - \tilde{\theta}^1)}] \\ = 4h^2 p^2 \frac{g_{mp(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})}}{\mathcal{R}_{(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})}} 2i \delta_{(\theta^{2'} - \tilde{\theta}^2)} \delta_{(\theta^{1'} - \tilde{\theta}^1)}. \quad (4.30)$$

Unter Einbeziehung der Gleichung $4(h^2 p^2 g_{mp} - f_{mn} (\mathcal{W}' \delta_{np} + \mathcal{W}'' \Phi_n \Phi_p)) = \mathcal{R} \delta_{mp}$ folgt für die LHS von (4.26) nun das erwünschte Ergebnis

$$LHS = 4 \left[\frac{h^2 p^2 g_{mp} - f_{mn} (\mathcal{W}' \delta_{np} + \mathcal{W}'' \Phi_n \Phi_p)}{\mathcal{R}} \right]_{(p, \theta^{1'}, \theta^{2'})} 2i \delta_{(\theta^{2'} - \tilde{\theta}^2)} \delta_{(\theta^{1'} - \tilde{\theta}^1)} \\ = \delta_{mp} 2i \delta_{(\theta^{2'} - \tilde{\theta}^2)} \delta_{(\theta^{1'} - \tilde{\theta}^1)}. \blacksquare \quad (4.31)$$

Die ermittelten Ausdrücke für den supersymmetrischen Regulator $(R_k)_{mn}$ (4.13) sowie den verbundenen Propagator $(G_k)_{nm}$ (4.23)-(4.25) können jetzt in die Flussgleichung für Γ_k (4.4) eingesetzt werden. Dabei vereinfacht sich die Struktur der Greensfunktion stark aufgrund der Diagonalität der Regulator-Matrix $(R_k)_{mn} \propto \delta_{mn}$. D. h. die Spur $(R_k)_{mn}(G_k)_{nm} \propto \delta_{mn}(G_k)_{nm} \propto (G_k)_{mm}$ bezüglich der Feldindizes entspricht der Spur der Greensfunktion. Die Flussgleichung vereinfacht sich somit zu⁴⁰

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k = & \frac{i}{2} \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^{1'} d\theta^{2'} \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [(2\dot{r}_1 - \dot{r}_2 K)_{(p, \theta^1, \theta^2)} \delta(\theta^2 - \theta^{2'}) \delta(\theta^1 - \theta^{1'})] \times \\ & \left[\frac{-2 [h^2 p^2 (N\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}''\rho) - \mathcal{W}'(\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}''\rho)(N\mathcal{W}' + 2(N-1)\mathcal{W}''\rho)]}{4(h^2 p^2 - \mathcal{W}'^2)(h^2 p^2 - (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}''\rho)^2)} \right. \\ & \left. - \frac{hK [N(h^2 p^2 - \mathcal{W}'^2) - 4(N-1)\mathcal{W}''(\mathcal{W}' + \mathcal{W}''\rho)\rho]}{4(h^2 p^2 - \mathcal{W}'^2)(h^2 p^2 - (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}''\rho)^2)} \right] \delta(\theta^{2'} - \theta^2) \delta(\theta^{1'} - \theta^1). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Obige Flussgleichung (4.32) besitzt Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(K^0)$, $\mathcal{O}(K^1)$ und $\mathcal{O}(K^2)$ in dem Wellenoperator K . Wie bereits erwähnt wurde, ist zu beachten, dass dieser Operator von den Grassmann-Variablen θ^1 und θ^2 sowie Ableitungen nach selbigen abhängt und auf die jeweils nachstehenden zwei Delta-Distributionen wirkt. Da die Delta-Distribution einer Grassmannzahl identisch dieser Zahl ist ($\delta(\theta^1) = \theta^1$) und selbige nilpotent ($(\theta^1)^2 = 0$) sind, tragen Terme der Ordnung $\mathcal{O}(K^0)$ nicht bei. Weiterhin wird in (4.34) gezeigt, dass Terme der Ordnung $\mathcal{O}(K^2)$ nach Ausintegration der Grassmann-Koordinaten ebenfalls identisch Null sind. Beiträge linear in K ergeben nach der Ausintegration der Grassmann-Variablen⁴¹ $\theta^{1'}$ und $\theta^{2'}$ den multiplikativen Faktor $2i$. \mathcal{F} steht dabei in (4.33) und (4.35) für eine beliebige Funktion der Grassmann-Koordinaten θ^1 und θ^2 .

$$\begin{aligned} & \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^{1'} d\theta^{2'} \mathcal{F}(\theta^{1'}, \theta^{2'}) [K(p, \theta^1, \theta^2) \delta(\theta^2 - \theta^{2'}) \delta(\theta^1 - \theta^{1'})] \delta(\theta^{2'} - \theta^2) \delta(\theta^{1'} - \theta^1) \\ & \stackrel{(4.20)}{=} \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^{1'} d\theta^{2'} \mathcal{F}(\theta^{1'}, \theta^{2'}) \left[2i - 2i\bar{\theta}p\theta' - \frac{1}{2i}\bar{\theta}\theta\bar{\theta}'\theta'p^2 \right] \delta(\theta^{2'} - \theta^2) \delta(\theta^{1'} - \theta^1) \\ & = \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^{1'} d\theta^{2'} \mathcal{F}(\theta^{1'}, \theta^{2'}) 2i \delta(\theta^{2'} - \theta^2) \delta(\theta^{1'} - \theta^1) = 2i \int d\theta^1 d\theta^2 \mathcal{F}(\theta^1, \theta^2). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die Summe der Ausdrücke der Ordnung $\mathcal{O}(K^2)$ ist identisch Null:

$$\begin{aligned} & \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^{1'} d\theta^{2'} [K(p, \theta^1, \theta^2) \delta(\theta^2 - \theta^{2'}) \delta(\theta^1 - \theta^{1'})][K(p, \theta^{1'}, \theta^{2'}) \delta(\theta^{2'} - \theta^2) \delta(\theta^{1'} - \theta^2)] \mathcal{F}(\theta^{1'} \theta^{2'}) \\ & = \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^{1'} d\theta^{2'} [\bar{\theta}\theta\bar{\theta}'\theta'(2p^2 - 2p^2) - 2] \mathcal{F}(\theta^{1'} \theta^{2'}) \equiv 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die Ausintegration der Grassmann-Variablen $\theta^{1'}$ und $\theta^{2'}$ in der Flussgleichung (4.32) führt mit (4.33) und (4.34) auf die **Flussgleichung**

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k = & \int d^3x d\theta^1 d\theta^2 \dot{W}_k(\rho) \\ & = \frac{i}{2} \int d^3x d\theta^1 d\theta^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{(N-1)(\dot{r}_1 h - \dot{r}_2 \mathcal{W}')}{h^2 p^2 - \mathcal{W}'^2} + \frac{\dot{r}_1 h - \dot{r}_2 (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}''\rho)}{h^2 p^2 - (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}''\rho)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

im $\mathbb{R}^{3|2}$ -Superraum. Obige Ableitung basierte auf Quantenfeldern in der dreidimensionalen Minkowski-Raumzeit. Um das Resultat (4.35) in den euklidischen Raum zu überführen, wird die erste Impulskomponente $p^0 \rightarrow ip_E^0$ ($\Rightarrow x^0 \rightarrow -ix_E^0$) Wick-rotiert. Dadurch erhält man die

⁴⁰Es gilt $\delta_{mm} = N$.

⁴¹Genutzt wird die Darstellung $\delta(\theta^2 - \theta^{2'})\delta(\theta^1 - \theta^{1'}) = \frac{1}{2i}(\bar{\theta}\theta + \bar{\theta}'\theta') + i\bar{\theta}\theta'$ der Delta-Funktion.

euklidische Signatur $\eta_{\mu\nu} \rightarrow -\delta_{\mu\nu}$ sowie $\int d^3p \rightarrow i \int d^3p_E$ und $p^2 \rightarrow -p_E^2$. Die **euklidische Flussgleichung** des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells besitzt demnach die Struktur

$$\int_{x_E, \theta^1, \theta^2} \dot{W}_k(\rho) = \frac{1}{2} \int_{x_E, \theta^1, \theta^2} \int \frac{d^3p_E}{(2\pi)^3} \left(\frac{(N-1)(\dot{r}_1 h - \dot{r}_2 \mathcal{W}')}{h^2 p_E^2 + \mathcal{W}'^2} + \frac{\dot{r}_1 h - \dot{r}_2 (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}'' \rho)}{h^2 p_E^2 + (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}'' \rho)^2} \right). \quad (4.36)$$

In weiteren Betrachtungen wird auf den Index „E“ zur Kennzeichnung der euklidischen Koordinaten und Impulse verzichtet. Die Integranden in (4.36) stellen superanalytische Funktionen von $\rho = \frac{1}{2} \Phi^i \Phi_i$ dar. Diese können – falls zweifache Differenzierbarkeit der Integranden gewährleistet ist – nach (2.64) und (2.65) um die niedrigste Komponente $\tilde{\rho} = \frac{1}{2} n^i n_i$ des Superfeldes ρ in eine nach dem zweiten Glied abbrechende Taylorreihe gemäß

$$\begin{aligned} f(\rho) &= f(\tilde{\rho}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f^{(j)}(\tilde{\rho})}{j!} (\rho_S)^j \\ &= f(\tilde{\rho}) + f'(\tilde{\rho}) \left((\bar{\theta} \Psi_i) n^i + \bar{\theta} \theta F^i n_i - \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta (\bar{\Psi}^i \Psi_i) \right) - \frac{1}{4} f''(\tilde{\rho}) \bar{\theta} \theta \bar{\Psi}^i \Psi^j n_i n_j \end{aligned} \quad (4.37)$$

entwickelt werden. Zu den Grassmann-Integrationen tragen jeweils nur Terme in $\bar{\theta} \theta$ bei. Bezeichnet man den Integranden der rechten Seite der Flussgleichung (4.36) mit „*RHS*“ und setzt die Entwicklung der Integranden (4.37) ein, so folgt

$$\begin{aligned} &\int d^3x \left[(\partial_t W_k)'(\tilde{\rho}) \left(F^i n_i - \frac{1}{2} (\bar{\Psi}^i \Psi_i) \right) - \frac{1}{4} (\partial_t W_k)''(\tilde{\rho}) \bar{\Psi}^i \Psi^j n_i n_j \right] \\ &= \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[(RHS)'(\tilde{\rho}) \left(F^i n_i - \frac{1}{2} (\bar{\Psi}^i \Psi_i) \right) - \frac{1}{4} (RHS)''(\tilde{\rho}) \bar{\Psi}^i \Psi^j n_i n_j \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Diese Gleichung gilt für *beliebige konstante* (d. h. von x unabhängige) Komponentenfelder n^i , Ψ^i und F^i , sodass aus ihr die nachstehende Flussgleichung

$$\begin{aligned} (\partial_t W_k)'(\tilde{\rho}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (RHS)'(\tilde{\rho}) \quad \text{bzw. ausführlich} \\ \partial_t W_k'(\tilde{\rho}) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d}{d\tilde{\rho}} \left(\frac{(N-1)(\dot{r}_1 h - \dot{r}_2 \mathcal{W}')}{h^2 p^2 + \mathcal{W}'^2} + \frac{\dot{r}_1 h - \dot{r}_2 (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}'' \tilde{\rho})}{h^2 p^2 + (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}'' \tilde{\rho})^2} \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

für die jetzt *bosonische* (d. h. keine Grassmann-Koordinaten enthaltende) Funktion $W_k'(\tilde{\rho})$ extrahiert werden kann. Da die partiellen Ableitungen gemäß $\partial_{t, \tilde{\rho}} W_k(\tilde{\rho}) = \partial_{\tilde{\rho}, t} W_k(\tilde{\rho})$ einerseits und die partielle Ableitung nach $\tilde{\rho}$ mit dem Impulsintegral $\int_p \partial_{\tilde{\rho}} = \partial_{\tilde{\rho}} \int_p$ andererseits vertauschen⁴², besitzt obige Flussgleichung (4.39) auch in der Form

$$\partial_t W_k(\tilde{\rho}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{(N-1)(\dot{r}_1 h - \dot{r}_2 \mathcal{W}')}{h^2 p^2 + \mathcal{W}'^2} + \frac{\dot{r}_1 h - \dot{r}_2 (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}'' \tilde{\rho})}{h^2 p^2 + (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}'' \tilde{\rho})^2} \right) \quad (4.40)$$

Gültigkeit. (Gleichung (4.40) gilt bis auf eine additive Funktion $F(t)$. Diese wurde in (4.40) Null gesetzt, da sie einen für alle $\tilde{\rho}$ identischen Flussbeitrag liefert und folglich physikalisch irrelevant

⁴²I) Aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen n -ter Ordnung einer Funktion kann nach dem *Satz von Schwarz* auf die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge geschlossen werden.

II) Für die im weiteren Verlauf gewählten Regulatorfunktionen (4.53) ist der Integrand $\forall p = |\vec{p}| \in [0, k]$ bzw. $\forall \tilde{\rho} \in [0, \infty)$ definiert und für jedes konstante $\tilde{\rho}$ stetig bezüglich p . Weiterhin existiert überall die partielle Ableitung des Integranden nach $\tilde{\rho}$ und sei stetig. Dann vertauschen partielle Ableitung und Integration.

ist.) Weiterhin sollte immer explizit anhand der verwendeten Regulatorfunktionen $r_1(p^2, k)$ und $r_2(p^2, k)$ überprüft werden, ob partielle Integration und Differentiation vertauschen und somit die Flussgleichung (4.39) in die Form (4.40) überführt werden kann.

Die Struktur der erhaltenen Flussgleichung (4.40) erlaubt den generellen *Vergleich* mit den entsprechenden Resultaten anderer $O(N)$ -symmetrischer Theorien. Es können folgende **Analogien** gezogen werden:

(a) Die spezielle Wahl $N = 1$ in (4.40) führt auf die Flussgleichung

$$\partial_t W_k(\tilde{\rho}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{\dot{r}_1 h - \dot{r}_2 (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}''\tilde{\rho})}{h^2 p^2 + (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}''\tilde{\rho})^2} \right) \quad (4.41)$$

in exakter Übereinstimmung mit der in [16] hergeleiteten Flussgleichung⁴³ des $\mathcal{N} = 1$ **Wess-Zumino-Modells** in $d = 3$.

(b) Es liegt nahe, dass die Verallgemeinerung der Flussgleichung (4.40) für den **d-dimensionalen euklidischen Raum** durch den Ausdruck

$$\partial_t W_k(\tilde{\rho}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\frac{(N-1)(\dot{r}_1 h - \dot{r}_2 \mathcal{W}')}{h^2 p^2 + \mathcal{W}'^2} + \frac{\dot{r}_1 h - \dot{r}_2 (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}''\tilde{\rho})}{h^2 p^2 + (\mathcal{W}' + 2\mathcal{W}''\tilde{\rho})^2} \right). \quad (4.42)$$

mit $\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \rightarrow \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$ repräsentiert wird. Untermuert wird dies z. B. durch die in [15] untersuchte *Flussgleichung* des $\mathcal{N} = 1$ Wess-Zumino-Modells in $d = 2$ euklidischen Dimensionen. Diese ergibt sich aus (4.42) für $N = 1$ und $d = 2$ in natürlicher Weise. Liegt dem supersymmetrischen $O(1)$ -Modell die eindimensionale „Zeit“ zugrunde, so handelt es sich um ein der *supersymmetrischen Quantenmechanik* äquivalentes Modell, dessen Flussgleichung in [14] untersucht wurde.

(c) In Abschnitt 4.2 werden die Regulatorfunktionen näher spezifiziert, wobei $r_1(k, p^2)$ identisch Null gesetzt wird ($\Rightarrow \mathcal{W}' = W'_k$). Für diese Wahl der Regulatorfunktionen ist eine **Gegenüberstellung der Flussgleichungen** des supersymmetrischen- und skalaren $O(N)$ -Modells in LPA (siehe [6], Kapitel 2.4, (2.36)-(2.37)) interessant:

$$\partial_t V_k(\tilde{\rho}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\partial_t R_k) \left(\frac{(N-1)}{p^2 + R_k + M_0} + \frac{1}{p^2 + R_k + M_1} \right), \quad (4.43)$$

$$\partial_t \mathbf{W}_k(\tilde{\rho}) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\partial_t r_2) \left(\frac{(N-1) \mathbf{W}'_k}{p^2 + (\mathbf{2r}_2 + \mathbf{r}_2^2) \mathbf{p}^2 + \mathbf{M}_0} + \frac{(\mathbf{W}'_k + \mathbf{2W}''_k \tilde{\rho})}{p^2 + (\mathbf{2r}_2 + \mathbf{r}_2^2) \mathbf{p}^2 + \mathbf{M}_1} \right) \quad (4.44)$$

$$\text{mit } M_0 = V'_k, \quad M_1 = V'_k + 2V''_k \tilde{\rho} \quad \text{und} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{M}_0 = W_k'^2, \quad \mathbf{M}_1 = (W_k' + 2W_k'' \tilde{\rho})^2. \quad (4.46)$$

Gleichung (4.43) stellt den Fluss des bosonischen $O(N)$ -Modells in LPA mit der trunkierten Mittelwertwirkung $\Gamma_k[n^i] = \int d^3 x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu n^i \partial^\mu n_i + V_k(\tilde{\rho}) \right]$ dar. Trotz der formalen Unterschiede zwischen den Flussgleichungen (4.43) und (4.44), die in (4.44) **fett** hervorgehoben sind, weisen diese eine sehr ähnliche Struktur auf. Generell besitzen beide Theorien

- die innere kontinuierliche $O(N)$ -Symmetrie als Symmetrie der Wirkung,
- das skalenabhängige Potential $V_k(\tilde{\rho})$ als die essenzielle Größe, aus der die Grundzustandsenergie, erhaltene- und spontan gebrochene Symmetrien oder das Massenspektrum der Anregungen bestimmt werden können [6].

Für die weiteren Betrachtungen sind die Bezeichnungen $\tilde{\rho} = 1/2 n^i n_i = 1/2 \vec{n} \cdot \vec{n}$ für das Skalarprodukt der Felder n_i mit $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)^T$ relevant. Es werde o. B. d. A. $\tilde{\rho}_0 = 1/2 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = 1/2 n_0^2$ mit $\vec{n}_0 = (n_0, 0, \dots, 0)^T$ für das Minimum des *effektiven* Potentials gewählt. Eine rotationsinvariante Theorie besitzt allgemein zwei Phasen, die durch das Minimum $\tilde{\rho}_0$ des effektiven Potentials

⁴³Für $N = 1$ entspricht $W_k'(\tilde{\rho}) + 2W_k''(\tilde{\rho})\tilde{\rho} = W_k''(n)$ mit $\tilde{\rho} = \frac{1}{2} n^2$.

$V_{k \rightarrow 0}$ charakterisiert werden können: Die $O(N)$ -symmetrische Phase ist gekennzeichnet durch $\tilde{\rho}_0 = 0$, die spontan $O(N)$ -gebrochene Phase⁴⁴ hingegen durch $\tilde{\rho}_0 > 0$. In dem skalaren $O(N)$ -Modell wird durch (4.43) direkt der Fluss des physikalischen Potentials V_k bestimmt, wohingegen in supersymmetrischen $O(N)$ -Modellen das Potential durch $V_k = [W'_k(\tilde{\rho})]^2 \tilde{\rho}$ gegeben ist. Dies bedeutet auch (siehe Kapitel 3.2.1), dass das Potential in supersymmetrischen $O(N)$ -Modellen im Gegensatz zu skalaren $O(N)$ -Theorien *nicht konvex* sein muss.

Die *Krümmung* als die zweite partielle Ableitung nach den Skalarfeldern n^i des effektiven Potentials $V \equiv V_{k \rightarrow 0}$ an dessen Minimum $\tilde{\rho}_0$ entspricht den renormierten, quadrierten **Teilchenmassen**. Diese lauten

$$M^2 = V'|_{\tilde{\rho}_0=0} \quad \left. \vphantom{M^2} \right\} O(N)\text{-symmetrische Phase} \quad (4.47)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{rad}^2 &= (V' + 2V''\tilde{\rho})|_{\tilde{\rho}_0} \\ M_{Gold}^2 &= V'|_{\tilde{\rho}_0} \end{aligned} \right\} \text{spontan } O(N)\text{-gebrochene Phase.} \quad (4.48)$$

Die Krümmung des effektiven Potentials V entlang der n_1 -Richtung in dessen Minimum \vec{n}_0

$$\frac{\partial^2 V}{\partial(n_1)^2} \Big|_{(\vec{n}_0)} = (V'(\tilde{\rho}) + V''(\tilde{\rho})(n_1)^2) \Big|_{(\tilde{\rho}_0)} = V'(\tilde{\rho}_0) + 2V''(\tilde{\rho}_0)\tilde{\rho}_0 \quad (4.49)$$

beschreibt eine **radiale Mode** der Masse M_{rad} entsprechend Gl. (4.48). Die Krümmung des Potentials senkrecht zu dem Feld n_1 (es existieren $N - 1$ zu n_1 senkrechte Richtungen) in dessen Minimum \vec{n}_0 ergibt hingegen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial(n_i)^2} \Big|_{(\vec{n}_0)} = (V'(\tilde{\rho}) + V''(\tilde{\rho})(n_i)^2) \Big|_{(\tilde{\rho}_0)} = V'(\tilde{\rho}_0) \quad \text{mit} \quad i \neq 1. \quad (4.50)$$

D.h. der zweite Ausdruck in (4.48) beschreibt $N - 1$ **Goldstone-Moden** bzw. **Goldstone-Bosonen** mit $M_{Gold}^2 = V'(\tilde{\rho}_0)$. Diese Anregungen sind jedoch *masselos*, da $\tilde{\rho}_0$ ein Minimum von V kennzeichnet und somit $V'(\tilde{\rho}_0) = 0$ gilt.

Es stellt sich nun die Frage, ob radialen- bzw. Goldstone-Moden in den Flussgleichungen (4.43) und (4.44) des skalaren- bzw. supersymmetrischen $O(N)$ -Modells identifiziert werden können. In der Flussgleichung (4.43) des *skalaren $O(N)$ -Modells* sind diese Massen offensichtlich durch M_0 und M_1 in (4.45) gegeben. Analog können die Ausdrücke \mathbf{M}_0 und \mathbf{M}_1 (4.46) in der *supersymmetrischen Flussgleichung* (4.44) ebenfalls als Teilchenmassen der radialen- und der $N - 1$ tangentialen Moden interpretiert werden. Generell besitzt das effektive Potential $V = \lim_{k \rightarrow 0} [W'_k(\tilde{\rho})]^2 \tilde{\rho}$ für ein in $\tilde{\rho}$ polynomiales $W_k(\tilde{\rho})$ sowohl an der Stelle $\tilde{\rho} = 0$ als auch für ein mögliches $\tilde{\rho}_0$ mit $W'_{k \rightarrow 0}(\tilde{\rho}_0) = 0$ den Wert Null. Existiert eine spontan gebrochene Phase mit $\tilde{\rho}_0 > 0$, wobei $W'_{k \rightarrow 0}(\tilde{\rho}_0) = 0$ gelten soll, so entspräche den quadrierten Massen der Goldstone-Moden bzw. der radialen Mode

$$M_{Gold}^2 = V'|_{\tilde{\rho}_0} = \lim_{k \rightarrow 0} (2W'_k W''_k \tilde{\rho} + W_k'^2) \Big|_{\tilde{\rho}_0} = 0 \quad \text{und} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} M_{rad}^2 &= (V' + 2V''\tilde{\rho}) \Big|_{\tilde{\rho}_0} = \lim_{k \rightarrow 0} ((W'_k + 2W''_k \tilde{\rho})^2 + 6W'_k W''_k \tilde{\rho} + 4W'_k W_k''' \tilde{\rho}^2) \Big|_{\tilde{\rho}_0} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} (2W''_k \tilde{\rho})^2 \Big|_{\tilde{\rho}_0} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Obige Gleichungen zeigen, dass die Interpretation von \mathbf{M}_0 und \mathbf{M}_1 in (4.44) als Teilchenmassen der radialen- und der Goldstone-Mode(n) richtig ist.

⁴⁴Eine Symmetrie ist *spontan gebrochen*, falls der Grundzustand und nur dieser nicht invariant unter der betrachteten Symmetrie ist.

4.2 Spezifizierung der Regulatorfunktionen

In Abschnitt 3.4, Gl. (3.30) wurden die Regulatorfunktionen $r_1(p^2, k)$ und $r_2(p^2, k)$ eingeführt. Die Funktion $r_1(p^2, k)$ fungiert dabei als impulsabhängiger Massenterm, der Regulator $r_2(p^2, k)$ hingegen als ein die Impulsabhängigkeit des kinetischen Termes beeinflussender Beitrag. Die Regulatorfunktionen werden nun durch die Wahl

$$r_1(p^2, k) = 0 \quad \text{und} \quad r_2(p^2, k) = \left(\frac{k}{|p|} - 1 \right) \Theta(k^2 - p^2) \quad (4.53)$$

spezifiziert. Ein positiver Aspekt dieser Wahl ist die analytische Auswertung der Impulsintegrationen. In dieser Arbeit soll nicht näher auf die mögliche Optimierung des Flusses von W_k durch die gezielte Wahl bestimmter Regulatoren eingegangen werden⁴⁵. (4.53) führt mit $h = 1 + r_2$ sowie $\mathcal{W}' = (r_1 + W'_k) \stackrel{(4.53)}{=} W'_k$ (siehe Kapitel 4.1) auf die Flussgleichung (4.44). Erfüllen nun die gewählten Regulatorfunktionen die an sie gestellten Forderungen (3.12)-(3.14)?

Der im Nenner der Flussgleichung (4.44) auftretende Regulatorbeitrag gewährleistet mit

$$\lim_{(p/k)^2 \rightarrow 0} (2r_2(p^2, k) + r_2^2(p^2, k))p^2 \rightarrow k^2 \quad (4.54)$$

die Infrarotregularisierung für kleine Impulse. Weiterhin garantieren

$$\lim_{(k/p)^2 \rightarrow 0} r_2(p^2, k) \rightarrow 0 \quad \text{für festes } p \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} r_2(p^2, k) \rightarrow \infty \quad (4.55)$$

die geforderten Grenzfälle der vollen Quantenwirkung $\Gamma_{k \rightarrow 0} = \Gamma$ bzw. der klassischen Wirkung $\Gamma_{k \rightarrow \Lambda} = S$. Auch bedingt der Ableitungsterm

$$\partial_t r_2(p^2, k) = \frac{k}{|p|} \Theta(k^2 - p^2) + \left(\frac{k}{|p|} - 1 \right) \delta(k^2 - p^2) 2k^2 \quad (4.56)$$

in (4.44) durch das Herausfiltern aller Moden mit $p^2 > k^2$ UV-Regularisierung.

Die analytische Auswertung der Impulsintegrationen kann nun durchgeführt werden. Dies werde zunächst für die Flussgleichung in d Raumdimensionen (4.42) ausgeführt und dann entsprechend auf $d = 3$ beschränkt. Unter Verwendung der in (4.53) definierten Regulatorfunktionen resultiert

$$\partial_k W_k(\tilde{\rho}) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \partial_k r_2 \left(\frac{(N-1)W'_k}{(1+r_2)^2 p^2 + W_k'^2} + \frac{W'_k + 2W_k'' \tilde{\rho}}{(1+r_2)^2 p^2 + (W'_k + 2W_k'' \tilde{\rho})^2} \right) \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d \Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^k dp p^{d-2} \left(\frac{(N-1)W'_k}{k^2 + W_k'^2} + \frac{W'_k + 2W_k'' \tilde{\rho}}{k^2 + (W'_k + 2W_k'' \tilde{\rho})^2} \right) \\ &= -\underbrace{\frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d \Gamma(\frac{d}{2})(d-1)}}_{=: \alpha_d} k^{d-1} \left(\frac{(N-1)W'_k}{k^2 + W_k'^2} + \frac{W'_k + 2W_k'' \tilde{\rho}}{k^2 + (W'_k + 2W_k'' \tilde{\rho})^2} \right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$= -\alpha_d k^{d-1} \left(\frac{(N-1)W'_k}{k^2 + W_k'^2} + \frac{W'_k + 2W_k'' \tilde{\rho}}{k^2 + (W'_k + 2W_k'' \tilde{\rho})^2} \right) \quad (4.59)$$

mit der Gammafunktion $\Gamma(\frac{d}{2})$. Die entsprechende Flussgleichung für die Ableitung des Superpotentials $W'(\tilde{\rho})$ lautet

$$\partial_k W'_k(\tilde{\rho}) = -\alpha_d k^{d-1} \left[(N-1)W_k'' \frac{k^2 - W_k'^2}{(k^2 + W_k'^2)^2} + (3W_k'' + 2W_k''' \tilde{\rho}) \frac{k^2 + (W'_k + 2W_k'' \tilde{\rho})^2}{(k^2 + (W'_k + 2W_k'' \tilde{\rho})^2)^2} \right]. \quad (4.60)$$

⁴⁵Siehe bzgl. der Optimierung des Renormierungsgruppenflusses z. B. [4, 9]

Zur konkreten Untersuchung (insbesondere der Fixpunktlösungen) der erhaltenen Flussgleichung bietet sich eine Umformulierung von (4.60) in dimensionslosen Größen an. Mit Beachtung der Einheiten $[\tilde{\rho}] = [k^{d-2}]$ und $[W'_k(\tilde{\rho})] = [k]$ in d euklidischen Dimensionen ergibt sich mit den Variablensubstitutionen

$$\tilde{\rho} \longrightarrow \hat{\rho} := \tilde{\rho} k^{2-d} \quad (4.61)$$

$$W'_k(\tilde{\rho}) \longrightarrow u_t(\hat{\rho}) := W'_k(\tilde{\rho}) k^{-1} \quad (4.62)$$

$$\Rightarrow W''_k(\tilde{\rho}) = u'(\hat{\rho}) k^{3-d}, \quad W'''_k(\tilde{\rho}) = u''(\hat{\rho}) k^{5-2d} \quad (4.63)$$

aus (4.60) die **dimensionslose Flussgleichung** für das Skalenverhalten des dimensionslosen Analogons $u_t(\hat{\rho})$ von $W'_k(\tilde{\rho})$ zu⁴⁶

$$\partial_t u_t(\hat{\rho}) = -u + (d-2)u'\hat{\rho} - \alpha_d \left((N-1)u' \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)^2} + (3u' + 2u''\hat{\rho}) \frac{(1-(u+2u'\hat{\rho})^2)}{(1+(u+2u'\hat{\rho})^2)^2} \right). \quad (4.64)$$

Die Spezialisierung auf $d = 3$ Raumdimensionen führt mit $\alpha_3 = 1/(8\pi^2)$ somit zu den gesuchten *Renormierungsgruppen-Flussgleichungen*, die zusammenfassend

$$\begin{aligned} \partial_k W'_k(\tilde{\rho}) &= -\frac{k^2}{8\pi^2} \left((N-1)W'' \frac{k^2 - W'^2}{(k^2 + W'^2)^2} + (3W'' + 2W''' \tilde{\rho}) \frac{k^2 + (W' + 2W'' \tilde{\rho})^2}{(k^2 + (W' + 2W'' \tilde{\rho})^2)^2} \right), \\ \partial_t u_t(\hat{\rho}) &= -u + u'\hat{\rho} - \frac{1}{8\pi^2} \left((N-1)u' \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)^2} + (3u' + 2u''\hat{\rho}) \frac{(1-(u+2u'\hat{\rho})^2)}{(1+(u+2u'\hat{\rho})^2)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

für das dimensionsbehaftete bzw. das dimensionslose Superpotential lauten. Eine analytische Behandlung dieser *nichtlinearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung* ist äußerst problematisch. Einen möglichen Weg, das supersymmetrische $O(N)$ -Modell und dessen Skalenverhalten dennoch zu beschreiben, bietet die numerische Behandlung von (4.65). Ein anderer Weg wird durch die Untersuchung des Grenzfalles $N \gg 1$ eröffnet. Dieser **Large-N-Limit** ermöglicht in vielen analytisch nicht zugänglichen Theorien der Quantenfeldtheorie eine korrekte Beschreibung der Physik. Motivierend sei die Behandlung des skalaren $O(N)$ -Modells in $d = 3$ im Large- N -Limit genannt, die in [6] (Abschnitt 3.3, Seite 40) wie folgt charakterisiert wird:

„In summary, the exact solution of the flow equation for the average potential in the limit $N \rightarrow \infty$ provides a very detailed quantitative description for the “transition to complexity“.“

D. h. es ist zu erwarten, dass die Behandlung des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells im Limes $N \rightarrow \infty$ die korrekte quantitative Beschreibung der Fixpunkt- und folglich der Phasenstruktur erlaubt. Des Weiteren verhält sich die aus der Wellenfunktionsrenormierung durch $\eta = -\partial_t \ln Z_k$ hervorgehende anormale Dimension wie $\eta \sim 1/N$. Die nächste Ordnung $\mathcal{O}(K)$ in der Gradientenentwicklung in Gl.(4.1), die eine feldabhängige Wellenfunktionsrenormierung $Z_k(\rho)$ mit einschließt, trägt somit im Limes $N \rightarrow \infty$ nicht bei⁴⁷. Im Allgemeinen greift der Large- N -Limit weiter und findet bei der Untersuchung von Theorien mit einer internen Symmetriegruppe wie z. B. der $SU(N)$ ⁴⁸ oder der $SO(N)$ Anwendung. Weiterhin dient diese Entwicklung in der Molekularfeldtheorie (mean field theory) der modellhaften Beschreibung freier Teilchen in einem konstanten externen Feld und der Phasenübergänge [1].

Die Betrachtung des Limes $N \gg 1$ wird im nächsten Kapitel im Mittelpunkt stehen und auf eine exakte implizite Lösung von (4.65) in diesem Limes führen.

⁴⁶ Auf den Index t der Funktion $u_t(\hat{\rho})$ wird in den weiteren Ausführungen zwecks Übersichtlichkeit oft verzichtet.

⁴⁷ Bzgl. der Behandlung des skalaren $O(N)$ -Modells im Large- N -Limit siehe auch [6, 11, 12].

⁴⁸ Auch in der QCD ($\Rightarrow SU(3)$) wird der Large- N -Limit betrachtet, auch wenn hier nur $N = 3$ gilt.

5 Die Flussgleichung im Grenzfall $N \gg 1$

5.1 Exakte Lösung der Flussgleichung

Um ein konzeptuelles Verständnis der Flussgleichung in $d = 3$ Raumdimensionen zu erlangen, wird nachstehend der Grenzfall vieler Felder $N \gg 1$ untersucht. Für diesen Fall ist der Beitrag der $N - 1$ Goldstone-Bosonen wesentlich größer als der der radialen Mode, sodass in der Flussgleichung (4.60) der zweite Term vernachlässigbar ist. Für $N \gg 1$ geht die Flussgleichung (4.65) folglich in

$$\partial_k W'_k(\hat{\rho}) = -\frac{k^2}{8\pi^2} N W''_k \frac{k^2 - W'^2_k}{(k^2 + W'^2_k)^2} \quad (5.1)$$

über. Bemerkt werden sollte an dieser Stelle, dass der Beitrag der radialen Mode für einige Formen des klassischen Potentials (Bsp.: ein ϕ^6 -Potential in skalaren $O(N)$ -Modellen) auch im Limes $N \rightarrow \infty$ nicht vernachlässigt werden darf [12]. Obige Flussgleichung (5.1) lautet in ihrer dimensionslosen Formulierung (siehe Gl. (4.65))

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \hat{\rho}} \left(-\hat{\rho} + \alpha \frac{(1 - u^2)}{(1 + u^2)^2} \right) = -u(\hat{\rho}) \quad \text{mit} \quad \alpha := \frac{N}{8\pi^2}. \quad (5.2)$$

Mathematisch betrachtet liegt somit folgende Problemstellung vor: Zu lösen ist eine inhomogene, quasilineare *partielle Differentialgleichung* (PDGL) erster Ordnung, die der allgemeinen Struktur

$$\text{PDGL:} \quad \partial_t u + P(\hat{\rho}, t, u) \partial_{\hat{\rho}} u = Q(\hat{\rho}, t, u), \quad t \leq 0, \quad (5.3)$$

$$\text{Anfangswert:} \quad u(\hat{\rho}, t = 0) \stackrel{!}{=} f(\hat{\rho}) \quad (5.4)$$

genügt. Dabei ist die Anfangsbedingung (5.4) durch das klassische Potential $u(\hat{\rho}, 0) = f(\hat{\rho})$ für $t = 0$ gegeben. Obige Klasse von PDGL lässt sich unter Anwendung der **Methode der Charakteristiken** [35] exakt lösen. Zu finden sind durch t parametrisierte Kurven $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t)$, entlang derer sich die Lösungen der PDGL (5.3) einfach verhalten. Hierzu betrachte man zunächst den Wert $z(t)$ von u entlang der Kurve $\hat{\rho}(t)$:

$$z(t) := u(\hat{\rho}(t), t). \quad (5.5)$$

Nun wähle man $\hat{\rho}(t)$ so, dass die PDGL (5.3) für $u(\hat{\rho}, t)$ eine gewöhnliche DGL für $z(t)$ impliziert. Mit

$$\frac{dz(t)}{dt} = \partial_t u(\hat{\rho}(t), t) + \partial_{\hat{\rho}} u(\hat{\rho}(t), t) \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} \quad (5.6)$$

ergibt sich durch Vergleich von (5.6) mit (5.3) folgende Aussage: Falls die Kurve $\hat{\rho}(t)$ die DGL

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = P(\hat{\rho}(t), t, z(t)) \quad (5.7)$$

erfüllt, so resultiert aus der PDGL (5.3), dass

$$\frac{dz(t)}{dt} = Q(\hat{\rho}(t), t, z(t)) \quad (5.8)$$

gilt. Damit wurde ein Übergang von der inhomogenen quasilinearen PDGL (5.3) mit den unabhängigen Variablen $\hat{\rho}$ und t zu zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen (5.7) und (5.8) für $\hat{\rho}(t)$ und $z(t)$ vollzogen. Für die gegebene PDGL (5.2) lauten diese explizit

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\hat{\rho} + \alpha \frac{(1 - z^2)}{(1 + z^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{dz(t)}{dt} = -z. \quad (5.9)$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$\hat{\rho}(0) =: \hat{\rho}_0, \quad z(0) = u(\hat{\rho}(0), 0) = f(\hat{\rho}_0) \quad (5.10)$$

lassen sich die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen – die Charakteristiken $\hat{\rho}(t)$ und $z(t)$ – eindeutig bestimmen.

Die gewöhnliche DGL für $z(t)$ wird durch die Funktion

$$z(t) = f(\hat{\rho}_0)e^{-t} \quad (5.11)$$

erfüllt. Einsetzen dieser Lösung in die gewöhnliche DGL (5.9) für $\hat{\rho}(t)$ ermöglicht die Bestimmung der zweiten Charakteristik:

$$\hat{\rho}(t) = \alpha + \frac{\alpha f(\hat{\rho}_0)^2}{f(\hat{\rho}_0)^2 + e^{2t}} - 2\alpha f(\hat{\rho}_0)e^{-t} \left[\arctan\left(\frac{e^t}{f(\hat{\rho}_0)}\right) + n\pi \right] + c_1 e^{-t}. \quad (5.12)$$

Dabei charakterisiert die ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ den jeweiligen Zweig des Arcustangens. Die Konstante $-2\alpha f(\hat{\rho}_0)n\pi$ wird im Folgenden in der Integrationskonstanten c_1 absorbiert, sodass effektiv nur eine Integrationskonstante zu bestimmen ist. Diese wird durch die Anfangsbedingung $\hat{\rho}(0) \stackrel{!}{=} \hat{\rho}_0$ fixiert. $\hat{\rho}(t)$ lautet somit

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \alpha + \frac{\alpha f(\hat{\rho}_0)^2}{f(\hat{\rho}_0)^2 + e^{2t}} - 2\alpha f(\hat{\rho}_0)e^{-t} \arctan\left(\frac{e^t}{f(\hat{\rho}_0)}\right) \\ & + \left[\hat{\rho}_0 - \alpha - \frac{\alpha f(\hat{\rho}_0)^2}{f(\hat{\rho}_0)^2 + 1} + 2\alpha f(\hat{\rho}_0) \arctan\left(\frac{1}{f(\hat{\rho}_0)}\right) \right] e^{-t}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Wäre die Charakteristik (5.13) nach der Konstanten $\hat{\rho}_0$ als Funktion von $\hat{\rho}$ und t auflösbar, so würde die explizite Lösung der gegebenen PDGL

$$u(\hat{\rho}, t) = f(\hat{\rho}_0(\hat{\rho}, t))e^{-t} \quad (5.14)$$

lauten. Dies ist jedoch nicht möglich, aber die Charakteristik (5.11) kann explizit nach $f(\hat{\rho}_0) = ue^t$ aufgelöst und in (5.13) eingesetzt werden. Dies ermöglicht die Bestimmung der Umkehrfunktion $\hat{\rho}_t(u)$ von $u_t(\hat{\rho})$, die als implizite Lösung der PDGL für u dienen wird. Die **implizite Lösung** für die gesuchte Funktion $u(\hat{\rho}, t)$ lautet somit

$$\hat{\rho} - \alpha - \frac{\alpha u^2}{1 + u^2} + 2\alpha u \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = (g(ue^t) - \alpha) e^{-t} - \frac{\alpha u^2 e^t}{1 + u^2 e^{2t}} + 2\alpha u \arctan\left(\frac{1}{ue^t}\right). \quad (5.15)$$

Die Funktion $g(ue^t) = \hat{\rho}_0(ue^t)$ ergibt sich dabei durch die Gleichung $f(\hat{\rho}_0) = ue^t$, aufgelöst nach $\hat{\rho}_0$. Im nächsten Schritt wird nun das Potential an der Stelle $t = 0$, d. h. die Anfangsbedingung (5.4) spezifiziert. Als **klassisches Superpotential** bei der Skala $k = \Lambda$ bzw. $t = 0$ wird der Ansatz [28]

$$W_\Lambda(\rho) = \frac{\bar{\lambda}_\Lambda}{2}(\rho - \bar{\kappa}_\Lambda)^2 \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{1}{2}\Phi^i\Phi_i \quad (5.16)$$

gewählt, wobei $\bar{\kappa}_\Lambda$ als bosonische Konstante zu verstehen ist. Dieses Superpotential vierter Ordnung in den Superfeldern Φ^i entspricht mit $\tilde{\rho} = \frac{1}{2}n^i n_i$ einem physikalischen Potential $V_\Lambda(\tilde{\rho}) = [W'_k(\tilde{\rho})]^2 \tilde{\rho}$ sechster Ordnung in den skalaren Feldern n_i . Man erhält

$$W'_\Lambda(\tilde{\rho}) = \bar{\lambda}_\Lambda(\tilde{\rho} - \bar{\kappa}_\Lambda) \quad \Rightarrow \quad V_\Lambda(\tilde{\rho}) = (W'_\Lambda(\tilde{\rho}))^2 \tilde{\rho} = \bar{\lambda}_\Lambda^2(\tilde{\rho} - \bar{\kappa}_\Lambda)^2 \tilde{\rho} \quad (5.17)$$

und in den *dimensionslosen* Größen analog

$$u_\Lambda = \frac{W'_\Lambda(\tilde{\rho})}{\Lambda} = \bar{\lambda}_\Lambda(\tilde{\rho} - \frac{\bar{\kappa}_\Lambda}{\Lambda}) \equiv \lambda_\Lambda(\hat{\rho} - \kappa_\Lambda) \quad \Rightarrow \quad V_\Lambda(\hat{\rho}) = \lambda_\Lambda^2(\hat{\rho} - \kappa_\Lambda)^2 \hat{\rho}. \quad (5.18)$$

Die Kopplung $\bar{\lambda}_\Lambda = \lambda_\Lambda > 0$ ist als Vorfaktor des $\hat{\rho}^3$ -Termes dimensionslos. Im Gegensatz dazu folgt für die dimensionsbehaftete Kopplung $\bar{\kappa}_\Lambda = \kappa_\Lambda \Lambda$. Unter Berücksichtigung obiger Anfangsbedingung $u_\Lambda = u(\hat{\rho}, t = 0)$ (5.18) nimmt die allgemeine Lösung (5.15) nachstehende Struktur

$$\hat{\rho} - \alpha - \frac{\alpha u^2}{1 + u^2} - 2\alpha u \arctan(u) = (\kappa_\Lambda - \alpha)e^{-t} + \frac{u}{\lambda_\Lambda} - \frac{\alpha u^2 e^t}{1 + u^2 e^{2t}} - 2\alpha u \arctan(u e^t) \quad (5.19)$$

mit $\alpha = \frac{N}{8\pi^2}$ an. Dabei wurde verwendet, dass die Funktion $g(u e^t)$ im Definitionsbereich $\hat{\rho} \in [0, \infty)$ durch

$$g(u e^t) = \kappa_\Lambda + \frac{u e^t}{\lambda_\Lambda} \quad (5.20)$$

gegeben ist. Damit lässt sich auch die implizite Lösung der PDGL (5.1) für $W'_k(\hat{\rho})$

$$\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_{0(k)} = \alpha W'_k \left[\frac{k W'_k}{k^2 + W_k'^2} - \frac{W'_k}{\Lambda(1 + \frac{W_k'^2}{\Lambda^2})} + 2 \arctan\left(\frac{W'_k}{k}\right) - 2 \arctan\left(\frac{W'_k}{\Lambda}\right) \right] + \frac{W'_k}{\lambda_\Lambda}$$

mit $\tilde{\rho}_{0(k)} = \alpha k + (\kappa_\Lambda - \alpha)\Lambda.$ (5.21)

gewinnen.

5.2 Fixpunktlösungen

5.2.1 Die Lösungen der Fixpunktgleichung

Neben der impliziten Lösung der Flussgleichung ist – wie in den Grundlagen in Kapitel 3.5 erörtert wurde – die Frage nach möglichen *skaleninvarianten Lösungen* von (5.2) von Relevanz. Diese entsprechen Fixpunkten der Evolution mit t , d. h. gesucht sind ausgezeichnete Lösungen $u_*(\hat{\rho})$ der Flussgleichung (5.2), die der Bedingung $\partial_t u_*(\hat{\rho}) = 0$ genügen. Die **Fixpunktgleichung**

$$\frac{\partial u_*}{\partial \hat{\rho}} \left(-\hat{\rho} + \alpha \frac{(1 - u_*^2)}{(1 + u_*^2)^2} \right) = -u_* \quad (5.22)$$

wird neben der trivialen Lösung $u_* = 0$ von allen Kurven der Form

$$\frac{\hat{\rho}}{u_*} - \frac{\alpha}{u_*} - \frac{\alpha u_*}{1 + u_*^2} - 2\alpha \arctan(u_*) = c_1 \quad (5.23)$$

mit der unbestimmten Integrationskonstanten c_1 erfüllt. Die Differentialgleichung (5.22) zeigt, dass unter der Annahme $\frac{\partial u_*}{\partial \hat{\rho}}|_{\hat{\rho}=\alpha} < \infty$ die Fixpunktlösung u_* an der Stelle $\hat{\rho} = \alpha$ eine Nullstelle besitzt: $u_*(\alpha) = 0$. D. h. alle Fixpunktlösungen (5.23) gehen durch den ausgezeichneten Punkt $(\alpha, 0)$ in der $\hat{\rho}$ - u_* -Ebene, wie Abb. 7 graphisch zeigt. Die DGL (5.22) beschreibt demnach ein Fixpunktpotential $V_*(\hat{\rho}) = u_*^2 \hat{\rho}$, das bei dem konstanten Wert

$$\hat{\rho} = \kappa_* = \alpha \quad (5.24)$$

sowie an der Stelle $\hat{\rho} = 0$ ein Minimum besitzt. Des Weiteren muss die Bedingung der *Eindeutigkeit* (u_* ist Funktion von $\hat{\rho}$) der Lösungskurve in der u_* - $\hat{\rho}$ -Ebene erfüllt sein. Aus Abb. 7 folgt bereits anschaulich die Existenz eines kritischen Wertes \tilde{c}_1 , sodass für alle c_1 mit $|c_1| > \tilde{c}_1$ die Fixpunktlösung eine auf dem Definitionsbereich $\hat{\rho} \in [0, \infty)$ eindeutige Funktion repräsentiert⁴⁹. Die Eindeutigkeit der Fixpunktlösung $u_*(\hat{\rho})$ ist genau dann gewährleistet, falls die *Umkehrfunk-*

⁴⁹Zudem soll u_* C^∞ -differenzierbar und endlich für endliche $\hat{\rho}$ sein.

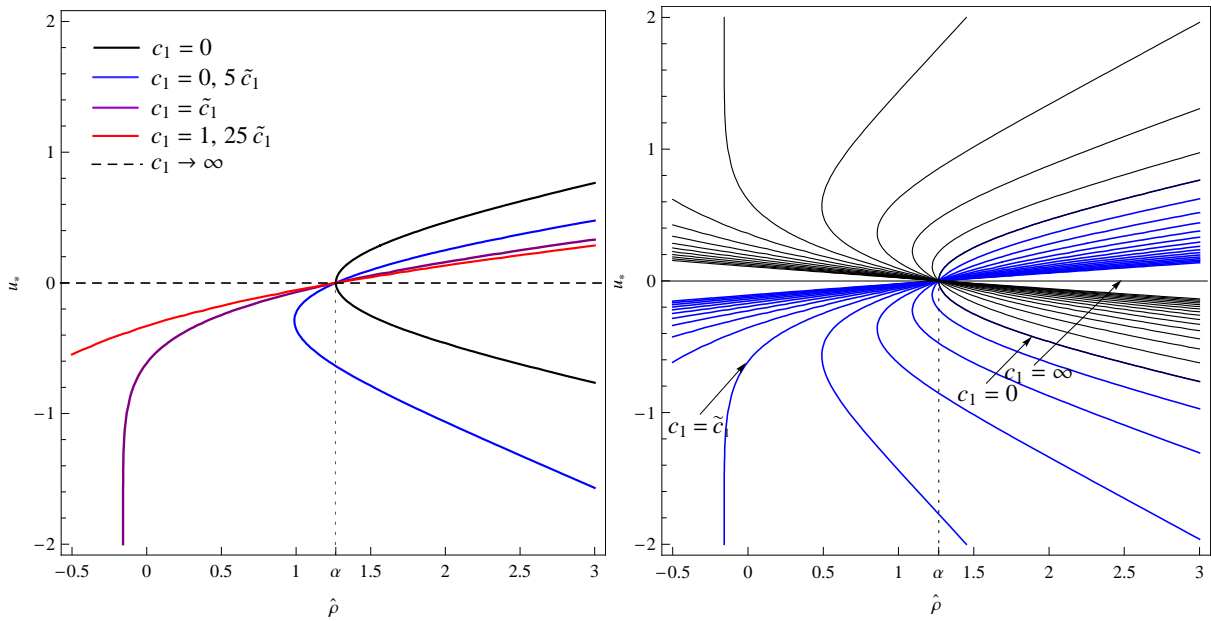


Abbildung 7: Es gilt $N = 100 \Rightarrow \alpha = \frac{N}{8\pi^2} \approx 1,2665$. **Links:** Dargestellt ist eine Auswahl an Fixpunktlösungen $u_*(\hat{\rho})$ für verschiedene Integrationskonstanten c_1 . **Rechts:** u_* - $\hat{\rho}$ -Ebene der Fixpunktlösungen im Überblick; skizziert sind die Lösungskurven für Konstanten c_1 im Bereich von $c_1 \in [-3\tilde{c}_1, 0]$ (schwarz) und $[0, 3\tilde{c}_1]$ (blau) in Schritten von $0, 2\tilde{c}_1$.

tion $\hat{\rho}(u_*)$ kein Extremum mit verschwindendem Anstieg mehr aufweist (siehe Abb. 7). Für ein Extremum von $\hat{\rho}(u_*)$ muss gelten

$$\frac{d\hat{\rho}}{du_*} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(u_*) + u_* \frac{(2 + u_*^2)}{(1 + u_*^2)^2} + \frac{c_1}{2\alpha} = 0 \quad (5.25)$$

Für kleine u_* folgt aus (5.25) ein lineares Verhalten der Form $\frac{c_1}{2\alpha} \approx -3u_*$. Ist $|u_*| \gg 1$, so erhält man $c_1 \rightarrow \mp\alpha\pi$ für $u_* \rightarrow \pm\infty$. Abb. 8 zeigt zudem, dass zwischen diesen Grenzfällen ein Minimum und ein Maximum für $c_1(u_*)$ existiert. Gesucht ist dieser extremale Wert der Konstanten c_1 , sodass gerade noch ein Extremum für $\hat{\rho}(u_*)$ existiert, d. h. Gl. (5.25) erfüllt ist. Durch Differentiation von

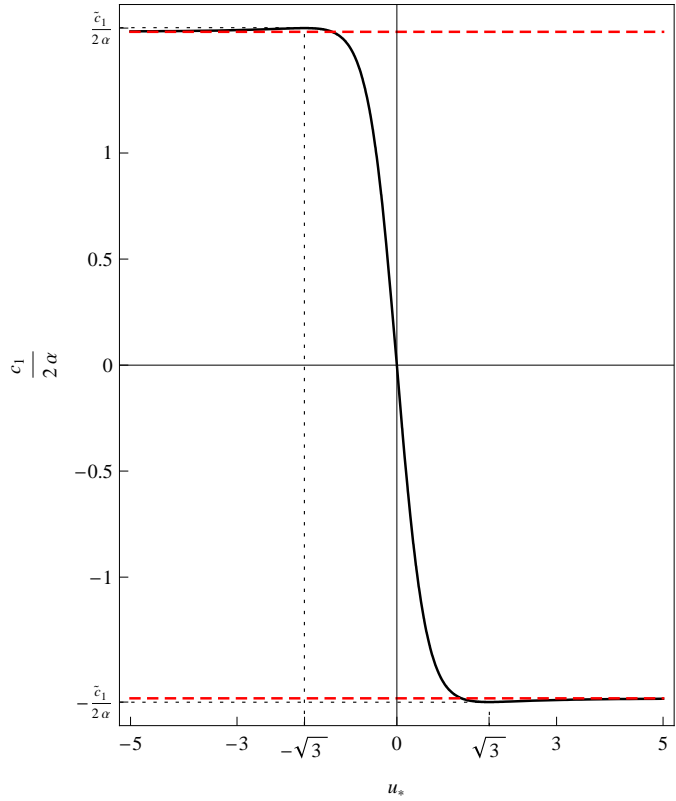
$$y = -\arctan(u_*) - u_* \frac{(2 + u_*^2)}{(1 + u_*^2)^2} \quad (5.26)$$

mit $y = c_1/(2\alpha)$ nach u_* erhält man ein bei $u_* = \pm\sqrt{3}$ liegendes Extremum mit dem Wert $\tilde{c}_1 = \mp 2\alpha(\frac{\pi}{3} + \frac{5}{16}\sqrt{3}) \approx \mp\alpha\pi$ (vgl. Abb. 8).

Um den Verlauf der Umkehrfunktion $\hat{\rho}(u_*)$ in Abhängigkeit der Integrationskonstanten präziser beschreiben zu können, muss die zweite Ableitung der Umkehrfunktion betrachtet werden. Für diese gilt:

$$\frac{d^2\hat{\rho}}{du_*^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_* = \pm\sqrt{3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2\hat{\rho}}{du_*^2} = \begin{cases} > 0 & \text{für } |u_*| < \sqrt{3}, \\ = 0 & \text{für } |u_*| = \sqrt{3}, \\ < 0 & \text{für } |u_*| > \sqrt{3}. \end{cases} \quad (5.27)$$

Abbildung 8: Graphisch dargestellt sind die Integrationskonstanten $c_1/(2\alpha)$ in Abhängigkeit der Werte u_* , für die die Umkehrfunktion $\hat{\rho}(u_*)$ extremal ist. Erkennbar ist, dass die Umkehrfunktion $\hat{\rho}(u_*)$ nur für *beschränkte* Integrationskonstanten c_1 Extrema besitzt. Der extreme Wert der Integrationskonstanten ist durch $|\tilde{c}_1| = 2\alpha\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5}{16}\sqrt{3}\right)$ gegeben. Die roten Linien repräsentieren die Funktionswerte $\frac{c_1}{2\alpha} = \pm\frac{\pi}{2}$.



Zusammenfassend lässt sich das Verhalten der Umkehrfunktion anhand von Abb. 9 wie folgt charakterisieren:

Für Konstanten $|c_1| < \alpha\pi$ besitzt die Umkehrfunktion $\hat{\rho}(u_*)$ ein globales Minimum. Beträgt der Wert der Integrationskonstanten exakt $c_1 = \alpha\pi$, so weist $\hat{\rho}(u_*)$ ein globales Minimum und ein Maximum im Unendlichen auf. Für $\alpha\pi < |c_1| < \tilde{c}_1$ besitzt die Umkehrfunktion ein lokales Minimum sowie ein lokales Maximum. Exakt für den Wert $|c_1| = \tilde{c}_1$ existiert für $\hat{\rho}(u_*)$ ein Wendepunkt bei $u_* = \pm\sqrt{3}$. Überschreitet der Wert der Konstanten den kritischen Wert \tilde{c}_1 , d. h. gilt $|c_1| > \tilde{c}_1$, so ist die Umkehrfunktion monoton steigend bzw. fallend mit u_* und die Fixpunktlösungen $u_*(\hat{\rho})$ sind eindeutige Funktionen von $\hat{\rho}$ auf dem Definitionsbereich $\hat{\rho} \in [0, \infty)$.

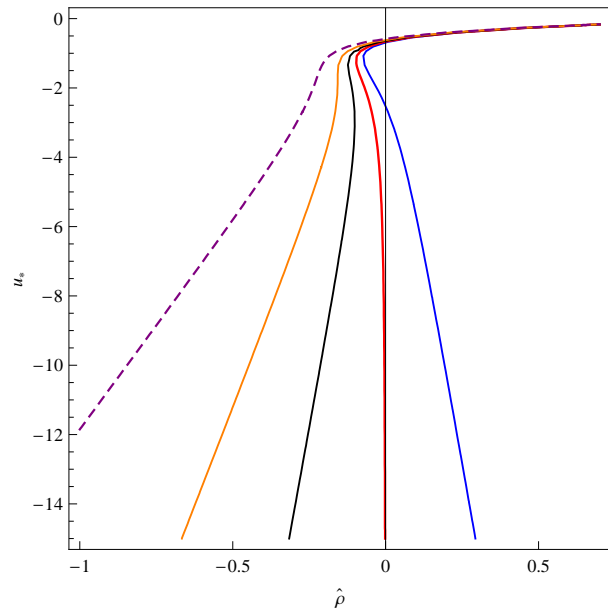


Abbildung 9: Fixpunktlösung $u_*(\hat{\rho})$ für die spezielle Wahl der Konstanten $c_1 = 0,995\alpha\pi$, $c_1 = \alpha\pi$, $c_1 = 1,0053\alpha\pi$, $c_1 = \tilde{c}_1$ und $c_1 = 1,01\tilde{c}_1$ mit $N = 99$, $\alpha \approx 1,2538$.

Resümierend lässt sich demnach feststellen, dass für die Menge

$$\left\{ c_1 \in \mathbb{R} : |c_1| > \tilde{c}_1 = 2\alpha \left(\frac{\pi}{3} + \frac{5}{16}\sqrt{3} \right) \right\} \quad (5.28)$$

auf $\hat{\rho} \in [0, \infty)$ eindeutige Fixpunktlösungen existieren.

Des Weiteren stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen die Lösung (5.19) der Flussgleichung mit gegebenem klassischen Potential (5.18) im makroskopischen Limes $t \rightarrow -\infty$ die Fixpunktlösung (5.23) erfüllt. Aus (5.19) erhält man für $t \rightarrow -\infty$

$$\frac{\hat{\rho}}{u} - \frac{\alpha}{u} - \frac{\alpha u}{1+u^2} - 2\alpha \arctan(u) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\kappa_\Lambda - \alpha) \frac{e^{-t}}{u} + \frac{1}{\lambda_\Lambda}. \quad (5.29)$$

Dies entspricht der Fixpunktlösung (5.23) genau dann, wenn

$$\kappa_\Lambda \stackrel{!}{=} \alpha \quad \text{und} \quad c_1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{\lambda_\Lambda} \quad (5.30)$$

erfüllt sind. Soll $u_t(\hat{\rho})$ im IR-Limes in die Fixpunktlösung (5.23) fließen, so muss die Kopplung κ_Λ im UV exakt dem Wert α entsprechen. Die mikroskopische Kopplung λ_Λ kann hingegen mit (5.28) und (5.30) in dem Intervall $\lambda_\Lambda \in [0, \tilde{c}_1^{-1}]$ frei gewählt werden und fixiert die Integrationskonstante in der Fixpunktlösung (5.23). Als Zwischenresultat lässt sich somit festhalten: Das vorgegebene klassische Potential (5.18) evolviert für $t \rightarrow -\infty$ genau dann in die auf dem ganzen Definitionsbereich $\hat{\rho} \in [0, \infty)$ *eindeutige Fixpunktlösung* (5.23), wenn die klassischen Konstanten κ_Λ und $\lambda_\Lambda > 0$ nachstehenden Bedingungen genügen:

$$\kappa_\Lambda \stackrel{!}{=} \alpha \quad \text{und} \quad \lambda_\Lambda \stackrel{!}{\leq} \frac{1}{\tilde{c}_1} = \frac{1}{2\alpha(\frac{\pi}{3} + \frac{5}{16}\sqrt{3})} \approx \frac{1}{\alpha\pi}. \quad (5.31)$$

Wie lässt sich nun das **dimensionslose** bzw. **dimensionsbehaftete Fixpunktpotential** unter Verwendung der bisherigen Erkenntnisse charakterisieren?

Ausgangspunkt ist das *physikalische mikroskopische Potential*, dass in seiner dimensionslosen Form durch $V_\Lambda = u_\Lambda^2 \hat{\rho}$ mit $u_\Lambda = \lambda_\Lambda(\hat{\rho} - \kappa_\Lambda)$ vorgegeben ist. Erfüllen die klassischen Kopplungen κ_Λ und λ_Λ die Bedingungen (5.31), so evolviert die skalenabhängige Funktion $u(\hat{\rho}, t)$ gemäß (5.21) im makroskopischen Limes $t \rightarrow -\infty$ gegen die Fixpunktlösung (5.23) bzw. das skalenabhängige Potential $V(\hat{\rho}, t)$ gegen das Fixpunktpotential $V_*(\hat{\rho})$. Dabei wird die Integrationskonstante $c_1 = \lambda_\Lambda^{-1}$ fixiert, d. h. eine spezielle Kurve in der Ebene der Fixpunktlösungen (Abb. 7) betrachtet.

Die Fixpunktlösung (5.23) beschreibt eine Funktion $u_*(\hat{\rho})$ mit einer Nullstelle bei $\hat{\rho} = \alpha$. Entsprechend weist das dimensionslose Fixpunktpotential $V_*(\hat{\rho}) = u_*^2 \hat{\rho} > 0$ *zwei Minima* bei $\hat{\rho} = \alpha$ und $\hat{\rho} = 0$ auf.

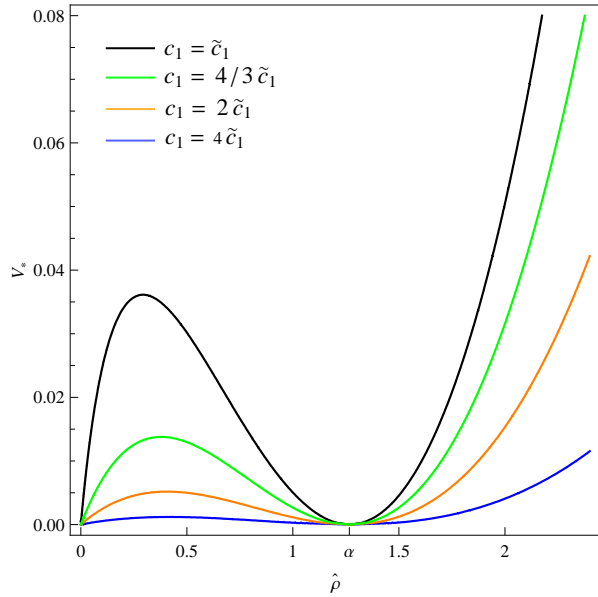


Abbildung 10: Abgebildet ist das dimensionslose Fixpunktpotential $V_*(\hat{\rho}) = u_*^2 \hat{\rho}$ für verschiedene Integrationskonstanten c_1 . Eindeutigkeit der Lösung u_* ist gemäß (5.28) erfüllt, falls $c_1 = \frac{1}{\lambda_\Lambda} > \tilde{c}_1$ gilt. Des Weiteren sind die zwei Minima $\hat{\rho} = \alpha$ und $\hat{\rho} = 0$ von V_* zu erkennen.

Weiterhin kann $W'_{k*}(\tilde{\rho}) := u_*(\hat{\rho})k$ mit $\tilde{\rho} = \hat{\rho}k$ (siehe auch (4.61)-(4.63)) als dimensionelles Analogon der Fixpunktlösung u_* untersucht werden.

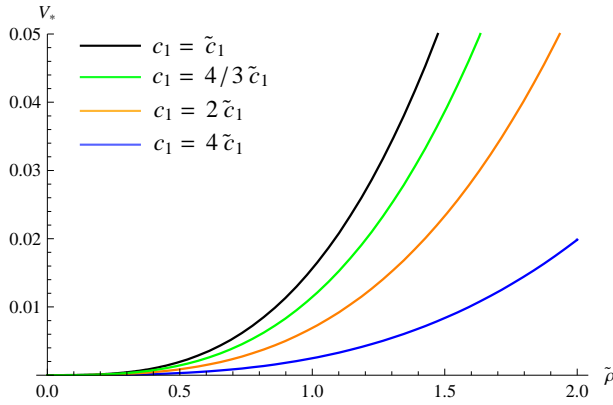


Abbildung 11: Obige Abbildung zeigt das dimensionelle, effektive Fixpunktpotential $V_*(\tilde{\rho})$ für vier verschiedene Anfangskopplungen $\lambda_\Lambda = c_1^{-1}$.

Resultat bildet die Fixpunktlösung

$$\tilde{\rho} - \alpha k - \frac{\alpha k W_{k*}'^2}{k^2 + W_{k*}'^2} - 2\alpha W_{k*}' \arctan\left(\frac{W_{k*}'}{k}\right) = c_1 W_{k*}' \quad (5.33)$$

der dimensionsbehafteten Größe $W_{k*}(\tilde{\rho})$. Im Limes $k \rightarrow 0$ kann demnach aus (5.33) das **effektive dimensionsbehaftete Fixpunktpotential**

$$V_*(\tilde{\rho}) = \lim_{k \rightarrow 0} (W_{k*}')^2 \tilde{\rho} = \frac{1}{(c_1 + \alpha\pi)^2} \tilde{\rho}^3 \quad (5.34)$$

ermittelt werden.

Abschließend werden die **polynomialen Näherungen** der Fixpunktlösung $u_*(\hat{\rho})$ für $|u_*| \ll 1$ bzw. $u_* \rightarrow \pm\infty$ vorgestellt.

(1) Die Fixpunktlösung u_* in der Nähe der Nullstelle $\hat{\rho} = \alpha$ für kleine $|u_*| \ll 1$ ist approximativ durch die Gerade

$$u_* \simeq \frac{1}{c_1} (\hat{\rho} - \alpha) \stackrel{(5.30)}{=} \lambda_\Lambda (\hat{\rho} - \alpha) = u_\Lambda|_{\kappa_\Lambda=\alpha} \quad (5.35)$$

gegeben.

(2) Für sehr große Funktionswerte $u_* \rightarrow \pm\infty$ ergibt sich hingegen:

$$u_* \simeq \frac{1}{(c_1 \pm \alpha\pi)} \hat{\rho} \stackrel{(5.30)}{=} \frac{1}{(\frac{1}{\lambda_\Lambda} \pm \alpha\pi)} \hat{\rho}. \quad (5.36)$$

Abb. 12 zeigt eine spezielle Fixpunktlösung mit obigen approximativen Ausdrücken. Für das Fixpunktpotential $V_*(\hat{\rho}) = u_*^2 \hat{\rho}$ ergeben sich nachstehende Näherungen in den Fällen (5.35) und (5.36).

$$\text{dimensionslos: } (1) \hat{\rho} \approx \alpha : \quad V_*(\hat{\rho}) \simeq \lambda_\Lambda^2 (\hat{\rho} - \alpha)^2 \hat{\rho} \quad (5.37)$$

$$(2) u_* \rightarrow \infty : \quad V_*(\hat{\rho}) \simeq \frac{1}{(\frac{1}{\lambda_\Lambda} + \alpha\pi)^2} \hat{\rho}^3 \quad (5.38)$$

$$\text{dimensionsbehaftet: } (1) \tilde{\rho} \approx \alpha \cdot k : \quad V_*(\tilde{\rho}) \simeq \lambda_\Lambda^2 (\tilde{\rho} - \alpha k)^2 \tilde{\rho} \longrightarrow \lambda_\Lambda^2 \tilde{\rho}^3 \quad \text{für } k \rightarrow 0 \quad (5.39)$$

$$(2) W_{k*}' \rightarrow \infty : \quad V_*(\tilde{\rho}) \simeq \frac{1}{(\frac{1}{\lambda_\Lambda} + \alpha\pi)^2} \tilde{\rho}^3 \quad (\text{exakt } \forall \tilde{\rho} \text{ für } k \rightarrow 0) \quad (5.40)$$

Die dimensionsbehaftete Nullstelle $\tilde{\rho} = \alpha \cdot k$ von W_{k*} evolviert im Limes $k \rightarrow 0$ zum Ursprung – das effektive dimensionelle Fixpunktpotential

$$V_*(\tilde{\rho}) := \lim_{k \rightarrow 0} (W_{k*}')^2 \tilde{\rho} \quad (5.32)$$

wird folglich nur *ein Minimum* an der Stelle $\tilde{\rho} = 0$ besitzen. $V_*(\tilde{\rho})$ kann exakt bestimmt werden. Dies gelingt durch die Ersetzung der dimensionslosen durch die entsprechenden dimensionsbehafteten Größen in (5.23) mittels der Substitutionen (4.61) und (4.62).

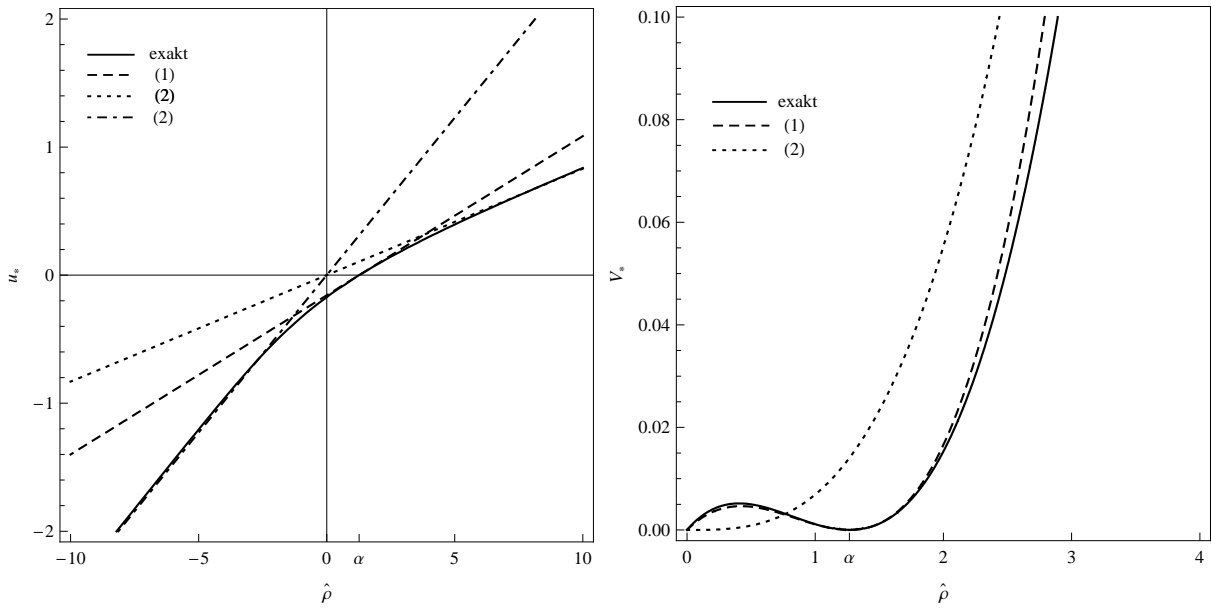


Abbildung 12: **Links:** exakte Fixpunktlösung $u_*(\hat{\rho})$ für $N = 100 \Rightarrow \alpha \approx 1,2665$; $\lambda_\Lambda = \frac{1}{2\bar{c}_1}$. (1) und (2) entspricht den Näherungen (5.35) bzw. (5.36) (gepunktet für $u_* \rightarrow +\infty$, gestrichpunktet für $u_* \rightarrow -\infty$). **Rechts:** dimensionsloses Fixpunktpotential $V_*(\hat{\rho})$ exakt und in den Näherungen (1) und (2) gemäß Gl. (5.37) und (5.38).

5.2.2 Fixpunktanalyse

Wie in den Grundlagen in Kapitel 3.5 erörtert wurde, können aus einer Fixpunktanalyse mittels der *Parametrisierung* der effektiven Wirkung Γ_k bzw. äquivalent der Funktion $u(\hat{\rho}, t)$ durch (ideal) unendlich viele Kopplungen $a_i(t)$ die *kritischen Exponenten* θ_n als negative Eigenwerte der Stabilitätsmatrix B_i^j bestimmt werden. Die Parametrisierung kann z. B. in Form eines **polynomialen Ansatzes**

$$u_t(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) (\hat{\rho} - \kappa(t))^i \quad (5.41)$$

erfolgen. Die Eigenvektoren V_i^n und Eigenwerte $-\theta_n$ von B_i^j führen auf die Evolution der dimensionslosen Kopplungen $a_i(t) = a_{i*} + \sum_n C_n V_i^n e^{-\theta_n t}$ (siehe (3.36)).

Da die *exakte implizite Lösung* u jedoch bekannt ist, kann der Fluss der dem Polynomansatz (5.41) entsprechenden Kopplung $a_i(t)$ bereits mittels dieser allgemeinen Lösung (5.19) ermittelt werden. Der i -ten Kopplungen $a_i(t)$ entspricht die i -te Ableitung von u an dessen Nullstelle $\hat{\rho} := \kappa(t)$:

$$a_i(t) \equiv \frac{1}{i!} u^{(i)} \Big|_{\hat{\rho}=\kappa(t)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.42)$$

Der Fluss der Kopplung $\kappa(t)$ resultiert aus der allgemeinen Lösung (5.19) an der Nullstelle $\hat{\rho} = \kappa(t)$ von u :

$$u(\kappa(t)) \stackrel{!}{=} 0 \quad \stackrel{(5.19)}{\Rightarrow} \quad \kappa(t) = \alpha + (\kappa_\Lambda - \alpha)e^{-t}. \quad (5.43)$$

Die weiteren Kopplungen ergeben sich mit (5.42) zu

$$\begin{aligned}
a_1(t) &= u'(\kappa(t)) = \lambda_\Lambda \\
a_2(t) &= \frac{1}{2!}u''(\kappa(t)) = 3\alpha\lambda_\Lambda^3(e^t - 1) \\
a_3(t) &= \frac{1}{3!}u'''(\kappa(t)) = 18\alpha\lambda_\Lambda^5(e^t - 1)^2. \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Alternativ kann der polynomiale Ansatz (5.41) für $u_t(\hat{\rho})$ in die dimensionslose Flussgleichung (5.2) eingesetzt werden. Ein Koeffizientenvergleich führt auf nachstehendes **gekoppeltes Differentialgleichungssystem** für die Kopplungen $a_i(t)$ ⁵⁰

$$\begin{aligned}
\partial_t \kappa(t) &= -1\kappa + \alpha \\
\partial_t \lambda(t) &= 0 \\
\partial_t a_2(t) &= 1a_2 + 3\alpha\lambda^3 \\
\partial_t a_3(t) &= 2a_3 + 12\alpha a_2 \lambda^2 \\
\partial_t a_4(t) &= 3a_4 + 5\alpha\lambda (3a_2^2 + 3a_3\lambda - \lambda^4) \\
\partial_t a_5(t) &= 4a_5 + 6\alpha [a_2^3 + 3a_4\lambda^2 + a_2\lambda (6a_3 - 5\lambda^3)], \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.45}$$

deren Lösungen bzw. Fixpunktwerte mit den Anfangsbedingungen $\kappa(0) \stackrel{!}{=} \kappa_\Lambda$, $\lambda(0) \stackrel{!}{=} \lambda_\Lambda$ und $a_i(0) \stackrel{!}{=} 0$ für $i \geq 2$ durch

<i>Kopplung $a_i(t)$</i>	<i>Fixpunktkopplung a_{i*}</i>
$\kappa(t) = \alpha + (\kappa_\Lambda - \alpha)e^{-t}$	$\kappa_* = \alpha$
$\lambda(t) = \text{const.} = \lambda_\Lambda$	$\lambda_* = \lambda_\Lambda$
$a_2(t) = 3\alpha\lambda_\Lambda^3(e^t - 1)^1$	$a_{2*} = -3\alpha\lambda_*^3$
$a_3(t) = 18\alpha^2\lambda_\Lambda^5(e^t - 1)^2$	$a_{3*} = 18\alpha^2\lambda_*^5$
$a_4(t) = \frac{5}{3}\alpha\lambda_\Lambda^5 [81\alpha^2\lambda_\Lambda^2(e^t - 1)^3 - (1 + e^t + e^{2t})(e^t - 1)^1]$	$a_{4*} = \frac{5}{3}\alpha\lambda_*^5 (1 - 81\alpha^2\lambda_*^2)$
$a_5(t) = 6\alpha^2\lambda_\Lambda^7 [189\alpha^2\lambda_\Lambda^2(e^t - 1)^4 - 5(1 + e^t + e^{2t})(e^t - 1)^2]$	$a_{5*} = 6\alpha^2\lambda_*^7 (189\alpha^2\lambda_*^2 - 5)$
\vdots	\vdots

Tabelle 2: Kopplungen $a_i(t)$ für den Polynomansatz (5.41) und deren Fixpunktwerte a_{i*} .

gegeben sind. Die Betrachtung des linearisierten Flusses

$$\partial_t a_i(t) = \beta_i = B_i^j (a_j - a_{j*}), \quad B_i^j = \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial a_j} \right|_{a_{k*}}, \tag{5.46}$$

⁵⁰Im Folgenden gilt: $a_0(t) \equiv \kappa(t)$, $a_1(t) \equiv \lambda(t)$.

der Kopplungen in der Nähe des Fixpunktes (siehe Gl.(3.34)) ermöglicht die Ermittlung der *Stabilitätsmatrix* B_i^j . Diese lautet

$$B_i^j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 9\alpha\lambda_*^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -72\alpha^2\lambda_*^4 & 12\alpha\lambda_*^2 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 675\alpha^3\lambda_*^6 - 25\alpha\lambda_*^4 & -90\alpha^2\lambda_*^4 & 15\alpha\lambda_*^2 & 3 & 0 & \\ 0 & -6804\alpha^4\lambda_*^8 + 420\alpha^2\lambda_*^6 & 810\alpha^3\lambda_*^6 - 30\alpha\lambda_*^4 & -108\alpha^2\lambda_*^4 & 18\alpha\lambda_*^2 & 4 & \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

Die Eigenwerte der Dreiecksmatrix (5.47) sind gegeben durch die Hauptdiagonalelemente $\omega_n = -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Es resultieren die **kritischen Exponenten** des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells:

$$\theta_n = -\omega_n = 1 - n, \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.48)$$

Ein eleganterer Weg der Bestimmung der kritischen Exponenten besteht jedoch in der expliziten **linearen Entwicklung** einer beliebigen Lösung $u(\hat{\rho}, t)$ um die Fixpunktlösung $u_*(\hat{\rho})$ der Form

$$u(\hat{\rho}, t) = u_*(\hat{\rho}) + \vartheta(\hat{\rho}, t) \quad \text{mit} \quad |\vartheta(\hat{\rho}, t)| \ll |u_*(\hat{\rho})|. \quad (5.49)$$

Einsetzen des Ansatzes (5.49) in die Fixpunktgleichung (5.22) liefert unter Berücksichtigung der in der Störung linearen Ausdrücke eine PDGL erster Ordnung für die gesuchte Funktion $\vartheta(\hat{\rho}, t)$, gegeben durch

$$\partial_t \vartheta - \frac{u_*}{u'_*} \partial_{\hat{\rho}} \vartheta + \left(2 - \left(\frac{u_*}{u'_*} \right)' \right) \vartheta = 0. \quad (5.50)$$

Obige Differentialgleichung kann mittels des *Separationsansatzes* $\vartheta(\hat{\rho}, t) = \mathcal{R}(\hat{\rho}) \cdot \mathcal{T}(t)$ in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für $\mathcal{R}(\hat{\rho})$ und $\mathcal{T}(t)$ überführt werden. Es ergibt sich zunächst⁵¹

$$\frac{\dot{\mathcal{T}}}{\mathcal{T}} = \frac{u_*}{u'_*} \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} + \left(\frac{u_*}{u'_*} \right)' - 2 \stackrel{!}{=} \text{const.} =: \omega, \quad (5.51)$$

da die linke Seite von (5.51) eine reine Funktion von t und die rechte Seite eine Funktion von $\hat{\rho}$ repräsentiert. Für die Skalenabhängigkeit resultiert sofort $\mathcal{T}(t) = C_1 e^{\omega t}$. Für $\mathcal{R}(\hat{\rho})$ folgt aus (5.51)

$$\begin{aligned} (\ln \mathcal{R})' &= (\omega + 2) (\ln u_*)' - \left(\ln \left(\frac{u_*}{u'_*} \right) \right)' \\ \Rightarrow \mathcal{R}(\hat{\rho}) &= C_2 u_*^{\omega+1} u'_*. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Die gesuchte Störung der Fixpunktlösung besitzt folglich die Form $\vartheta(\hat{\rho}, t) = C u_*^{\omega+1} u'_* e^{\omega t}$ mit der Integrationskonstanten C . Im nächsten Schritt werden die physikalisch erlaubten Werte der Konstanten ω extrahiert. Für $\hat{\rho} \simeq \alpha$ weist die Fixpunktlösung gemäß (5.35) das Verhalten $u_*(\hat{\rho}) \sim (\hat{\rho} - \alpha)$ auf. Dies bedingt für die Störung

$$\vartheta(\hat{\rho}, t) \sim (\hat{\rho} - \alpha)^{\omega+1} e^{\omega t} \quad \text{für} \quad \hat{\rho} \simeq \alpha. \quad (5.53)$$

Damit ϑ an der Stelle $\hat{\rho} = \alpha$ regulär ist, muss $\omega \geq -1$ gelten. Fordert man zusätzlich die Entwickelbarkeit von ϑ um $\hat{\rho} = \alpha$ in eine Potenzreihe, so ergibt sich als Menge der zulässigen Eigenwerte

$$\omega_n = n - 1 \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (5.54)$$

⁵¹„ $\dot{}$ “ charakterisiert eine Ableitung nach t , „ $'$ “ Ableitungen nach $\hat{\rho}$.

wobei der Index n die Eigenwerte durchnummeriert. Eine zu dem Eigenwert ω_n gehörige Lösung werde mit ϑ_n bezeichnet. Mit ϑ_n erfüllt aufgrund der Linearität in der Störung auch die Summe $\sum_n \vartheta_n$ die Differentialgleichung (5.50). Folglich lautet die allgemeine Lösung *in der Nähe der Fixpunktlösung* u_*

$$u(\hat{\rho}, t) = u_*(\hat{\rho}) + \vartheta(\hat{\rho}, t) = u_*(\hat{\rho}) + \sum_{n \in \mathbb{N}_0} C_n u_*^n u_*' e^{(n-1)t} \quad \text{mit} \quad |\vartheta(\hat{\rho}, t)| \ll |u_*(\hat{\rho})|. \quad (5.55)$$

Die kritischen Exponenten

$$\theta_n = -\omega_n = 1 - n \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.56)$$

ergeben sich in natürlicher Weise als negative Eigenwerte $\theta_n = -\omega_n$. (5.56) stimmt mit den aus der Betrachtung der Stabilitätsmatrix B_i^j erhaltenen kritischen Exponenten (5.48) exakt überein.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass die Methode der linearen Entwicklung $u = u_* + \vartheta$ mit der Lösung (5.55) für *beliebige* mikroskopische Potentiale Gültigkeit besitzt, während bei dem Polynomansatz (5.41) die spezielle Funktion $u(\hat{\rho}, t = 0) = u_\Lambda = \lambda_\Lambda(\hat{\rho} - \kappa_\Lambda)$ als mikroskopische Anfangsbedingung gewählt wurde.

Zusammenfassend ermöglichen die kritischen Exponenten folgende **Klassifizierung** und **physikalische Interpretation** der Kopplungen $a_i(t)$:

I) Die Theorie besitzt **eine relevante Eigenrichtung** $V^0 = (1, 0, 0, \dots)^T$ im Raum der Kopplungen $a_i(t)$, $i \in \mathbb{N}_0$ mit zugehörigem kritischen Exponenten $\theta_0 = 1 > 0$. Die assoziierte Kopplung ist durch

$$a_0(t) \equiv \kappa(t) = a_{0*} + C_0 e^{-t} = \alpha + (\kappa_\Lambda - \alpha) e^{-t} \quad (5.57)$$

mit $C_0 = (\kappa_\Lambda - \alpha)$ und $a_{0*} = \alpha$ in Übereinstimmung mit (5.43) gegeben. Sie weist für $\kappa_\Lambda \neq \alpha$ ein repulsives Verhalten hin zu kleineren Skalen $t \rightarrow -\infty$ gegenüber ihrem Fixpunktwert $a_{0*} = \alpha$ auf, d. h. entfernt sich exponentiell von diesem. Umgekehrt nähert sich die Kopplung $a_0(t)$ für steigende t ihrem Fixpunktwert an und zeigt demnach ein UV-attraktives Verhalten. Damit die Theorie ihren Fixpunkt im makroskopischen Limes $t \rightarrow -\infty$ erreicht, ist ein *fine-tuning* des UV-Parameters $\kappa_\Lambda \stackrel{!}{=} \alpha$ notwendig.

II) Die **marginale Eigenrichtung** $V^1 = (0, v_1^1, v_2^1, \dots)^T$ mit $v_1^1, v_2^1, \dots \neq 0$ zum Eigenwert $\theta_1 = -\omega_1 = 0$ legt das Skalenverhalten der Kopplung $\lambda(t)$ fest. Es folgt

$$a_1(t) \equiv \lambda(t) = a_{1*} + C_1 v_1^1 = \lambda_\Lambda = \lambda_* \quad (5.58)$$

mit $C_1 = 0$ und $a_{1*} = \lambda_\Lambda$. Diese Kopplung evolviert *nicht* mit der Skala t und besitzt mit (5.31) *unendlich viele* physikalische Fixpunktwerte auf dem Intervall $\lambda_* \in [0, \tilde{c}_1^{-1}]$.

III) Die zu den unendlich vielen negativen kritischen Exponenten $\theta_n = 1 - n$ mit $n \geq 2$ gehörigen Eigenvektoren der Form $V^n = (v_0^n, v_1^n, v_2^n, \dots)$ mit $v_0^n = \dots = v_{n-1}^n = 0$ und $v_l^n \neq 0$ für $l \geq n$ werden mit dem Fluss der Skala $t \rightarrow -\infty$ exponentiell unterdrückt. Diese **irrelevanten Richtungen** zeigen folglich einen IR-attraktiven bzw. eine UV-repulsiven Fluss gegenüber den entsprechenden Fixpunktkopplungen. Sie bestimmen den Fluss der unendlich vielen irrelevanten Kopplungen

$$a_i(t) = a_{i*} + \sum_{n=2}^{\infty} C_n V_i^n e^{-\theta_n t}, \quad i \geq 2. \quad (5.59)$$

Abb. 13 illustriert den Raum der ersten drei Kopplungen $a_0 = \kappa$, $a_1 = \lambda$ und a_2 . In diesem Raum werden die Fixpunkt-lösungen durch eine Gerade (rot dargestellt) repräsentiert. Diese Gerade umfasst den Bereich⁵²

$$\{\kappa_* = \alpha, \lambda_*, a_{2*} = -3\alpha\lambda_*^3\}$$

mit $\lambda_* \in [0, \tilde{c}_1^{-1}]$. Die gekennzeichnete Ebene stellt die IR-kritische Hyperfläche dar, die aus den in den Fixpunkt laufenden Trajektorien gebildet wird. Beispielhaft ist ein spezieller Fluss in der kritischen Hyperfläche skizziert. Ausgehend von den Kopplungen $(a_{2\Lambda}, \lambda_\Lambda, \kappa_\Lambda) = (0, \lambda_\Lambda, \alpha)$ im UV bei der Skala $k = \Lambda$ wird im Kopplungsraum im Limes $k \rightarrow 0$ der Punkt $(a_{2*}, \lambda_*, \kappa_*)$ mit $\lambda_\Lambda = \lambda_*$ angestrebt. Abb. 14 verdeutlicht noch einmal graphisch die unterschiedliche Skalenabhängigkeit der *relevanten* Kopplung κ und der *irrelevanten* Kopplung a_2 .

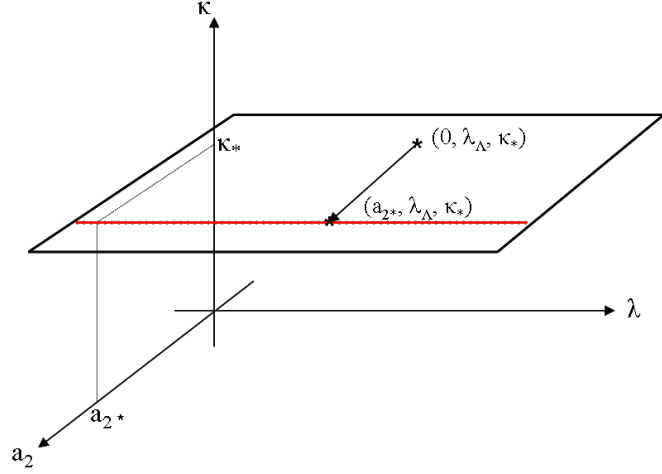


Abbildung 13: Raum der ersten drei Kopplungen mit IR-kritischer Hyperfläche und Fixpunktlösungen (rote Gerade).

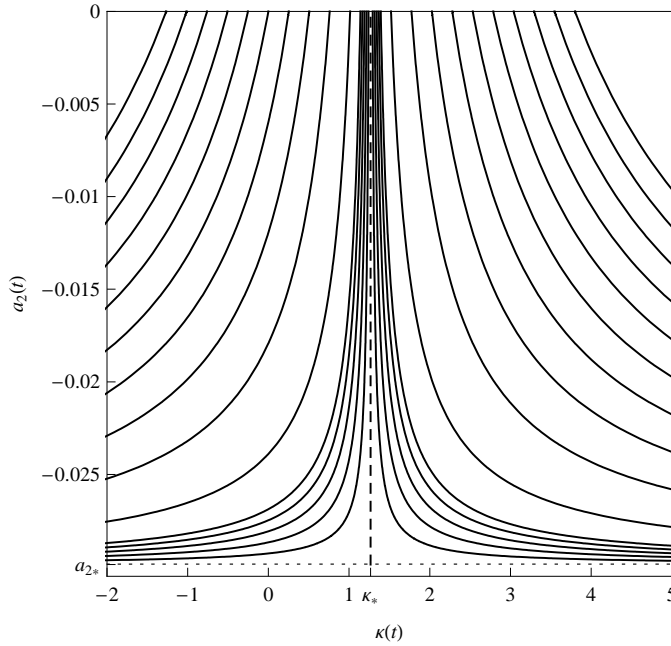


Abbildung 14: Flussbild der Kopplungen $\kappa(t)$ und $a_2(t)$ (siehe Tabelle 2) für $N = 100 \Rightarrow \alpha \approx 1,27$ und $\lambda_\Lambda = 0,8\tilde{c}_1^{-1}$. Dargestellt ist der Fluss dieser Kopplungen für die Anfangsbedingungen $a_2(0) = 0$ und $\kappa(0) \in [-1, 3; 0,2]\alpha$ sowie $\kappa(0) \in [0,9, 1,1; 0,02]\alpha$ im Bereich $t \in [0, -10]$. Die relevante Kopplung $\kappa(t) = \alpha + (\kappa_\Lambda - \alpha)e^{-t}$ wird für $\kappa_\Lambda \neq \alpha$ im IR-Limes $t \rightarrow -\infty$ von ihrem Fixpunktwert weggetrieben. Nur ein *fine-tuning* dieser Kopplung im UV auf $\kappa_\Lambda = \alpha$ – lässt die allgemeine Lösung (5.19) gegen die Fixpunktlösung (5.23) evolvieren. Die irrelevante Kopplung $a_2(t) = 3\alpha\lambda_\Lambda^3(e^t - 1)$ hingegen wird für beliebige Startwerte im UV ihren Fixpunktwert $a_{2*} = -3\alpha\lambda_\Lambda^3$ im IR-Limes erreichen.

⁵²Formal evolvieren alle Lösungen mit $\kappa_\Lambda = \alpha$ und $\lambda_\Lambda \in \mathbb{R}$ gegen die Fixpunktlösung (5.23), jedoch impliziert die Eindeutigkeit der Fixpunktlösung auf $\hat{\rho} \in [0, \infty)$ gemäß (5.30) $\lambda_\Lambda \in [0, \tilde{c}_1^{-1}]$.

5.3 Der Fluss des effektiven Mittelwertpotentials

Zielstellung dieses Kapitels ist die Diskussion und Interpretation der **Skalenabhängigkeit des effektiven Mittelwertpotentials**. Es wird zunächst die Evolution der Funktion $u_t(\hat{\rho})$ mit der Skala t – gegeben durch die implizite Lösung (5.19) – untersucht. Daran anknüpfend wird das *physikalische Potential* $V_t(\hat{\rho}) = (u_t)^2 \hat{\rho}$ bzw. $V_k(\tilde{\rho}) = (W'_k)^2 \tilde{\rho}$ in seiner dimensionslosen bzw. dimensionsbehafteten Form erörtert.

Die Makrophysik des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells wird im Wesentlichen von der *mikroskopischen relevanten Kopplung* $\kappa(t=0) = \kappa_\Lambda$ determiniert. Anhand des Flusses

$$\kappa(t) = \alpha + (\kappa_\Lambda - \alpha)e^{-t} \quad (\text{dimensionslos}) \quad \text{bzw.} \quad (5.60)$$

$$\tilde{\rho}_0(k) = \alpha k + (\kappa_\Lambda - \alpha)\Lambda \quad (\text{dimensionell}) \quad (5.61)$$

der Kopplung $\kappa(t)$ (vgl. (5.21) und (5.43)) wird deutlich, dass dabei das Vorzeichen von

$$\delta\kappa_\Lambda := \kappa_\Lambda - \alpha \quad (5.62)$$

als der Abweichung der Anfangskopplung $\kappa(0) = \kappa_\Lambda$ von dem Fixpunktwert $\kappa_* = \alpha$ die tragende Rolle spielt.

Je nach Wahl der klassischen Kopplung κ_Λ lassen sich **drei verschiedene physikalische Fälle** unterscheiden:

(1) $\delta\kappa_\Lambda < 0$:

In diesem Fall wandert das Minimum $\hat{\rho} = \kappa(t)$ des Potentials $V_t(\hat{\rho})$ für sinkende t zum Ursprung hin. Zur Zeit $t = -\ln\left(\frac{\alpha}{\delta\kappa_\Lambda}\right) < 0$ gilt $\kappa(t) = 0$. Das dimensionelle Minimum $\tilde{\rho}_0(k)$ erreicht im makroskopischen Limes den festen Wert

$$\tilde{\rho}_0 := \lim_{k \rightarrow 0} \tilde{\rho}_0(k) = \delta\kappa_\Lambda \Lambda < 0 \quad (5.63)$$

und das System endet in der **O(N)-symmetrischen Phase**.

(2) $\delta\kappa_\Lambda = 0$:

Diese Wahl der Kopplung κ_Λ bedingt ein *skalenunabhängiges Minimum* von $V_t(\hat{\rho})$ an der festen Stelle $\kappa(t) = \alpha$. Für $\lambda_\Lambda < \tilde{c}_1^{-1}$ wird im Limes $t \rightarrow -\infty$ ein eindeutiges Fixpunktpotential V_* erreicht. Das Minimum $\tilde{\rho}_0(k) = \alpha k$ des dimensionsbehafteten Potentials läuft für $k \rightarrow 0$ gegen Null. Dies entspricht dem **Phasenübergang** zwischen der *spontan O(N)-gebrochenen* und der *O(N)-symmetrischen Phase*. Für die Krümmung des Potentials $V_k(\tilde{\rho})$ an seinem Minimum $\tilde{\rho}_0(k)$ für $k \rightarrow 0$ erhält man: $\lim_{k \rightarrow 0} V''_k(\tilde{\rho}_0) = 2\lambda_\Lambda^2 \alpha k \rightarrow 0$.

(3) $\delta\kappa_\Lambda > 0$:

Es gilt $\kappa(t) \rightarrow +\infty$ für $t \rightarrow -\infty$ und die Nullstelle von $u_t(\hat{\rho})$ divergiert im IR-Limes ins Unendliche. Die analoge dimensionsbehaftete Nullstelle wird im Limes $k \rightarrow 0$ den endlichen Wert $\tilde{\rho}_0 = (\kappa_\Lambda - \alpha)\Lambda = \delta\kappa_\Lambda \Lambda > 0$ annehmen. Demnach weist das dimensionelle, effektive Potential $V_{k \rightarrow 0}(\tilde{\rho})$ zwei Minima an den Stellen $\tilde{\rho} = 0$ sowie $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 > 0$ auf. Wählt das makroskopische System den Zustand minimaler Energie mit $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0$, so wird die **O(N)-Symmetrie spontan gebrochen**. Entscheidet es sich hingegen für die Konfiguration $\tilde{\rho} = 0$, so ist die $O(N)$ -Symmetrie erhalten. Die Krümmung des Potentials am Minimum $\tilde{\rho}_0$ ergibt sich zu: $\lim_{k \rightarrow 0} V''_k(\tilde{\rho}_0) = \lim_{k \rightarrow 0} 2\lambda_\Lambda^2 \tilde{\rho}_0(k) \rightarrow 2\lambda_\Lambda^2 \delta\kappa_\Lambda \Lambda > 0$ für $k \rightarrow 0$.

Die Abbildungen 15 und 16 stellen die **Evolution von $u(\hat{\rho}, t)$** mit dem Skalenparameter t gemäß (5.19) für die drei relevanten Fälle **(1)**-**(3)** graphisch dar.

Interessant und aus den Abbildungen 15 und 16 ersichtlich ist auch die Tatsache, dass der Anstieg von $u_t(\hat{\rho})$ an dem Minimum $\hat{\rho} = \kappa(t)$ *unabhängig* von der Skala t durch $u'_t(\kappa(t)) = \lambda_\Lambda$ gegeben ist.

Die weiteren Abbildungen (17)-(20) beschreiben die Evolution des dimensionslosen Potentials $V_t(\hat{\rho})$ bzw. des dimensionsbehafteten Potentials $V_k(\tilde{\rho})$. In letzterem Fall wird explizit $\nu := V_k(\tilde{\rho})/\Lambda^3$ als Funktion von $x := \tilde{\rho}/\Lambda$ graphisch dargestellt. Die Parameter wurden in den Abb. (15)-(20) wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} N = 99 &\Rightarrow \alpha \approx 1,2538, \\ \lambda_\Lambda &= 0,8/\tilde{c}_1 \approx 0,2 \text{ und} \\ \delta\kappa_\Lambda &= \{0, \pm 0,1\}. \end{aligned}$$

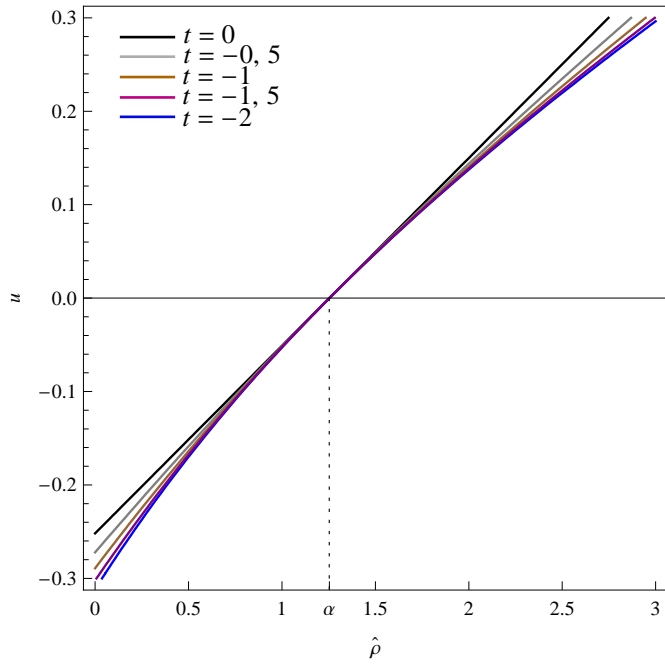


Abbildung 15: Evolution von $u(\hat{\rho}, t)$ für $\kappa_\Lambda = \alpha$ (Fall **(2)**) im Skalenbereich $t \in [-2, 0]$. Die Lösung evolviert im Limes $t \rightarrow -\infty$ gegen die Fixpunktlösung u_* .

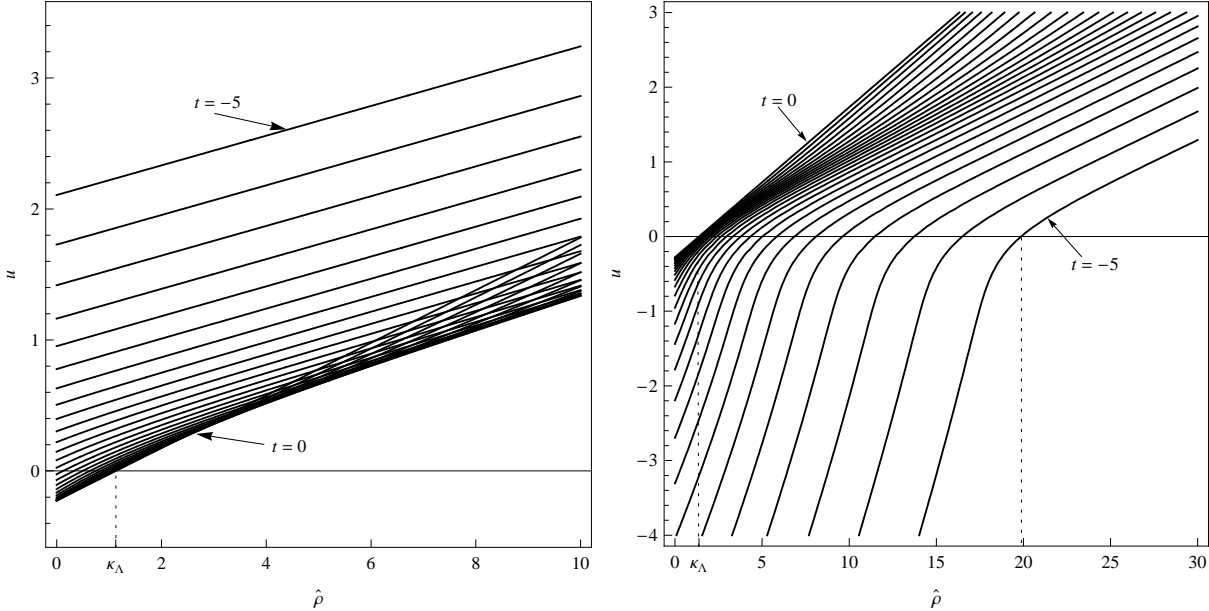


Abbildung 16: **Links:** $u(\hat{\rho}, t)$ für $\delta\kappa_\Lambda = -0,1\alpha < 0$ (Fall **(1)**). Die relevante Kopplung $\kappa(t)$ evolviert mit (5.60) gemäß $\kappa(t) = \alpha(1 - 0,1e^{-t}) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow -\infty$. Für $t_s = -\ln(\alpha/|\delta\kappa_\Lambda|) = -\ln(10) \simeq -2,30$ erreicht die Nullstelle von u den Ursprung. Dargestellt ist der Bereich $t \in [-5, 0; \delta t]$ mit $\delta t = 0,2$. **Rechts:** $u(\hat{\rho}, t)$ für $\delta\kappa_\Lambda = 0,1\alpha > 0$ (Fall **(3)**). Die Skalenabhängigkeit der Nullstelle von $u(\hat{\rho}, t)$ ist durch $\kappa(t) = \alpha(1 + 0,1e^{-t}) \rightarrow +\infty$ für $t \rightarrow -\infty$ gegeben. So liegt $\kappa(t)$ für $t = -5$ bei ca. 19,86, wie in obiger Abbildung zu erkennen ist.

Die Abbildungen 17 und 18 dienen der Veranschaulichung des **dimensionslosen physikalischen Potentials** $V_t(\hat{\rho}) = (u_t(\hat{\rho}))^2 \hat{\rho}$.

Nur ein „fine-tuning“ der relevanten Kopplung $\kappa(t)$ im UV mit $\kappa(t=0) = \kappa_* = \alpha$ (Fall **(2)**) führt im IR-Limes $t \rightarrow -\infty$ auf die Fixpunktlösung $V_*(\hat{\rho})$. Dies spiegelt Abb. 17 wider. In dem erwähnten Fall **(1)** mit $\delta\kappa_\Lambda < 0$ befindet sich das makroskopische System in der $O(N)$ -symmetrischen Phase. Die relevante Kopplung $\kappa(t) = \alpha + \delta\kappa_\Lambda e^{-t}$ wird – wie bereits in Abb. 16 diskutiert wurde – exponentiell ins negative Unendliche getrieben (Abb. 18, links). Die Wahl $\delta\kappa_\Lambda > 0$ (Fall **(3)**) führt hingegen dazu, dass das makroskopische System in einer spontan $O(N)$ -gebrochenen Phase enden *kann*. So entspricht dem im IR-Limes *divergenten* Minimum $\kappa(t \rightarrow -\infty) \rightarrow +\infty$ des dimensionslosen Potentials (Abb. 18, rechts) ein *endliches* Minimum $\tilde{\rho}_0 = \delta\kappa_\Lambda \Lambda > 0$ des dimensionellen Potentials.

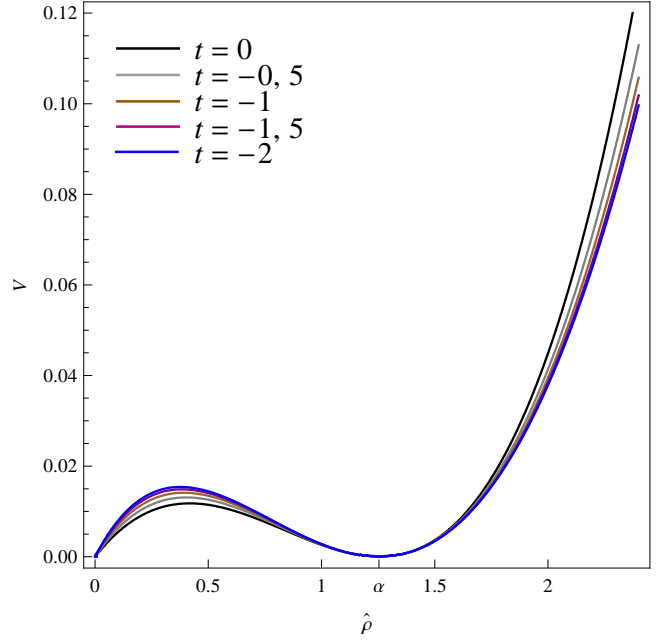


Abbildung 17: Fall **(2)** mit $\kappa_\Lambda = \alpha$. $V_t(\hat{\rho})$ besitzt für alle Skalen t zwei feste Minima an den Stellen $\hat{\rho} = 0$ und $\hat{\rho} = \alpha \approx 1,25$. Ebenso ist die Krümmung des Potentials $V_t''(\alpha) = 2\lambda_\Lambda^2 \alpha \approx 0,1$ an dessen Minimum $\hat{\rho} = \alpha$ eine Konstante in t .

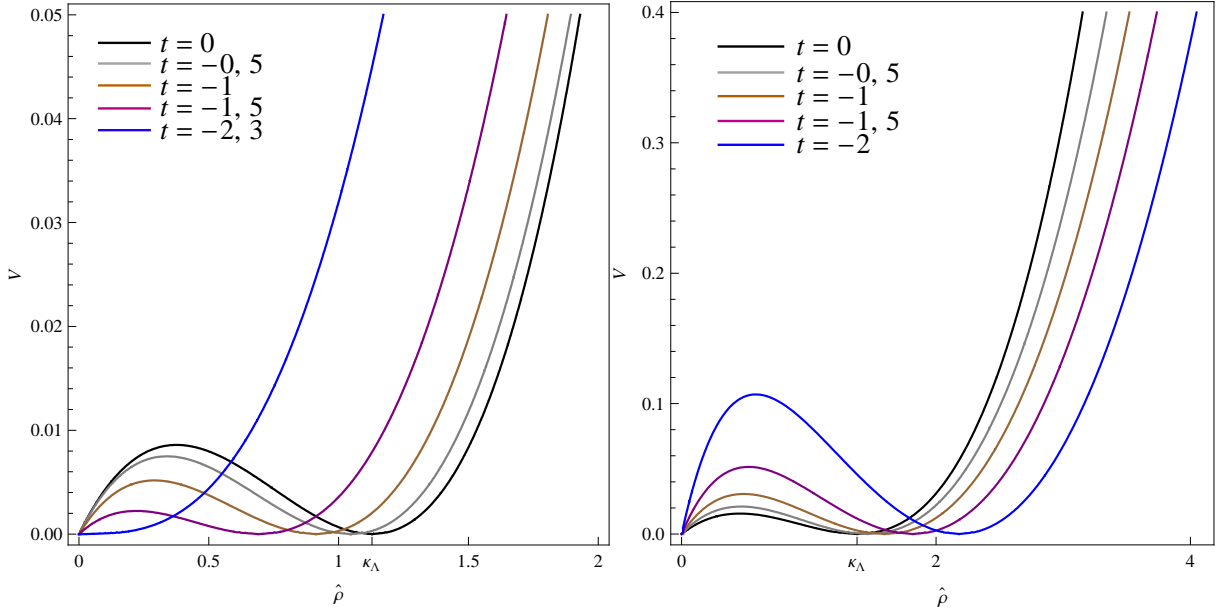


Abbildung 18: Dimensionsloses Potential $V_t(\hat{\rho})$. **Links:** Fall **(1)** mit $\delta\kappa_\Lambda < 0$. $V_t(\hat{\rho})$ weist zwei Minima an den Stellen $\hat{\rho} = 0$ sowie $\hat{\rho} = \kappa(t)$ auf. Letzteres evolviert mit fallendem t zum Ursprung hin und erreicht diesen bei $t_s = -\ln(\alpha/|\delta\kappa_\Lambda|) \approx -2,3$. Die Krümmung des Potentials am Ursprung divergiert im IR-Limes: $\lim_{t \rightarrow -\infty} V_t'''(0) = 4u_t(0)u_t'(0) \rightarrow \infty$. **Rechts:** Fall **(3)** mit $\delta\kappa_\Lambda > 0$. Sowie das skalenabhängige Potentialminimum $\kappa(t)$ als auch die Krümmung des Potentials in diesem Minimum $V_t'''(\kappa(t))$ divergieren im makroskopischen Limes $t \rightarrow -\infty$.

Das **dimensionsbehaftete Potential** $V_k(\tilde{\rho}) = (W'_k(\tilde{\rho}))^2 \tilde{\rho}$ mit $W'_k(\tilde{\rho}) = u_t(\tilde{\rho})k$ für die diskutierten Fälle **(1)**-**(3)** ist in den Abbildungen 19 und 20 skizziert.

Das effektive Mittelwertpotential $V_k(\tilde{\rho})$ ist durch zwei Minima $\tilde{\rho} = 0$ sowie $\tilde{\rho}_0(k) = \alpha k + \delta\kappa_\Lambda \Lambda$ (siehe (5.61)) gekennzeichnet, wobei letzteres *skalenabhängig* ist. Abb. 20 (links) veranschaulicht Fall **(1)** mit $\delta\kappa_\Lambda < 0$. Hier evolviert das skalenabhängige Minimum ausgehend von $\tilde{\rho}_0(\Lambda) = \kappa_\Lambda \Lambda$ zum Ursprung hin und wird im Limes $k \rightarrow 0$ den Wert $\tilde{\rho}_0 = \delta\kappa_\Lambda \Lambda < 0$ erreichen – die Makrophysik respektiert somit die $O(N)$ -Symmetrie. Fall **(2)** mit $\delta\kappa_\Lambda = 0$ führt auf $\tilde{\rho}_0(k) = \alpha k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow 0$ und charakterisiert folglich den *Phasenübergang* zwischen dem $O(N)$ -symmetrischen und dem spontan $O(N)$ -gebrochenen Regime (Abb. 19). Die Wahl $\delta\kappa_\Lambda > 0$ (Fall **(3)**) bedingt ein *endliches, positives* Minimum $\tilde{\rho}_0 = (\delta\kappa_\Lambda)\Lambda > 0$ im Limes kleiner Impulsskalen $k \rightarrow 0$ (Abb. 20, rechts). Hier kann das makroskopische System zwischen den beiden Minima $\tilde{\rho} = 0$ und $\tilde{\rho}_0 > 0$ wählen und wird in ersterem Fall $O(N)$ -Symmetrie erhalten, in letzterem hingegen $O(N)$ -Symmetrie spontan brechen.

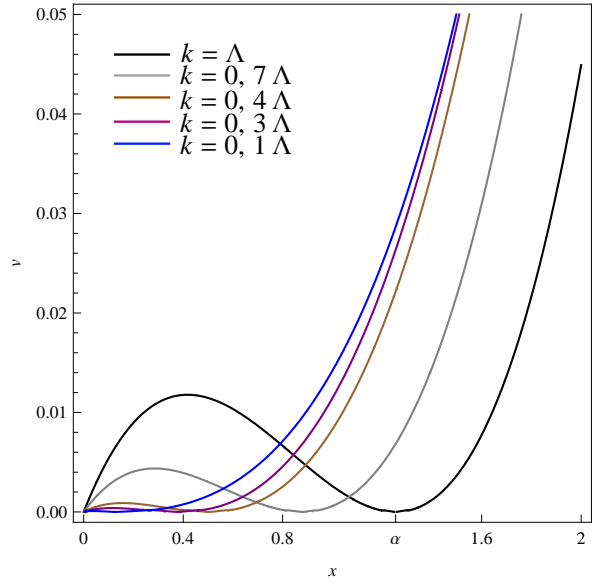


Abbildung 19: Skizziert ist Fall **(2)**, d. h. $\delta\kappa_\Lambda = 0$. Das skalenabhängige Minimum $\tilde{\rho}_0(k)$ nähert sich für fallende Skala k gemäß (5.61) dem Ursprung an und erreicht diesen exakt für $k \rightarrow 0$.

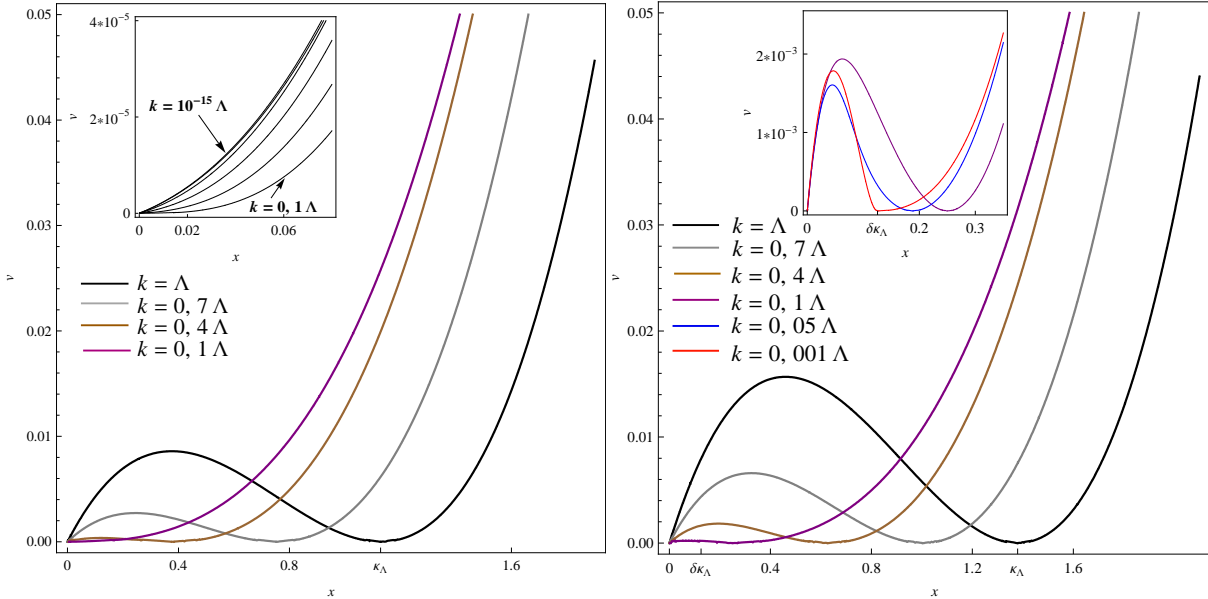


Abbildung 20: Graphisch illustriert ist das reskalierte dimensionelle Potential $\nu := V_k(\tilde{\rho})/\Lambda^3$ als Funktion von $x := \tilde{\rho}/\Lambda$. **Links:** Fall **(1)** mit $\delta\kappa_\Lambda = -0,1\alpha < 0$. Das Minimum $\tilde{\rho}_0(k) = \alpha k + \delta\kappa_\Lambda \Lambda$ nähert sich für fallende Skala k dem Ursprung an und erreicht diesen bei $k = |\delta\kappa_\Lambda|\Lambda/\alpha = 0,1\Lambda$. Das makroskopische System ist demnach $O(N)$ -symmetrisch. **Rechts:** Fall **(3)** mit $\delta\kappa_\Lambda = +0,1\alpha > 0$. Das Minimum $\tilde{\rho}_0$ evolviert mit sinkendem k zu kleineren Werten hin und endet im IR-Limes bei dem endlichen Wert $\tilde{\rho}_0 = \delta\kappa_\Lambda \Lambda = 0,1\Lambda > 0$ (bzw. $x = 0,1$). Sowohl Erhaltung als auch Brechung der $O(N)$ -Symmetrie sind im makroskopischen System möglich.

Physikalisch interessant sind auch die **Massen der Anregungen** im Grenzübergang $k \rightarrow 0$. Relevant ist zunächst, dass *Supersymmetrie* für alle Skalen *erhalten ist*. Dies folgt aus der verschwindenden Grundzustandsenergie $V_{\min} = 0$ für alle Impulsskalen k . Aus der Tatsache, dass Supersymmetrie ungebrochen ist, resultieren gleiche Massen für Fermionen und Bosonen im Grundzustand: $m_B = |m_F|$. In der **O(N)-symmetrischen Phase** für $\kappa_\Lambda < \alpha$ ergibt sich die quadrierte Masse der Anregungen gemäß (4.47) durch

$$M^2 = \lim_{k \rightarrow 0} V'_k(\tilde{\rho})|_{\tilde{\rho}=0} = \lim_{k \rightarrow 0} W'_k{}^2(0). \quad (5.64)$$

Die nur implizit gegebene Lösung (5.21) der skalenabhängigen Funktion $W'_k(\tilde{\rho})$ erlaubt keine exakte Bestimmung der renormierten Masse (5.64). Deshalb wird im Folgenden die Näherung $W'_k/\Lambda \ll 1$ *kleiner Superpotentiale* W'_k betrachtet. Das effektive Superpotential lautet in dieser Approximation mit (5.21) demnach

$$\lim_{k \rightarrow 0} W'_k(\tilde{\rho}) = \frac{1}{\alpha\pi + \lambda_\Lambda^{-1}} (\tilde{\rho} - \delta\kappa_\Lambda\Lambda). \quad (5.65)$$

Dies erlaubt die Bestimmung der Massen der Anregungen⁵³ in dem $O(N)$ -symmetrischen Regime mit $\delta\kappa_\Lambda < 0$:

$$M = \sqrt{V'}|_{\tilde{\rho}=0} = \sqrt{W'_{k \rightarrow 0}{}^2}|_{\tilde{\rho}=0} \simeq \frac{|\bar{\kappa}_\Lambda - \alpha\Lambda|}{\alpha\pi + \bar{\lambda}_\Lambda^{-1}}. \quad (5.66)$$

Spontane **Brechung der O(N)-Symmetrie** kann für $\kappa_\Lambda > \alpha$ entsprechend Fall **(3)** auftreten. Im makroskopischen Limes $k \rightarrow 0$ existieren $N - 1$ masselose Goldstone-Moden sowie eine massebehaftete radiale Mode. Unter Verwendung der Bestimmungsgleichungen (4.48) können sie exakt (mit $u(\hat{\rho}_0) = 0$, $\hat{\rho}_0 = \alpha + (\kappa_\Lambda - \alpha)e^{-t}$) berechnet werden:

$$M_{rad} = \sqrt{(V' + 2V''\hat{\rho})}|_{\hat{\rho}_0} = \lim_{k \rightarrow 0} (2u'\hat{\rho}k)|_{\hat{\rho}_0} = 2\bar{\lambda}_\Lambda(\bar{\kappa}_\Lambda - \alpha\Lambda) \quad \text{und} \quad (5.67)$$

$$M_{Gold} = \sqrt{V'}|_{\hat{\rho}_0} = \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{(2uu'\hat{\rho} + u^2)k^2}|_{\hat{\rho}_0} = 0. \quad (5.68)$$

5.4 Phasenstruktur und Interpretation der kritische Exponenten

Die kritischen Exponenten und somit die Phasenstruktur einer physikalischen Theorie werden nur durch wenige fundamentale Eigenschaften des Modells bestimmt: der Dimension d und den Symmetrien der Theorie sowie der Reichweite der Wechselwirkungen [37]. Diese experimentell motivierte Behauptung trägt den Namen **Universalitätshypothese**⁵⁴. Das supersymmetrische $O(N)$ -Modell ordnet sich folglich in eine ganze *Klasse von Theorien* mit äquivalentem kritischem Verhalten ein. Wie nachstehend gezeigt wird, weist das $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische lineare $O(N)$ -Sigma-Modell in $d = 3$ und für $N \gg 1$ einen *Phasenübergang 2. Ordnung* auf. Dies trifft auch auf *Ferromagnete* zu, die oberhalb der kritischen Curie-Temperatur T_c paramagnetische Eigenschaften besitzen. Mathematisch wird das Verhalten von Ferromagneten durch das *Heisenberg-Modell*⁵⁵ mit $N = 3$ beschrieben [6].

Intention dieses Kapitels ist die Erörterung des *kritischen Verhaltens* des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells von einem *phänomenologischen Standpunkt* aus. Dabei werden die relevanten Größen des supersymmetrischen Modells mit entsprechenden Größen des Heisenberg-Modells der Ferromagnete in Beziehung gesetzt und gegenübergestellt.

Der Begriff „*Phase*“ bezeichnet eine Zustandsform eines *makroskopischen* Systems. Die Erkenntnisse aus Kapitel 5.3 über die Phasenstruktur des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells lassen sich

⁵³ $V(\tilde{\rho}) := \lim_{k \rightarrow 0} V_k(\tilde{\rho})$ bezeichne das effektive Potential.

⁵⁴Fisher 1966, Griffiths 1971

⁵⁵Dieses Modell betrachtet miteinander wechselwirkende (nächste-Nachbar-Wechselwirkung), lokalisierte Spins mit $N = 3$ Komponenten auf einem Gitter.

wie folgt zusammenfassen:

Die *makroskopische Phasenstruktur* wird durch die Wahl der *relevanten Kopplung* κ_Λ bei der UV-Skala $k = \Lambda$ bzw. äquivalent von $\delta\kappa_\Lambda = \kappa_\Lambda - \alpha$ als der Abweichung von κ_Λ von dem Fixpunktwert $\kappa_* = \alpha$ bestimmt. Wie in den Fällen **(1)**-**(3)** in Kapitel 5.3 dargelegt wurde, befindet sich das makroskopische System für $\delta\kappa_\Lambda < 0$ in der $O(N)$ -symmetrischen Phase. $\delta\kappa_\Lambda > 0$ führt auf ein effektives Potential mit zwei Minima $\tilde{\rho} = 0$ und $\tilde{\rho}_0 > 0$, sodass das System spontane $O(N)$ -Symmetriebrechung zeigen kann. Der Grenzfall $\delta\kappa_\Lambda = 0$ bildet gerade den Phasenübergang zwischen den Regimen erhaltener und spontan gebrochener $O(N)$ -Symmetrie. Die charakteristische Größe $\delta\kappa_\Lambda$ stellt somit ein Maß für Abweichung des Systemzustandes von dessen kritischem Zustand dar. Des Weiteren fließt sie in die Definition des **Ordnungsparameters**

$$\langle n \rangle := \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{2\tilde{\rho}_0(k)} = \sqrt{2\tilde{\rho}_0} \stackrel{(5.61)}{=} \sqrt{2\delta\kappa_\Lambda\Lambda} \quad (5.69)$$

als den makroskopischen Erwartungswert des Skalarfeldes⁵⁶ n ein. Der Ordnungsparameter $\langle n \rangle$ ist dabei nur für das Regime $\tilde{\rho}_0 > 0$ mit spontaner Symmetriebrechung definiert. Zudem ist $\langle n \rangle$ eine *stetige Funktion* des Parameters $\delta\kappa_\Lambda$. Folglich zeigt das supersymmetrische $O(N)$ -Modell einen *Phasenübergang 2. Ordnung*.

Nachfolgend werden die **Kerngrößen** des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells und deren Entsprechungen im Heisenberg-Modell vergleichend erläutert und die zugehörigen **kritischen Exponenten** berechnet.

Das physikalische Verhalten ferromagnetischer Materialien in Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur T steht in enger Analogie zu der von dem Parameter $\delta\kappa_\Lambda$ determinierten Makrophysik des abstrakten supersymmetrischen $O(N)$ -Modells im Large- N -Limit in $d = 3$. So lässt sich das kritische Verhalten beider Systeme durch einen Phasenübergang 2. Ordnung charakterisieren. Zunächst kann die Abweichung $\delta\kappa_\Lambda$ der klassischen relevanten Kopplung κ_Λ von dem kritischen Wert $\alpha = N/(8\pi^2)$ (siehe (5.2)) mit der Abweichung der Systemtemperatur T von der kritischen Temperatur T_c gemäß

$$\delta\bar{\kappa}_\Lambda = \bar{\kappa}_\Lambda - \alpha\Lambda = \tilde{\rho}_0 \equiv A(T_c - T) \quad (5.70)$$

mit der Proportionalitätskonstante A assoziiert werden. Somit wird das kritische Verhalten des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells mit dem von Ferromagneten verknüpft. $T < T_c$ bzw. $\tilde{\rho}_0 > 0$ entsprechen der *geordneten*, spontan $O(N)$ -gebrochenen Phase. Für hohe Temperaturen $T > T_c$ bzw. $\tilde{\rho}_0 < 0$ wird hingegen die $O(N)$ -Symmetrie als Zustand großer *Unordnung* wiederhergestellt⁵⁷. Als Analogon des in (5.69) eingeführten Ordnungsparameters $\langle n \rangle$ dient im Heisenberg-Modell die für Ferromagneten für verschwindendes Magnetfeld $B = 0$ und $T < T_c$ vorhandene **spontane Magnetisierung** \mathcal{M} . Diese ist bei $T = 0$ maximal und nimmt mit steigender Temperatur kontinuierlich bis auf Null bei $T = T_c$ ab. Übersteigt die Systemtemperatur die Curie-Temperatur, d. h. gilt $T > T_c$, so zeigen Ferromagnete nur noch paramagnetisches Verhalten. Weiterhin verkörpern das **äußere Magnetfeld** B und der externe Strom J äquivalente Größen. Die Temperaturabhängigkeit des Ordnungsparameters $\langle n \rangle$ nahe dem durch $\delta\kappa_\Lambda = 0$ charakterisierten kritischen Punkt wird durch den *kritischen Exponenten* β quantifiziert. Es gilt mit den Definitionen (5.69) und (5.70) sowie $J = 0$

$$\langle n \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{2\tilde{\rho}_0(k)} = (2A(T_c - T))^{\frac{1}{2}} \sim (\tilde{\rho}_0)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}. \quad (5.71)$$

⁵⁶Es sei $n_i = \delta_{i1}n$ gewählt.

⁵⁷Die Bezeichnungen „Ordnung“ und „Unordnung“ beruhen auf dem thermodynamischen Prinzip der *Minimierung der freien Energie* $F = U - TS$ im Gleichgewicht. Das System wird ständig durch die antagonistischen Größen der inneren Energie U und der Entropie S den Zustand minimaler freier Energie F anstreben. Für kleine Temperaturen $T \ll T_c$ wird die freie Energie durch einen maximal strukturierten Zustand des Systems mit minimaler innerer Energie – den Zustand der Ordnung – minimiert. Für zunehmende Temperaturen $T \rightarrow T_c$ wächst folglich die Entropie S und das System gibt den Ordnungszustand zugunsten der Minimierung von F auf.

In Gl. (3.5) wurde das Schwinger-Funktional $W[\phi]$ im Minkowski-Raum als Legendre-Transformierte der effektiven Wirkung Γ eingeführt. Die entsprechende Definition im *euklidischen Raum* $\Gamma[\phi] = \sup_J (-W[J] + \int_x J\phi)$ führt mit dem Zusammenhang $F[J] = -T \ln Z[J] = -TW[J]$ der freien Energie $F[J]$ mit dem Schwinger-Funktional $W[J]$ auf die Darstellung

$$F[J]/T = \Gamma[\phi] - \int_x J\phi \quad \Rightarrow \quad F[\phi]/T = \Gamma[\phi] \quad (5.72)$$

der freien Energie *im thermischen Gleichgewicht* zuzüglich der Bewegungsgleichung $\delta\Gamma/\delta\phi(x) = J(x)$. Gleichung (5.72) zeigt, dass die freie Energie $F[\phi]$ als thermodynamisches Äquivalent zur effektiven Wirkung $\Gamma[\phi]$ gesehen werden kann. Dem mit der Temperatur T multiplizierten effektiven makroskopischen Potential

$$TV_{k \rightarrow 0}(\tilde{\rho}) = \left. \frac{T\Gamma}{\text{Vol.}} \right|_{J=0} \triangleq f(\mathcal{M}, T) \quad (5.73)$$

entspricht somit in der statistischen Physik das thermodynamische Potential der **freien Energiedichte** $f(\mathcal{M}, T)$ als Funktion der spontanen Magnetisierung \mathcal{M} und der Temperatur T . Der dimensionsabhängige Skalierungsfaktor T in (5.72) und (5.73) wird im Folgenden weggelassen. Aus dem effektiven Potential können alle thermodynamischen Größen bestimmt werden. So kann die Magnetisierung n als Funktion von T und J aus der Systemantwort $J := \frac{\partial V(\tilde{\rho})}{\partial n} = nV'(\tilde{\rho})$ auf ein homogenes externes Magnetfeld J ermittelt werden. Diese Relation führt zu dem *kritischen Exponenten* δ , der durch $J \sim n^\delta$ bei der kritischen Temperatur $T = T_c \Rightarrow \tilde{\rho}_0 = 0$ gegeben ist. Unter Verwendung des mit Hilfe der Näherung $W'/\Lambda \ll 1$ bestimmten effektiven Potentials

$$V_{k \rightarrow 0}(\tilde{\rho}) \equiv V(\tilde{\rho}) = \frac{1}{(\alpha\pi + \lambda_\Lambda^{-1})^2} \tilde{\rho} (\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_0)^2 \quad (5.74)$$

gemäß Gleichung (5.65)) ergibt sich ein kritischer Exponent δ von

$$\begin{aligned} J = \frac{\partial V(\tilde{\rho})}{\partial n} = nV'(\tilde{\rho}) &= \frac{1}{(\alpha\pi + \lambda_\Lambda^{-1})^2} n \left(\frac{n^2}{2} - \tilde{\rho}_0 \right) \left(\frac{3n^2}{2} - \tilde{\rho}_0 \right) \\ \Rightarrow J|_{\tilde{\rho}_0=0} &= \frac{3}{4(\alpha\pi + \lambda_\Lambda^{-1})^2} n^5 \sim n^5 \quad \Rightarrow \quad \delta = 5. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Die **magnetische Suszeptibilität** χ ist definiert als Änderung der spontanen Magnetisierung n mit dem externen Magnetfeld J : $\chi := \frac{\partial n}{\partial J}$. Mit (5.75) folgt

$$\chi = \frac{\partial n}{\partial J} = (\alpha\pi + \lambda_\Lambda^{-1})^2 \left(\left(\frac{n^2}{2} - \tilde{\rho}_0 \right)^2 + 5n^2 \left(\frac{n^2}{2} - \tilde{\rho}_0 \right) + n^4 \right)^{-1}. \quad (5.76)$$

Für $T < T_c$ ergibt sich der kritische Exponent aus $\chi_{(J)}|_{n(J=0)=\sqrt{2\tilde{\rho}_0}} \sim (\tilde{\rho}_0)^{-\gamma'}$, d. h. Gl. (5.76), ausgewertet für die Magnetisierung (5.69). In der $O(N)$ -symmetrischen Phase für $T > T_c$ ist der Ordnungsparameter n – die spontane Magnetisierung – für $J = 0$ identisch Null und es resultiert $\chi_{(J)}|_{n(J=0)=0} \sim (-\tilde{\rho}_0)^{-\gamma}$. Somit können die kritischen Exponenten γ, γ' zu

$$\tilde{\rho}_0 > 0: \quad \chi_{(J)}|_{n(J=0)=\sqrt{2\tilde{\rho}_0}} = \frac{1}{4}(\alpha\pi + \lambda_\Lambda^{-1})^2 (\tilde{\rho}_0)^{-2} \sim (\tilde{\rho}_0)^{-2} \quad \Rightarrow \quad \gamma' = 2 \quad \text{und} \quad (5.77)$$

$$\tilde{\rho}_0 < 0: \quad \chi_{(J)}|_{n(J=0)=0} = (\alpha\pi + \lambda_\Lambda^{-1})^2 (-\tilde{\rho}_0)^{-2} \sim (-\tilde{\rho}_0)^{-2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2 \quad (5.78)$$

bestimmt werden. Diese Ergebnisse zeigen, dass die magnetische Suszeptibilität χ am Phasenübergang $T \rightarrow T_c$ wie $(T - T_c)^{-2}$ divergiert. Eine weitere charakteristische und ebenfalls am kritischen Punkt divergierende Größe ist die **Korrelationslänge** ξ . Ihr Analogon im supersymmetrischen $O(N)$ -Modell ist die inverse renormierte Masse M : $M = \xi^{-1}$. In der spontan

$O(N)$ -gebrochenen Phase mit $T < T_c \Rightarrow \tilde{\rho}_0 > 0$ in Abwesenheit eines externen Magnetfeldes $J = 0 \Rightarrow n = \sqrt{2\tilde{\rho}_0}$ ergibt sich aus der renormierten Masse der radialen Mode aus Gl. (5.67) der kritische Exponent ν' :

$$M = \sqrt{V'_0 + 2V''_0 \tilde{\rho}} \Big|_{\tilde{\rho}_0} = 2\bar{\lambda}_\Lambda \tilde{\rho}_0 \quad \Rightarrow \xi = M^{-1} \sim (\tilde{\rho}_0)^{-1} \quad \Rightarrow \nu' = 1. \quad (5.79)$$

Die renormierte Masse der Anregungen in der $O(N)$ -symmetrischen Phase (5.66) für $T > T_c \Rightarrow \tilde{\rho}_0 < 0$ bei $J = 0$ führt zu dem letzten kritischen Exponenten ν mit

$$M = \sqrt{V'_0} \Big|_{\tilde{\rho}=0} = \frac{(-\tilde{\rho}_0)}{\alpha\pi + \lambda_\Lambda^{-1}} \quad \Rightarrow \xi = M^{-1} \sim (-\tilde{\rho}_0)^{-1} \quad \Rightarrow \nu = 1. \quad (5.80)$$

Tabelle 3 fasst die bisherigen Erkenntnisse dieses Kapitels noch einmal zusammen. Sie gibt einen Überblick über die (a) im supersymmetrischen $O(N)$ -Modell relevanten Größen, (b) deren Entsprechungen den Ferromagnetismus betreffend sowie (c) den Definitionen der daraus hervorgehenden kritischen Exponenten einschließlich deren Wert.

Größe	Entsprechung im Magnetismus	$\tilde{\rho}_0 > 0$ ($T < T_c$)	$\tilde{\rho}_0 = 0$ ($T = T_c$)	$\tilde{\rho}_0 < 0$ ($T > T_c$)	kritischer Exponent
$V(n, \delta\bar{\kappa}_\Lambda) _{J=0}$	$f(\mathcal{M}, T)$				
$\delta\bar{\kappa}_\Lambda$	$A(T_c - T)$				
$\langle n \rangle = \sqrt{2\tilde{\rho}_0} _{J=0}$	\mathcal{M}	$\langle n \rangle \sim (\tilde{\rho}_0)^\beta$			$\beta = \frac{1}{2}$
$J = \frac{\partial V(\tilde{\rho})}{\partial n}$	B		$J \sim n^\delta$		$\delta = 5$
$\frac{\partial n}{\partial J}$	χ	$\chi \sim (\tilde{\rho}_0)^{-\gamma'}$		$\chi \sim (-\tilde{\rho}_0)^{-\gamma}$	$\gamma' = \gamma = 2$
$M = \sqrt{V'} \Big _{\tilde{\rho}=0}$	$\xi = M^{-1}$			$\xi \sim (-\tilde{\rho}_0)^{-\nu}$	$\nu = 1$
$M = \sqrt{V' + 2V''\tilde{\rho}} \Big _{\tilde{\rho}_0}$	$\xi = M^{-1}$	$\xi \sim (\tilde{\rho}_0)^{-\nu'}$			$\nu' = 1$

Tabelle 3: Übersicht der relevanten Größen, ihren Entsprechungen im Ferromagnetismus sowie den Definitionen und Werten der kritischen Exponenten. V bezeichnet das effektive Potential $V_{k \rightarrow 0} \equiv V$. Des Weiteren stehen die Symbole f, \mathcal{M}, B, χ und ξ für: f – freie Energiedichte in Abwesenheit eines externen Magnetfeldes, \mathcal{M} – spontane Magnetisierung, B – äußeres Magnetfeld, χ – magnetische Suszeptibilität, ξ – Korrelationslänge. Die Bestimmung der kritischen Exponenten $\beta, \gamma, \gamma', \nu$ und ν' erfolgt bei verschwindendem externen Magnetfeld $J = 0$.

Die in Tabelle 3 zusammengefassten kritischen Exponenten stimmen exakt mit den in [20] (Abschnitt 29) in der skalaren ϕ^4 -Theorie erhaltenen kritischen Exponenten im Large- N -Regime überein⁵⁸.

⁵⁸aus [20]: $\beta = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{d-2}$ für $2 < d < 4$, $\delta = \frac{d+2}{d-2}$ mit d als der Raumdimension.

5.5 Test der polynomialen Entwicklung für $N \gg 1$

Um die Validität der „Methode“ des Polynomansatzes für $u(\hat{\rho}, t)$ in Hinblick auf deren Anwendung für *endliche* N zu testen, wird in diesem Abschnitt der **polynomiale Ansatz** für $u(\hat{\rho}, t)$ im *Large- N -Limit* untersucht. In Kapitel 5.2.2 wurden die kritischen Exponenten θ_n mittels einer polynomialen Entwicklung von u bereits exakt ermittelt. Nun soll untersucht werden, wie weit diese Methode des Polynomansatzes greift und wo ihre Grenzen liegen.

Zunächst soll der in dem Feld $\hat{\rho}$ *lineare Ansatz*

$$u_t(\hat{\rho}) = \lambda(t)(\hat{\rho} - \kappa(t)), \quad (5.81)$$

getestet werden. Dieser entspricht einem Potential

$$V_t(\hat{\rho}) = u_t^2(\hat{\rho})\hat{\rho} = \lambda(t)^2(\hat{\rho} - \kappa(t))^2\hat{\rho} \quad (5.82)$$

der Ordnung $\mathcal{O}(\hat{\rho}^3)$ mit der Anfangsbedingung (vgl. (5.18))

$$V(\hat{\rho}, t=0) \equiv V_\Lambda = \lambda_\Lambda^2(\hat{\rho} - \kappa_\Lambda)^2\hat{\rho}. \quad (5.83)$$

Die Skalenabhängigkeit des Potentials wird dabei durch die t -abhängigen dimensionslosen Kopplungen $\kappa(t)$ und $\lambda(t)$ bestimmt. Diese sind in $d = 3$ Raumdimensionen durch $\bar{\kappa}(k)/k = \kappa(t)$ und $\bar{\lambda}(k) = \lambda(t)$ mit den dimensionsbehafteten Kopplungen $\bar{\kappa}$ und $\bar{\lambda}$ verknüpft. Dass der minimalistische Ansatz (5.81) bereits die Phasenstruktur der Theorie und das Skalenverhalten des Potentials qualitativ richtig beschreiben kann, ist in bosonischen Theorien ([6], Abschnitt 2.5) gezeigt worden. Setzt man den Ansatz (5.81) in die partielle DGL (5.2) für $N \gg 1$ ein und entwickelt (5.2) in Potenzen von $\hat{\rho}$ um die Nullstelle $\kappa(t)$ der Funktion $u_t(\hat{\rho})$, so resultieren durch Koeffizientenvergleich nachstehende *gewöhnliche Differentialgleichungen* für die Kopplungen $\kappa(t)$ und $\lambda(t)$:

$$\partial_t \kappa = -\kappa + \alpha = -\kappa + \frac{N}{8\pi^2} \quad \text{und} \quad \partial_t \lambda = 0. \quad (5.84)$$

Mit den Anfangsbedingungen $\kappa(0) = \kappa_\Lambda$ und $\lambda(0) = \lambda_\Lambda$ ergeben sich die Kopplungen zu

$$\kappa(t) = \alpha + (\kappa_\Lambda - \alpha)e^{-t} \quad \text{und} \quad \lambda(t) = \text{const.} = \lambda_\Lambda. \quad (5.85)$$

Mögliche Fixpunktlösungen κ_* und λ_* müssen gemäß (3.33) die Relationen $\partial_t \lambda_*(t) = \partial_t \kappa_*(t) = 0$ erfüllen. Mit (5.84) resultiert

$$\kappa_* = \alpha \rightarrow \bar{\kappa}_* = \alpha \cdot k \quad \text{bzw.} \quad \lambda_* = \bar{\lambda}_* = \text{const.} = \lambda_\Lambda. \quad (5.86)$$

Natürlich kann die einfache Struktur (5.81) von $u_t(\hat{\rho})$ nicht der exakten impliziten Lösung (5.19) gerecht werden. So erwartet man, dass der Polynomansatz nur in der Nähe von $\hat{\rho} \approx \alpha$ mit der exakten Lösung übereinstimmt. Die Berücksichtigung immer höherer Ordnungen $\mathcal{O}(\hat{\rho}^n)$ sollte zu einer Annäherung an den exakten Fluss des Potentials führen. Aus dem linearen Ansatz (5.81) folgt z. B. $u_*''|_{\hat{\rho}=\alpha} = 0$ im Gegensatz zu dem exakten Wert $u_*''|_{\hat{\rho}=\alpha} = -6\alpha\lambda_\Lambda^3$ (siehe Gl. (5.44)). Erweitert man (5.81) um einen quadratischen Term zu

$$u_t(\hat{\rho}) = \lambda(t)(\hat{\rho} - \kappa(t))^1 + b(t)(\hat{\rho} - \kappa(t))^2, \quad (5.87)$$

so ergeben sich unverändert die Differentialgleichungen (5.84) für $\kappa(t)$ und $\lambda(t)$ sowie zusätzlich

$$\partial_t b(t) = b + 3\alpha\lambda(t)^3 \quad (5.88)$$

für die Kopplung $b(t)$. Ihre Lösung $b(t) = 3\alpha\lambda_\Lambda^3(e^t - 1) = u_t''(\kappa(t))/2!$ für die Anfangsbedingung (5.83), d. h. $b(0) = 0$, stimmt mit dem Ergebnis (5.44) aus der exakten Lösung überein.

Für einen allgemeinen **polynomialen Ansatz n-ter Ordnung**

$$u_t(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^n a_i(t)(\hat{\rho} - \kappa(t))^i \quad (5.89)$$

mit $a_0(t) = \kappa(t)$ und $a_1(t) \equiv \lambda(t)$ im Large- N -Limit können folgende Aussagen getroffen werden:

(i) Die erste bis n -te Ableitung des Polynoms $u_t(\hat{\rho})$ am Entwicklungspunkt $\kappa(t)$ stimmt mit den Ableitungen der exakten Funktion $u_t(\hat{\rho})$ aus (5.19) überein:

$$\begin{aligned} u_{t,Polym}^{(i)} \Big|_{(\kappa(t))} &= u_{t,exakt}^{(i)} \Big|_{(\kappa(t))} && \text{für } 1 \leq k \leq n \\ 0 &= u_{t,Polym}^{(i)} \Big|_{(\kappa(t))} \neq u_{t,exakt}^{(i)} \Big|_{(\kappa(t))} && \text{für } k > n. \end{aligned} \quad (5.90)$$

(ii) Die gewöhnliche gekoppelte Differentialgleichung der n -ten Kopplung $a_n(t)$ mit $n \geq 2$ hängt von der ersten bis n -ten Kopplung $\{\lambda(t), a_2(t), \dots, a_n(t)\}$ ab. D. h. alle Kopplungen a_n mit $n = 2, 3, \dots$ können als Funktion der Kopplung $\lambda(t) = \lambda_\Lambda$ ausgedrückt werden. Die relevante Kopplung $\kappa(t)$ fließt *nicht* in die Differentialgleichungen anderer Kopplungen ein. Somit lässt sich jedes Polynom als Funktion der beiden Kopplungen $\lambda(t) = \lambda_\Lambda$ und $\kappa(t) = \alpha + (\kappa_\Lambda - \alpha)e^{-t}$ darstellen: $u(\hat{\rho}, t) = u(\hat{\rho}, \kappa(t), \lambda(t))$.

Tabelle 4 fasst die ersten neun Kopplungen $a_n(t)$ zusammen.

K	AB	Lösung
$\kappa(t)$	$\kappa(0) = \kappa_\Lambda$	$\kappa(t) = \alpha + (\kappa_\Lambda - \alpha)e^{-t}$
$\lambda(t)$	$\lambda(0) = \lambda_\Lambda$	$\lambda(t) = const. = \lambda_\Lambda$
$a_2(t)$	$a_2(0) = 0$	$a_2(t) = 3\alpha\lambda_\Lambda^3(e^t - 1)^1$
$a_3(t)$	$a_3(0) = 0$	$a_3(t) = 18\alpha^2\lambda_\Lambda^5(e^t - 1)^2$
$a_4(t)$	$a_4(0) = 0$	$a_4(t) = \frac{5}{3}\alpha\lambda_\Lambda^5 [81\alpha^2\lambda_\Lambda^2(e^t - 1)^3 - (1 + e^t + e^{2t})(e^t - 1)^1]$
$a_5(t)$	$a_5(0) = 0$	$a_5(t) = 6\alpha^2\lambda_\Lambda^7 [189\alpha^2\lambda_\Lambda^2(e^t - 1)^4 - 5(1 + e^t + e^{2t})(e^t - 1)^2]$
$a_6(t)$	$a_6(0) = 0$	$a_6(t) = \frac{7}{5}\alpha\lambda_\Lambda^7 [7290\alpha^4\lambda_\Lambda^4(e^t - 1)^5 - 300\alpha^2\lambda_\Lambda^2(1 + e^t + e^{2t})(e^t - 1)^3 - (1 - e^{5t})]$
$a_7(t)$	$a_7(0) = 0$	$a_7(t) = \frac{4}{45}\alpha^2\lambda_\Lambda^9 [-503(e^t - 1)(1 - e^{5t}) + 125e^t(e^{2t} - 1)^2 + 1082565\alpha^4\lambda_\Lambda^4(e^t - 1)^6 - 60750\alpha^2\lambda_\Lambda^2(1 + e^t + e^{2t})(e^t - 1)^4]$
$a_8(t)$	$a_8(0) = 0$	$a_8(t) = \frac{3}{7}\alpha\lambda_\Lambda^9 [2189187\alpha^6\lambda_\Lambda^6(e^t - 1)^7 - 155925\alpha^4\lambda_\Lambda^4(1 + e^t + e^{2t})(e^t - 1)^5 - 2198\alpha^2\lambda_\Lambda^2(e^t - 1)^2(1 - e^{5t}) + 875\alpha^2\lambda_\Lambda^2e^t(e^{2t} - 1)^2(e^t - 1) + 3(1 - e^{7t})]$

Tabelle 4: Die Tabelle gibt einen Überblick über die ersten neun dimensionslosen Kopplungen (K) $a_i(t)$ mit ihren jeweiligen Anfangsbedingungen (AB) $a_i(t = 0)$ und der dazugehörigen Lösung $a_n(t)$ für den Polynomansatz (5.89).

Im Folgenden wird der **Konvergenzradius** r des Polynomansatzes (5.89) für $u_t(\hat{\rho})$ untersucht, da er qualitative Aussagen über den Gültigkeitsbereich der polynomialen Approximation

ermöglicht. Es werde hierzu speziell die *Fixpunktlösung* – charakterisiert durch die Fixpunkt-
kopplungen $\kappa_* = \alpha$ und a_{n*} (siehe Kapitel 5.2.2, Tabelle 2) – betrachtet. Da der Konvergenz-
radius $r(\lambda_\Lambda, \alpha)$ in komplizierter Weise von der Anfangskopplung λ_Λ sowie dem Parameter
 $\alpha = N/(8\pi^2)$ abhängt, werden nur die Spezialfälle **(a)** $\lambda_\Lambda \alpha \gg 1$ sowie **(b)** $\lambda_\Lambda \alpha \ll 1$ diskutiert.

Die Forderung **(a)** $\lambda_\Lambda \alpha \gg 1$ führt unter Verwendung der Fixpunktkopplungen a_{n*} auf den
Konvergenzradius

$$r_{u_*} := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1*}}{a_{n+2*}} \right| = \frac{1}{\alpha \lambda_*^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1) - 2}{6(n-1)(2n+1)} = \frac{1}{12\alpha \lambda_*^2} = \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{N \lambda_*^2} \quad (5.91)$$

der Reihe (5.89). Dieser Grenzfall ist problematisch in der Hinsicht, dass die Fixpunktlösung u_*
für $\lambda_* = \lambda_\Lambda > \tilde{c}_1^{-1} \approx (\alpha\pi)^{-1}$ gemäß (5.31) keine eindeutige Funktion mehr darstellt. Für große
Kopplungen $\lambda_\Lambda \gg 1$ wird der Konvergenzradius r_{u_*} gegen Null gehen und die Potenzreihe (5.89)
ist für alle $\hat{\rho} \neq \alpha$ divergent.

Die Annahme **(b)** mit $\lambda_\Lambda \alpha \ll 1$ repräsentiert den physikalisch *relevanten Fall*, da die Fix-
punktlösung für diese Wahl der klassischen Kopplung λ_Λ eindeutig ist. Der Konvergenzradius
 r_{u_*} folgt hier einem komplexeren Verhalten, wie aus Abb. 21 (rechts) ersichtlich ist. Es gilt

$$\left| \frac{a_{n*}}{a_{n+1*}} \right| \sim \alpha \quad \text{für ungerade } n \quad \text{sowie} \quad \left| \frac{a_{n*}}{a_{n+1*}} \right| \sim \frac{1}{\alpha \lambda_*^2} \quad \text{für gerade } n. \quad (5.92)$$

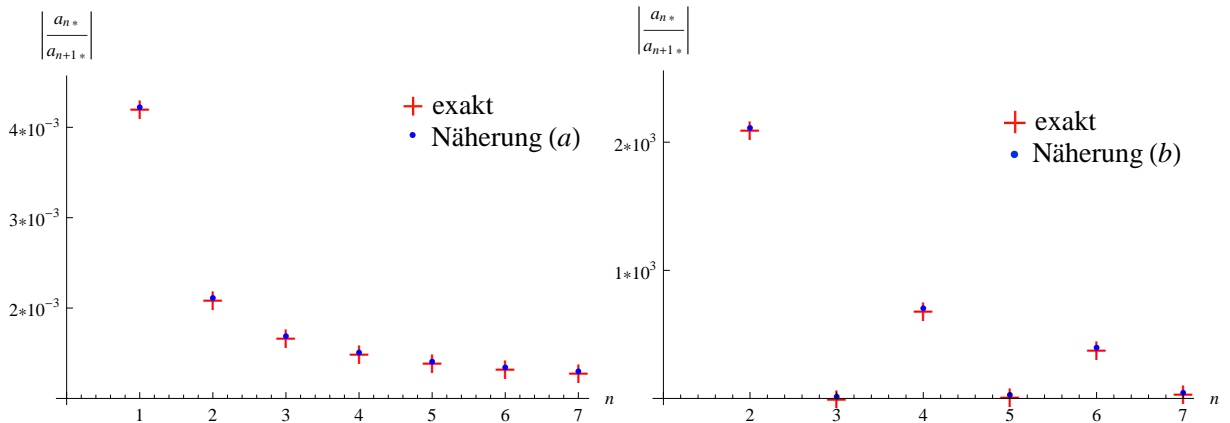


Abbildung 21: Es gelte $N = 100 \Rightarrow \alpha \approx 1,27$. **Links:** Fall **(a)** mit $\lambda_\Lambda \alpha = 10 \gg 1$. Die Abbildung
zeigt die exakten Brüche $\left| \frac{a_{n*}}{a_{n+1*}} \right|$ (+) sowie die für das Regime **(a)** gültigen Werte gemäß Gl.
(5.91) (•). Das Polynom (5.89) besitzt für die gewählten Parameter gemäß (5.91) einen endlichen
Konvergenzradius von $r_{u_*} = \frac{1}{96\pi^2} \approx 1,06 \cdot 10^{-3}$. **Rechts:** Fall **(b)** mit $\lambda_\Lambda \alpha = 0,01 \ll 1$. Für
kleine Kopplungen λ_Λ werden die exakten Brüche $\left| \frac{a_{n*}}{a_{n+1*}} \right|$ (+) näherungsweise durch die Werte
 $\left(\frac{54}{5}, \frac{150}{7}, \frac{14084}{405}\right) \cdot \alpha$ für $n = 3, 5, 7$ sowie $\left(\frac{3}{18}, \frac{1}{18}, \frac{63}{2012}\right) \cdot \frac{1}{\alpha \lambda_*^2}$ für $n = 2, 4, 6$, dargestellt durch „•“,
wiedergegeben. Aus der Abbildung ergibt sich ein endlicher Konvergenzradius in dem Bereich
 $44 \lesssim r_{u_*} \lesssim 400$

Die Existenz eines endlichen Konvergenzradius (siehe Abb. 21) für die Grenzfälle $\lambda_\Lambda \alpha \gg 1$
bzw. $\lambda_\Lambda \alpha \ll 1$ erlaubt jedoch keinerlei Aussage über Existenz und Endlichkeit von r_{u_*} für *be-*
liebige λ_Λ . Für hinreichend kleine klassische Kopplungen $\lambda_\Lambda = C \cdot \alpha^{-1} \sim \alpha^{-1}$ mit $C \ll 1$ (Fall
(b)), die eine eindeutige Fixpunktlösung $u_*(\hat{\rho})$ implizieren, kann der Konvergenzradius jedoch
durch

$$r_{u_*} \sim \alpha \sim N \quad (5.93)$$

abgeschätzt werden. $r_{u_*} \sim N$ verkörpert eine große, aber *endliche* Zahl. Eine wichtige Konsequenz aus dieser Endlichkeit des Konvergenzradius des Polynoms $u_*(\hat{\rho})$ ist ein *verschwindender* Konvergenzradius der äquivalenten dimensionsbehafteten Größe $W'_{k_*}(\tilde{\rho})$. Dies resultiert aus nachstehender Betrachtung unter Verwendung von (5.89) und (5.93):

$$W'_{k_*}(\tilde{\rho}) = u_*(\hat{\rho}) \cdot k = \lambda_*(\tilde{\rho} - \bar{\kappa}_*)^1 + \frac{a_{2*}}{k}(\tilde{\rho} - \bar{\kappa}_*)^2 + \dots + \frac{a_{n*}}{k^{n-1}}(\tilde{\rho} - \bar{\kappa}_*)^n \quad (5.94)$$

$$\Rightarrow r_{W'_{k_*}} \sim kN, \quad \lim_{k \rightarrow 0} r_{W'_{k_*}} = 0 \quad (5.95)$$

mit $\bar{\kappa}_* = k \cdot \kappa_*$. Innerhalb des Konvergenzradius $|\hat{\rho} - \alpha| < r_{u_*}$ konvergiert die Taylorreihe (5.89) der dimensionslosen Fixpunktlösung u_* absolut gegen die exakte Lösung (5.19). Je größer dabei die Anzahl der Felder N , umso größer der Konvergenzradius $r_{u_*} \sim N$. Die exakte, *dimensionsbehaftete* Größe $W'(\tilde{\rho})$ kann jedoch in keinem, noch so kleinen Intervall $|\tilde{\rho} - \bar{\kappa}_*| > 0$ durch ein Polynom der Struktur (5.94) approximiert werden.

Wird die Beschränkung $\lambda_\Lambda \ll \alpha^{-1}$ gelöst, so muss aufgrund der komplexen Abhängigkeit von $r = r(\lambda_\Lambda, \alpha)$ das Verhalten der Quotienten $|a_{n*}/a_{n+1*}|$ fallspezifisch untersucht werden.

Abb. 22 zeigt die exakte Fixpunktlösung (5.23) sowie die aus der polynomialen Entwicklung erhaltenen Funktionen $u_*(\hat{\rho})$ der Ordnung $\mathcal{O}(\hat{\rho} - \kappa)^n$ mit $n = 2, 4, 6, 8$. Es wurde dabei die Anfangskopplung $\lambda_\Lambda = \frac{0.1}{\alpha\pi} \approx 0,03\alpha^{-1} \ll \alpha^{-1}$ gewählt, für die die Taylorreihe (5.89) absolut gegen die exakte Lösung in einem endlichen, beschränkten Bereich $|\hat{\rho} - \alpha| < r_{u_*}$ konvergiert. Die Wahl von $N = 100$ (Abb. 22 links) bzw. $N = 1000$ (Abb. 22 rechts) verdeutlicht die Aufweitung des absolut konvergenten Bereiches $|\hat{\rho} - \alpha| < r_{u_*} \sim N$ mit steigender Anzahl der Felder N .

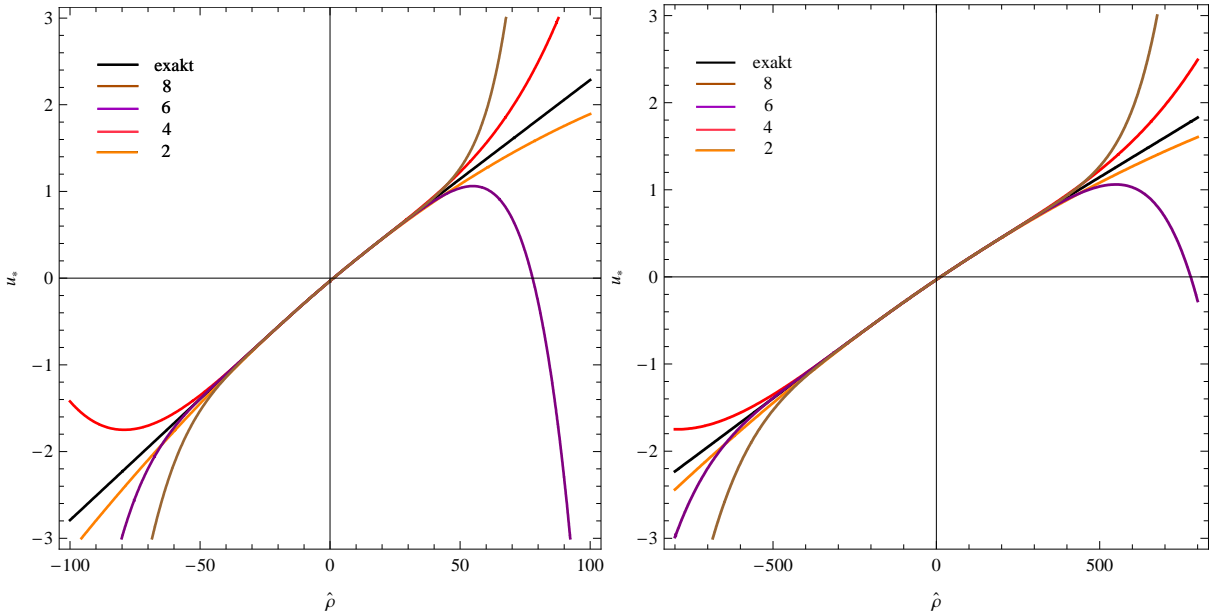


Abbildung 22: Exakte Fixpunktlösung $u_*(\hat{\rho})$ und Polynom-Approximationen der Ordnung $(\hat{\rho} - \alpha)^n$ mit $n = 2, 4, 6, 8$ im Vergleich. Parameter-Wahl: $\lambda_\Lambda = \frac{0.1}{\alpha\pi} \ll \alpha^{-1}$ entsprechend Fall (b); $N = 100$ (links) und $N = 1000$ (rechts).

Abb. 23 vergleicht die exakte und die polynomiale Fixpunktlösung $u_*(\hat{\rho})$ für die klassische Kopplung $\lambda_\Lambda \approx 0,29/\alpha$ im Bereich zwischen den Grenzfällen **(a)** und **(b)**. Auch hier ist eine Zunahme des Konvergenzradius mit der Anzahl der Felder N zu beobachten.

Die bisherigen Aussagen über die Konvergenz der polynomialen Entwicklung beschränkten sich auf die Fixpunktlösung $u_*(\hat{\rho})$. Es ist jedoch allgemein zu erwarten, dass für beliebige $t \in (-\infty, 0]$ äquivalente Aussagen getroffen werden können.

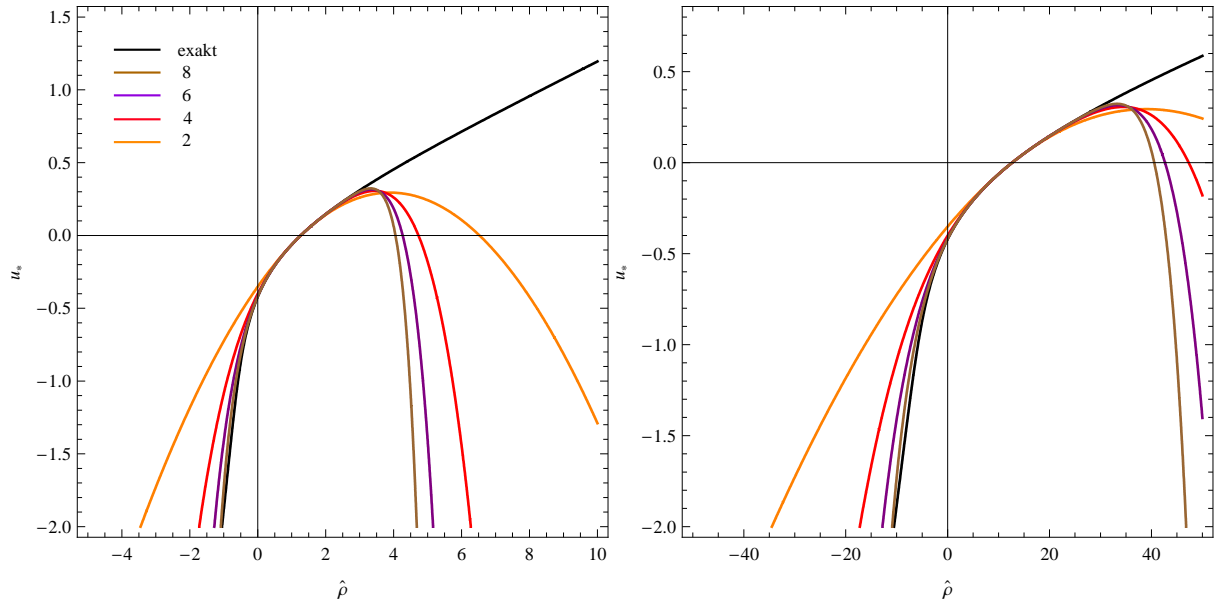


Abbildung 23: Exakte Fixpunktlösung $u_*(\hat{\rho})$ und Polynom-Approximationen der Ordnung $(\hat{\rho} - \alpha)^n$ mit $n = 2, 4, 6, 8$ im Vergleich. Parameter-Wahl: $\lambda_\Lambda = 0,9/\tilde{c}_1 \approx \frac{0,1286}{\alpha}$; $N = 100$ (links) und $N = 1000$ (rechts).

Zusammenfassend kann die Polynomentwicklung (5.89) als Näherung von $u_t(\hat{\rho})$ wie folgt charakterisiert werden:

Schon der einfache Ansatz (5.81) linear in dem Feld $\hat{\rho}$ offenbart die korrekte Fixpunktstruktur. Für die Bereiche $\lambda_\Lambda \alpha \gg 1$ und $\lambda_\Lambda \alpha \ll 1$ der klassischen Kopplung λ_Λ konnte gezeigt werden, dass die Taylorreihe (5.89) einen endlichen Konvergenzradius $r_{u_*} \sim N$ besitzt, der mit der Anzahl der Skalarfelder n linear anwächst. Dies bedingt das Versagen der Reihenentwicklung des dimensionsbehafteten Fixpunktpotentials, da der entsprechende Konvergenzradius $r_{W_{k^*}} \sim k \cdot N$ im makroskopischen Limes $k \rightarrow 0$ identisch Null ist.

Teil III

Resümee

Im Zentrum dieser Diplomarbeit stand das $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische, lineare $O(N)$ -Sigma-Modell in $d = 3$ euklidischen Dimensionen. Diese Klasse von Theorien weist zwei wesentliche Charakteristika auf: Invarianz der Wirkung zum einen unter äußeren⁵⁹, kontinuierlichen Supersymmetrie-Transformationen und zum anderen unter inneren, kontinuierlichen $O(N)$ -Transformationen. Als Untersuchungsmethode wurde die nichtperturbative, funktionale Renormierungsgruppenmethode gewählt, deren „Werkzeug“ eine funktionale Differentialgleichung für die effektive, skalenabhängige Mittelwertwirkung Γ_k darstellt. Ausgehend von einer gegebenen mikroskopischen Wirkung Γ_Λ bei kleinen Längenskalen führt der Renormierungsgruppenfluss als Trajektorie im Theorie-Raum zu der makroskopischen effektiven Mittelwertwirkung Γ , die Fluktuationen auf allen Längenskalen mit einschließt.

Die *Vorgehensweise* kann systematisch in zwei Schritte untergliedert werden: zunächst die **Herleitung** und schließlich die **Lösung** der Flussgleichung.

1) Herleitung der Flussgleichung

Grundlage der in Kapitel 4.1 erörterten Herleitung der Flussgleichung bildete eine off-shell manifest supersymmetrische Wirkung als Trunkierung in der Operatorentwicklung der Ordnung $\mathcal{O}(K)$, wobei die superkovariante Ableitung \mathcal{D} bzw. der Wellenoperator K (4.3) als Operator fungierte. Betrachtet wurde diese Trunkierung in der *Local Potential Approximation*, in der die gesamte Skalenabhängigkeit in dem Superpotential $W_k(\rho)$ enthalten ist. Da in drei euklidischen Dimensionen keine Majorana-Spinoren konstruiert werden können, erfolgte die Ableitung der Wetterich-Gleichung in der Minkowski-Raumzeit $\mathbb{R}^{1,2}$. Anschließend wurde die Flussgleichung durch eine Wick-Rotation in den euklidischen Raum überführt. Im Gegensatz zu Arbeiten wie [15–17], in denen die Wetterich-Gleichung auf Ebene der Komponentenfelder ausgewertet wurde, erfolgte die Herleitung in dieser Arbeit direkt im $\mathbb{R}^{3|2}$ -Superraum mit dem zentralen Resultat der Flussgleichung (4.36) für das Superpotential $W_k(\rho)$. Diese Gleichung wurde weiterhin in eine rein bosonische Flussgleichung (4.40) für die Funktion $W_k(\tilde{\rho})$ umgeformt.

Es wurde gezeigt, dass dieses Resultat (4.40) einer verallgemeinerten Flussgleichung in der Art entspricht, dass der Spezialfall $N = 1$ auf die in [16] diskutierte Flussgleichung des $\mathcal{N} = 1$ Wess-Zumino-Modells in $d = 3$ führt. Dies entspricht dem Aspekt, dass das supersymmetrische $O(N)$ -Modell als N -fache Kopie des Wess-Zumino-Modells aufgefasst werden kann. Der formal offensichtliche Fakt, dass die Flussgleichung des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells in allgemein d Raumdimensionen (4.42) durch die Ersetzung $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \rightarrow \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$ der Impulsintegrale aus (4.40) folgt, wird durch die Übereinstimmung von (4.42) mit in [14–17] untersuchten Flussgleichungen für $d = 1, 2, 3$ und $N = 1$ untermauert. Abschließend wurden in Kapitel 4.1 die Flussgleichungen des skalaren- bzw. supersymmetrischen $O(N)$ -Modells vergleichend gegenübergestellt und die radiale Mode sowie die $N - 1$ Goldstone-Moden identifiziert.

2) Lösung der Flussgleichung

Zunächst wurden die Regulatorfunktionen in Abschnitt 4.2 spezifiziert. Diese Wahl erlaubte die analytische Ausführung der Impulsintegrationen in (4.40) mit dem Ergebnis (4.65) – einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung für $W'_k(\tilde{\rho})$ bzw. dessen dimensionsloses Analogon $u_t(\tilde{\rho})$. Um diese Differentialgleichung analytisch zu behandeln, wurde sich auf die Untersuchung des „*Large-N-Limit*“ $N \gg 1$ beschränkt. Die Spezialisierung auf den Grenzfall $N \gg 1$ ist sinnvoll, da dieses Vorgehen z. B. zur Analyse von skalaren $O(N)$ -Theorien [6, 10, 12] in $d = 3$ bereits eine detaillierte, quantitative Beschreibung des Flusses in der LPA ermöglichte.

⁵⁹Äußere Symmetrie steht äquivalent für Raumzeit-Symmetrie.

In Kapitel 5 wurde die Lösung der Flussgleichung (5.2) für $N \gg 1$ erörtert. Zusammenfassend konnte im Large- N -Limit

1. eine exakte, implizite Lösung $f(u_t(\hat{\rho}), t, \hat{\rho})$ (5.15) der Flussgleichung (5.2) für $u_t(\hat{\rho})$ für beliebige mikroskopische Potentiale bestimmt,
2. die allgemeine, implizite Fixpunktlösung u_* (5.23) ermittelt,
3. die Lösung $u(\hat{\rho}, t)$ linear in der Störung $\vartheta(\hat{\rho}, t)$ um die Fixpunktlösung $u_*(\hat{\rho})$ entwickelt und u in der Nähe der Fixpunktlösung exakt zu (5.55) bestimmt,
4. alle (unendlich viele) kritischen Exponenten θ_n (5.56) der Theorie berechnet,
5. mit 1. – 4. die physikalischen Parameter identifiziert und die Phasenstruktur sowie das kritische Verhalten des Modells beschrieben werden
6. der *polynomiale Ansatz* (5.89) für die Funktion $u_t(\hat{\rho})$ im Large- N -Limit getestet und dessen Anwendbarkeit bzgl. der Untersuchung des Potentialflusses sowie der Fixpunktanalyse bewertet werden.

Die Resultate dieser Arbeit über das $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische $O(N)$ -Modell in $d = 3$ werden nun in nachstehenden **Thesen** zusammenfassend formuliert. Die gewonnenen Erkenntnisse beruhen dabei auf der Betrachtung des *Grenzfalles vieler Felder* $N \gg 1$ und der trunkierten effektiven Mittelwertwirkung Γ_k in der *Local Potential Approximation*.

Thesen

I) Das $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische $O(N)$ -Modell in $d = 3$ besitzt die durch einen freien Parameter c_1 gekennzeichneten und implizit gegebenen *Fixpunktlösungen*

$$\frac{\hat{\rho}}{u_*} - \frac{\alpha}{u_*} - \frac{\alpha u_*}{1 + u_*^2} - 2\alpha \arctan(u_*) = c_1 \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{N}{8\pi^2},$$

die für $\{c_1 \in \mathbb{R} : |c_1| > \tilde{c}_1 = 2\alpha(\frac{\pi}{3} + \frac{5}{16}\sqrt{3})\}$ auf dem Definitionsbereich $\hat{\rho} \in [0, \infty)$ eindeutige Funktionen $u_*(\hat{\rho})$ repräsentieren.

II) Die *Lösung im linearisierten Fixpunktregime* ist durch

$$u(\hat{\rho}, t) = u_*(\hat{\rho}) + \sum_{n \in \mathbb{N}_0} C_n u_*^{\omega_n + 1} u_*' e^{\omega_n t}$$

gegeben. Die Forderungen der Endlichkeit und Entwickelbarkeit von u in eine Taylorreihe an der Stelle $\hat{\rho} = \alpha$ bedingen eine Quantisierung der Eigenwerte mit den erlaubten Werten $\omega_n = n - 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dies führt auf die *kritischen Exponenten*

$$\Theta_n = -\omega_n = 1 - n \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

der Theorie.

III) $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische $O(N)$ -Modelle in $d = 3$ besitzen eine relevante, eine marginale und unendlich viele irrelevante *Eigenrichtungen* entsprechend den kritischen Exponenten $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 0$ sowie $\theta_k = 1 - k$ mit $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Diese kritischen Exponenten klassifizieren die physikalischen Parameter des Modells.

IV) Die untersuchte Theorie lässt sich durch *mindestens einen, maximal jedoch zwei* physikalische und im UV bei der Skala $k = \Lambda$ zu fixierende Parameter⁶⁰ charakterisieren. Ein physikalischer Parameter ist durch die relevante, dimensionsbehaftete Kopplung $\bar{\kappa}(t)$, die gleichzeitig als

⁶⁰Die Anzahl der physikalischen Parameter setzt sich aus der Summe der relevanten und der marginal-relevanten Eigenrichtungen zusammen.

Skala zur Messung von Energien und Längen fungiert, gegeben. Einen zweiten, dimensionslosen physikalischen Parameter könnte die Kopplung λ repräsentieren. Diese ist in der gewählten Trunkierung der LPA *exakt marginal*. Um diese Kopplung eindeutig klassifizieren zu können, ist die Hinzunahme der Wellenfunktionsrenormierung $Z_k(\rho)$ und eventuell höherer Terme in der Gradientenentwicklung (4.1) notwendig. Alternativ könnte die Analyse der Taylorentwicklung der β -Funktionen (3.34) über die lineare Ordnung $\mathcal{O}((a_i - a_{i*})^1)$ hinaus Aussagen über die Einordnung der Kopplung λ ermöglichen.

V) Die Wahl der mikroskopischen relevanten Kopplung $\kappa(t=0) = \kappa_\Lambda$ determiniert das *makroskopische Verhalten* der Theorie. Fine-tuning der Kopplung mit $\kappa_\Lambda = \kappa_* = \alpha$ entspricht exakt der Phasengrenze zwischen dem $O(N)$ -symmetrischen und dem spontan $O(N)$ -gebrochenen Regime. $\kappa_\Lambda > \kappa_*$ führt zu einer Makrophysik, in der die $O(N)$ -Symmetrie sowohl spontan gebrochenen als auch erhalten sein kann. $\kappa_\Lambda < \kappa_*$ hingegen bedingt eine die $O(N)$ -Symmetrie respektierende Makrophysik. Der Phasenübergang lässt sich als *Phasenübergang 2. Ordnung* charakterisieren.

VI) Das mit dem mikroskopischen Potential $V_\Lambda = \bar{\lambda}_\Lambda^2 (\bar{\rho} - \bar{\kappa}_\Lambda)^2 \bar{\rho}$ assoziierte effektive Potential V weist für beliebige klassische Kopplungen $\bar{\kappa}_\Lambda$ und $\bar{\lambda}_\Lambda$ mindestens eine Nullstelle auf. Dies impliziert, dass die Grundzustandsenergie E_0 identisch Null und somit Supersymmetrie erhalten ist.

VII) Aus der Erhaltung der Supersymmetrie resultieren betragsmäßig identische Massen für Bosonen und Fermionen. Diese ergeben sich aus der Krümmung des effektiven Potentials $V(\bar{\rho}) = \lim_{k \rightarrow 0} (W'_k)^2 \bar{\rho}$ bzgl. der Skalarfelder n^i an dessen Minimum. Im $O(N)$ -symmetrischen Regime mit $\kappa_\Lambda < \alpha$ ist die Masse näherungsweise durch

$$M \simeq \frac{|\bar{\kappa}_\Lambda - \alpha\Lambda|}{\alpha\pi + \bar{\lambda}_\Lambda^{-1}}$$

gegeben. Befindet sich das System in der spontan $O(N)$ -gebrochenen Phase mit $\kappa_\Lambda > \alpha$, so existieren $N - 1$ masselose Anregungen sowie eine radiale Mode der Masse

$$M_{rad} = 2\bar{\lambda}_\Lambda(\bar{\kappa}_\Lambda - \alpha\Lambda).$$

VIII) Supersymmetrische und skalare $O(N)$ -Modelle zeigen formal und physikalisch betrachtet viele Gemeinsamkeiten. So weisen beide Modelle einen Phasenübergang 2. Ordnung auf. Auch wird die Makrophysik dieser Theorien im Wesentlichen durch *eine relevante Kopplung* $\kappa(t)$ bestimmt. Des Weiteren dienen beide Modelle als Prototypen für die Untersuchung der Wiederherstellung einer spontan $O(N)$ -gebrochenen Symmetrie bei hohen Temperaturen.

Ein Unterschied zeigt sich jedoch in der Anzahl der *marginalen Kopplungen* in der LPA. Neben der relevanten Kopplung κ treten im skalaren $O(N)$ -Modell unendlich viele irrelevante Kopplungen auf. Das supersymmetrische $O(N)$ -Modell besitzt hingegen neben den unendlich vielen irrelevanten Kopplungen auch eine marginale Kopplung λ .

IX) Ein *Polynomansatz* der Form (5.89) für das dimensionslose Superpotential $u_t(\hat{\rho})$ erlaubt – wie in den Kapiteln 5.2.2 und 5.5 gezeigt wurde – die korrekte Bestimmung der Fixpunktstruktur des supersymmetrischen $O(N)$ -Modells. Der Konvergenzradius der Reihenentwicklung für die Fixpunktlösung $u_*(\hat{\rho})$ ist eine endliche, zu der Anzahl N der Skalarfelder n^i proportionale Zahl: $r_{u_*} \sim N$. Daraus folgt ein verschwindender Konvergenzradius $r_{W'_k} \sim Nk \rightarrow 0$ für das dimensionelle Superpotential $W'_{k*}(\hat{\rho})$ im makroskopischen Limes $k \rightarrow 0$. Der Polynomansatz versagt demnach bei der Beschreibung des dimensionsbehafteten Fixpunktpotentials $V_*(\hat{\rho})$.

Literatur

Funktionale Renormierungsgruppe (allgemein)

- [1] D. J. Amit, „Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena“, World Scientific (1978).
- [2] G. Busiello, L. De Cesare, I. Rabuffo, „Differential formulation of the renormalisation group in the large-n limit“, J. Phys. A; Math. Gen. 14 (1981) L513.
- [3] M. E. Fisher, „Renormalization group theory: Its basis and formulation in statistical physics“, Rev. Mod. Phys. 70 (1998) 653.
- [4] D. F. Litim „Optimised renormalisation group flows“, Phys. Rev. D64 (2001) 105007.
- [5] A. Bonanno, D. Zappalà, „Towards an accurate determination of the critical exponents with the Renormalization Group flow equations“, Phys. Lett. B504 (2001) 181.
- [6] J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich, „Non-Perturbative renormalization Flow in Quantum Field Theory and Statistical Physics“, Phys. Rept. 363 (2002) 223.
- [7] H. Gies, „Introduction to the functional RG and applications to gauge theories“, (2006) hep-ph/0611146.
- [8] J. M. Pawłowski, „Aspects of the functional renormalization group“, Annals Phys. 322 (2007) 2831.
- [9] D. F. Litim, „Optimization of the exact renormalization group“, Phys. Lett. B486 (2008) 92.

Renormierungsgruppenfluss des bosonischen $O(N)$ -Modells

- [10] C. Wetterich, „The average action for scalar fields near phase transitions“, Z. Phys. C57 (1993) 451.
- [11] N. Tetradis, C. Wetterich, „Critical exponents from the effective average action“, Nucl. Phys. B422 (1994) 541.
- [12] N. Tetradis, D. F. Litim, „Analytical Solutions of Exact Renormalization Group Equations“, Nucl. Phys. B464 (1996) 492.

Renormierungsgruppenfluss supersymmetrischer Theorien

- [14] F. Synatschke, G. Bergner, H. Gies, A. Wipf, „Flow Equation for Supersymmetric Quantum Mechanics“, JHEP 03:028 (2009).
- [15] F. Synatschke, H. Gies, A. Wipf, „Phase Diagram and Fixed-Point-Structure of two dimensional $\mathcal{N} = 1$ Wess-Zumino Models“, Phys. Rev. D80 (2009) 085007.
- [16] F. Synatschke, J. Braun, A. Wipf, „ $\mathcal{N} = 1$ Wess-Zumino Model in $d = 3$ at zero and finite temperature“, Phys. Rev. D81 (2010) 125001.
- [17] F. Synatschke, T. Fischbacher, G. Bergner, „The two dimensional $N=(2,2)$ Wess-Zumino Model in the functional renormalization group approach“, Phys. Rev. D82 (2010) 085003.

Quantenfeldtheorie

- [18] L. S. Brown, „Quantum Field Theory“, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [19] T. Kugo, „Eichtheorie“, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1997).
- [20] J. Zinn-Justin, „Quantum Field Theory and Critical Phenomena“, Oxford University Press Inc., New York (2002).
- [21] D. Tong, „Quantum Field Theory“, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html> (zuletzt aufgerufen am 24.08.2010).

Supersymmetrie

- [22] S. R. Coleman, J. Mandula, „All Possible Symmetries of the S Matrix“, Phys. Rev. 159 (1967) 1251.
- [23] R. Haag, J. T. Lopuszanski, M. Sohnius, „All possible generators of supersymmetries of the S-matrix“, Nucl. Phys. B88 (1975) 257.
- [24] W. A. Bardeen, K. Higashijima, M. Moshe, „Spontaneous breaking of scale invariance in a supersymmetric model“, Nucl. Phys. B250 (1985) 437.
- [25] H. Kalka, G. Soff, „Supersymmetrie“ Teubner-Verlag, Stuttgart, 1997.
- [26] M. Moshe, J. Zinn-Justin, „Phase structure of supersymmetric models at finite temperature“, Nucl. Phys. B648 (2003) 131.
- [27] G. Bergner, „Ausgewählte Approximationsmethoden für supersymmetrische Modelle“, Diplomarbeit (2005), www.tpi.uni-jena.de/qfphysics/theses.html (zuletzt aufgerufen am 14.09.2010).
- [28] J. F. Dawson, B. Mihaila, P. Berglund, F. Cooper, „Supersymmetric approximations to the 3D supersymmetric O(N) model“, Phys. Rev. D73 (2006) 016007.
- [29] U. Harst „Dimensionsreduktion des supersymmetrischen O(3)-Sigma-Modells“, Zusatzversuch an der FSU Jena (2007), www.tpi.uni-jena.de/qfphysics/theses.html (zuletzt aufgerufen am 14.09.2010).
- [30] Y. Shirman, „TASI 2008 Lectures: Introduction to Supersymmetry and Supersymmetry Breaking“, (2009), arXiv:0907.0039v1.
- [31] www.isv.uu.se/~rathsman/grouptheory/Blaback-report.pdf (zuletzt aufgerufen am 05.11.2010).
- [32] A. Wipf, Skript „Symmetrien in der Physik“, (2007), www.personal.uni-jena.de/~p5anwi/lecturenotes.html (zuletzt aufgerufen am 05.11.2010).
- [33] A. Wipf, Skript „Supersymmetry“, www.personal.uni-jena.de/~p5anwi/lecturenotes.html (zuletzt aufgerufen am 17.09.2010).

Mathematische Methoden

- [34] V. I. Arnold, „Mathematical Methods of Classical Mechanics“, Springer Science + Business Media Inc., New York, 1989.
- [35] www.math.ethz.ch/u/felder/Teaching/Partielle_Differentialgleichungen
(zuletzt aufgerufen am 20.07.2010).
- [36] Manuskript zur Vorlesung „Lie-Gruppen“,
www.igt.uni-stuttgart.de/LstDiffgeo/Kuehnel/LieGruppen.pdf
(zuletzt aufgerufen am 31.08.2010).

weitere Verweise

- [37] G. Krey, „Phasenübergänge und kritische Phänomene“, Vieweg-Verlag Braunschweig, Wiesbaden (1980).
- [38] M. Reuter, „Nonperturbative Evolution equation for Quantum Gravity“, Phys. Rev. D57 (1998) 971.
- [39] J. Braun, H. Gies, „Scaling laws near the conformal window of many-flavor QCD“, JHEP 1005:060 (2010).
- [40] A. Eichhorn, H. Gies, „Ghost anomalous dimension in the asymptotically safe quantum gravity“, Phys. Rev. D81 (2010) 104010.
- [41] J. Braun, A. Eichhorn, H. Gies, J. M. Pawłowski, „On the nature of the Phase Transition in SU(N), Sp(2) and E(7) Yang-Mills theory“, arxiv:1007.2619 (2010).
- [42] J. Braun, B. Klein, P. Piasecki, „On the scaling behavior of the chiral phase transition in QCD in finite and infinite volume“, arXiv:1008.2155 (2010).
- [43] Webseite des LHC: <http://lhc.web.cern.ch/lhc/>
(zuletzt aufgerufen am 20.11.2010).

Danksagung

Ich bedanke mich herzlichst für die fachliche und menschliche Unterstützung während der Zeit des Schreibens meiner Diplomarbeit bei Prof. Andreas Wipf, Franziska Synatschke-Czerwonka, Daniel Körner und allen theoretischen Physikern des Helmholtzweges 4, meinen Eltern Karin & Andreas, meinem Bruder Robert, meinen Großeltern Wilhelm & Erika und Heinz & Ilse, meiner Katze Elli und meinem Freund Christoph.

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Seitens der Verfasserin bestehen keine Einwände, die Arbeit für die öffentliche Nutzung der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, den 29. November 2010

.....
Marianne Mastaler