

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut



seit 1558

Instantonen und fermionische Nullmoden im supersymmetrischen $\mathbb{C}P^N$ -Modell

Diplomarbeit

zur Erlangung des
akademischen Grades eines
Diplom-Physikers (Dipl.-Phys.)

vorgelegt von Lukas Janssen,
geboren am 15.10.1983 in Aachen

Jena, 6. November 2008

1. *Gutachter:* Prof. Dr. phil. habil. Andreas Wipf

2. *Gutachter:* Dr. rer. nat. Ulrich Theis

Tag der Verleihung des Diploms:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Superraumformalismus in zwei Dimensionen	11
2.1	$\mathcal{N} = (2, 2)$ -Superraumformalismus in Minkowski-Raumzeit	11
2.1.1	Dirac-Matrizen und Spinoren	11
2.1.2	Superraum und Supersymmetriealgebra	12
2.1.3	Superfelder	14
2.1.4	Supersymmetrietransformationen und invariante Wirkungen	15
2.1.5	Das Wess-Zumino-Modell	18
2.1.6	Supersymmetrische Eichtheorien	19
2.1.7	$\mathcal{N} = (1, 1)$ -Supersymmetrie	23
2.2	$\mathcal{N} = (2, 2)$ -Superraumformalismus in euklidischer Raumzeit	24
2.2.1	Dirac-Matrizen und Spinoren	24
2.2.2	Der euklidische Superraum	25
2.2.3	Superfelder	26
2.2.4	Supersymmetrietransformationen	27
2.2.5	$\mathcal{N} = (1, 1)$ -Supersymmetrie	28
3	Supersymmetrische Sigma-Modelle in zwei Dimensionen	31
3.1	$O(N)$ -Modell in Minkowski-Raumzeit	31
3.2	$O(N)$ -Modell in euklidischer Raumzeit	33
3.3	$(1, 1)$ - $\mathbb{C}P^N$ -Modell in Minkowski-Raumzeit	34
3.4	$(1, 1)$ - $\mathbb{C}P^N$ -Modell in euklidischer Raumzeit	39
3.5	Äquivalenz von $\mathbb{C}P^1$ -Modell und $O(3)$ -Modell	39
3.6	$(2, 2)$ - $\mathbb{C}P^N$ -Modell in Minkowski-Raumzeit	41
3.7	$(2, 2)$ - $\mathbb{C}P^N$ -Modell in euklidischer Raumzeit	44
4	Instantonlösungen des bosonischen $\mathbb{C}P^N$-Modells	47
4.1	Das bosonische $\mathbb{C}P^N$ -Modell auf \mathbb{R}^2	47
4.1.1	Äquivalente Beschreibungen des Modells	47
4.1.2	Die topologische Ladung	49
4.1.3	Bogomolny-Schranke und Selbstdualitätsgleichungen	50
4.1.4	Instantonlösungen des $\mathbb{C}P^N$ -Modells	51
4.2	Instantonen auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times S^1$	55
4.2.1	Instantonlösungen mit periodischen Randbedingungen	56
4.2.2	Instantonen mit getwisteten Randbedingungen	58
4.2.3	1-Instantonkonstituenten im $\mathbb{C}P^1$ -Modell	59
4.2.4	1-Instantonkonstituenten im $\mathbb{C}P^N$ -Modell	62
4.2.5	2-Instantonkonstituenten im $\mathbb{C}P^N$ -Modell	69
4.2.6	Höhere Instanton-Ladungen	75

5	Fermionische Nullmoden im Instanton-Hintergrund	77
5.1	Minimal gekoppelte fermionische Nullmoden	77
5.1.1	Nullmoden im 1-Instanton-Hintergrund	79
5.1.2	Nullmoden im 2-Instanton-Hintergrund	81
5.1.3	Nullmoden im Instanton-Hintergrund höherer Ladungen	84
5.2	Supersymmetrisch gekoppelte fermionische Nullmoden	84
5.2.1	Nullmoden im 1-Instanton-Hintergrund	88
5.2.2	Nullmoden im Instanton-Hintergrund höherer Ladungen	91
5.2.3	Supersymmetrische Nullmoden und Half-BPS-Zustände	93
6	Zusammenfassung	95
A	Konventionen	97
A.1	Einheiten	97
A.2	Metrik und Dirac-Matrizen	97
A.3	Supersymmetriegeneratoren	98
B	Vergleich der Ergebnisse mit der Originalliteratur	99
B.1	$O(N)$ -Modell in Minkowski-Raumzeit	99
B.2	$O(N)$ -Modell in euklidischer Raumzeit	100
B.3	CP^N -Modell in euklidischer Raumzeit	102
C	Quantentheorie bei endlichen Temperaturen	105
D	Mathematica-Notebook zur Darstellung der Nullmoden	107

*Die Himmel erzählen die Herrlichkeit Gottes,
und das Himmelsgewölbe verkündet seiner Hände Werk.
Ein Tag sprudelt dem anderen Kunde zu,
und eine Nacht meldet der anderen Kenntnis –
ohne Rede und ohne Worte, mit unhörbarer Stimme.
Ihr Schall geht aus über die ganze Erde
und bis an das Ende der Welt ihre Sprache.*

Die Bibel in Psalm 19

1 Einleitung

Als Max Planck im Jahre 1900 das nach ihm benannte Strahlungsgesetz herleiten konnte, unter der Annahme, dass ein schwarzer Strahler Energie nur in Form unteilbarer Elemente emittiert [Pla01], ahnte wohl niemand, welche Auswirkungen diese Entdeckung in der Folge auf die Wissenschaft, die Technik und sogar die ganze Gesellschaft haben würde. Knapp fünf Jahre später erklärte Albert Einstein mit Hilfe der Quantenhypothese den Photoeffekt [Ein05] und durch die Arbeiten zur Quantenmechanik von Heisenberg [Hei25] und Schrödinger [Sch26] wurde die Grundlage für ein systematisches Verständnis des Aufbaus der Materie gelegt. Ohne ein solches Verständnis wären viele moderne Entwicklungen nicht vorstellbar. In seiner Ansprache anlässlich des 100-jährigen Jubiläums der Entdeckung der Röntgenstrahlen machte der damalige Bundespräsident Roman Herzog darauf aufmerksam: „Ökonomen haben nachgewiesen, dass in den USA rund 23% des Bruttosozialproduktes auf den wissenschaftlichen Durchbruch zur Quantenmechanik in der Physik zurückgehen. Bei uns dürfte die Zahl ähnlich hoch liegen. Transistoren, Computer, Laser und nukleare Energien beruhen zwar nicht nur auf der Quantenmechanik, aber sie sind ohne sie nicht denkbar.“¹ In diesem Sinne wollen wir mit dieser Arbeit zu einem grundlegenden Verständnis unserer Welt beitragen, auf dem bedeutende Entwicklungen in mittel- oder langfristiger Zukunft beruhen werden.

Seit der Entdeckung des Neutrons [Cha32] und der Formulierung der Theorie des β -Zerfalls [Fer34] kennen wir neben der Gravitation und dem Elektromagnetismus auch noch die starke und die schwache Wechselwirkung. Wichtige Schritte zum Verständnis dieser vier fundamentalen Wechselwirkungen waren die Arbeiten zur Quantenelektrodynamik [Sch48, Fey49], zur Yang-Mills-Theorie [YM54], zur Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung [Gla61, SW64, Wei67] und zur Quantenchromodynamik [FGML73]. Im Standardmodell der Elementarteilchenphysik werden bis auf die Gravitation alle Wechselwirkungen zu einer Eichtheorie mit der Symmetriegruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ zusammengefasst. Die Vorhersagen des Standardmodells stimmen bis zu einer Energieskala von einigen hundert GeV hervorragend mit den experimentellen Ergebnissen überein: Mit Ausnahme des Higgs-Bosons konnten bei Experimenten am CERN in Genf und am Fermilab in Chicago alle vom Standardmodell vorhergesagten Elementarteilchen nachgewiesen werden [A⁺94], und wir erwarten, dass z. B. mithilfe des neuen LHC-Beschleunigers am CERN in den nächsten Jahren auch das Higgs-Boson beobachtet wird [Ell07].

Trotz dieser großen Erfolge ist die Beschreibung der Elementarteilchenphysik durch das Standardmodell unvollständig und lässt noch einige fundamentale Fragen offen. Beispielsweise möchte man den Ursprung der Massen der Elementarteilchen verstehen oder ergründen, weshalb in der Natur Materie gegenüber Antimaterie bevorzugt ist. Offen ist auch, ob alle vier fundamentalen Wechselwirkungen in einer Theorie vereinigt werden können. Außerdem liefert das Standardmodell keine Erklärung für die großen Rätsel der modernen Kosmologie, wie die Frage nach dem Wesen der dunklen Materie und der dunklen Energie. Die

¹Bundespräsident a. D. Roman Herzog, Ansprache anlässlich des Jubiläums der Entdeckung der Röntgenstrahlen in der Universität Würzburg, 8.11.1995

Hoffnung ist deshalb groß, dass bereits bei der vom LHC erreichten TeV-Energieskala über das Standardmodell hinausgehende, neue Physik beobachtet werden kann. Diese Hoffnung gründet sich unter anderem auf das sogenannte Hierarchie-Problem: Allgemein wird davon ausgegangen, dass das Higgs-Boson des Standardmodells als fundamentales Teilchen nicht isoliert existieren kann. Schwierigkeiten treten insbesondere dann auf, wenn man die Masse des Higgs-Bosons infolge des Austauschs von virtuellen Teilchen berechnet. Diese divergenten Quantenkorrekturen können nur dadurch kontrolliert werden, dass man die Theorie bei einem „Ultraviolett-Cutoff“ Λ_{UV} abschneidet. Falls das Standard-Modell in eine kompliziertere, auch für hohe Energien $\gtrsim \Lambda_{UV}$ gültige Theorie (wie z. B. eine „Grand Unified Theory“ oder eine Quantengravitation) eingebettet wäre, so würde die Masse des Higgs-Bosons sehr empfindlich von den Details dieser Hochenergie-Theorie abhängen. Damit wäre es nur sehr schwer verständlich, weshalb das Higgs-Boson eine (im Verhältnis) derart geringe Masse hat, wie es die derzeitigen experimentellen Hinweise vermuten lassen.

Der zurzeit aussichtsreichste Kandidat für die Lösung dieses sogenannten Hierarchie-Problems ist die Supersymmetrie [WZ74]. Eine Supersymmetrietransformation vermittelt zwischen Teilchen mit halbzahligen Spin (Fermionen) und Teilchen mit ganzzahligen Spin (Bosonen). Für jedes Boson muss deshalb ein Fermion als supersymmetrischer Partner und umgekehrt für jedes Fermion ein Boson in die Theorie eingeführt werden. Die minimale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells (MSSM) enthält deshalb z. B. neben dem Elektron mit Spin 1/2 das Seletron mit Spin 0 oder neben einem Gluon mit Spin 1 ein Gluino mit Spin 1/2. In einer supersymmetrischen Theorie werden divergente Quantenkorrekturen durch die Paarung von virtuellen Fermionen und Bosonen systematisch ausgelöscht [FIZ74]. Somit wäre ein leichtes Higgs-Boson nicht mehr unnatürlich [Wit81]. Die verbleibenden Quantenkorrekturen der Higgs-Masse wären klein, wenn die Differenzen der Massen supersymmetrischer Partner kleiner als 1 TeV sind, sodass bereits bei den Experimenten am LHC erste Hinweise auf supersymmetrische Teilchen gefunden werden könnten [Ell07].

Das Studium supersymmetrischer Modelle ist auch noch aus einem anderen Grund attraktiv. Das Theorem von Coleman und Mandula macht eine Aussage über die allgemeinst mögliche Symmetrie-Lie-Algebra der Streumatrix einer relativistischen Quantenfeldtheorie: Falls diese gewisse physikalisch sinnvolle Voraussetzungen erfüllt, so sind neben inneren Symmetrien und der Poincaré-Symmetrie keine weiteren Symmetrien möglich [CM67]. In supersymmetrischen Modellen wird diese Einschränkung umgangen, indem man graduierte Lie-Algebren zulässt, die neben den Kommutatoren einer gewöhnlichen Lie-Algebra zusätzlich Antikommutatoren enthalten. Haag, Lopuszański und Sohnius zeigten 1975, dass die Supersymmetriealgebra die einzige mit relativistischer Quantenfeldtheorie vereinbare, graduierte Lie-Algebra von Symmetrien der S -Matrix ist [HLS75]. In diesem Sinne haben supersymmetrische Quantenfeldtheorien die höchstmögliche Symmetrie und sind deshalb auch per se interessante und elegante Modelle, die es sich lohnt zu erforschen. Es existiert die Auffassung, dass die Schönheit dieser Modelle derart beeindruckend sei, dass man versucht wäre „zu argumentieren, dass eine Theorie mit solch einzigartigen Eigenschaften irgendwo in der Natur eine Relevanz haben muss“². Aufgrund dieser Vorzüge sind derzeit praktisch alle ernstzunehmenden über das Standardmodell hinausgehenden Theorien supersymmetrisch.

Um gewisse Effekte komplizierterer Theorien zu untersuchen, bedient man sich oft sogenannter Spielzeugmodelle. Dies sind Modelle, die die Theorie in gewissen Aspekten simulie-

²Original: “One is tempted to argue that a theory with such unique properties must have some relevance somewhere for nature.“ [Nil84]

ren, aber vergleichsweise einfach handhabbar sind und damit Einblicke in bislang unverstandene Sachverhalte der komplizierten Theorie bieten. Ein Beispiel für ein solches Spielzeugmodell ist das zweidimensionale \mathbb{CP}^N -Modell. Dieses Modell teilt qualitativ wesentliche Eigenschaften mit vierdimensionaler QCD: Es ist wie die QCD renormierbar und bei beliebigen Temperaturen asymptotisch frei [Wit79]. Es zeigt Confinement bei $T = 0$ und Deconfinement für $T > 0$, während in der QCD verschiedene Ansätze einen Confinement-Deconfinement-Phasenübergang bei einer kritischen Temperatur im Bereich von 150–200 MeV vorhersagen [Act85]. Der genaue Mechanismus ist dort allerdings bis heute nicht vollständig verstanden [Gre03]. Durch Renormierung wird im \mathbb{CP}^N -Modell eine nichtverschwindende Masse erzeugt („Dimensional Transmutation“). Eine weitverbreitete Annahme ist, dass derselbe Effekt auch in der QCD auftritt. Wie in der QCD existieren auch im \mathbb{CP}^N -Modell für alle N Instantonlösungen, die durch ganzzahlige topologische Ladungen charakterisiert sind. Instantonen sind lokalisierte Lösungen der euklidischen Bewegungsgleichungen und können in vielen Modellen (einschließlich QCD und \mathbb{CP}^N -Modell) in exakter analytischer Form berechnet werden. Sie führen zu Tunneleffekten im Vakuumzustand und beeinflussen dadurch viele andere Eigenschaften der Theorie, die i. Allg. mithilfe gewöhnlicher Störungsrechnung allein nicht verstanden werden können. Beispielsweise sind Instantoneffekte für Confinement im \mathbb{CP}^N -Modell verantwortlich [DLDV79]. In der QCD haben sich zwar frühere Hoffnungen, dass Instantoneffekte auch hier den Confinement-Mechanismus erklären könnten, nicht bestätigt, jedoch liefern Instantonen auch in diesem Modell bedeutende Beiträge zur Quark-Quark-Wechselwirkung [Raj82].

Ziel dieser Arbeit ist es, Instantonlösungen des \mathbb{CP}^N -Modells zu untersuchen und die fermionischen Nullmoden des Dirac-Operators im Hintergrund dieser Lösungen für den Fall minimaler sowie supersymmetrischer Kopplung zu diskutieren. Es ist die Hoffnung des Verfassers, dass dadurch ein Beitrag zum Verständnis dieses Modells und seiner supersymmetrischen Erweiterung geleistet werden kann, sodass die hier erhaltenen Erkenntnisse Hilfestellung zur Erforschung realistischerer Theorien sein können, die vielleicht einmal das Standardmodell ablösen könnten.

Dazu führen wir zunächst in Kapitel 2 den $\mathcal{N} = (2, 2)$ -Superraum ein und diskutieren mögliche invariante Wirkungen. Darauf aufbauend behandeln wir in Kapitel 3 supersymmetrische Sigma-Modelle und konstruieren das supersymmetrische $O(N)$ -Modell sowie das supersymmetrische \mathbb{CP}^N -Modell, jeweils in Minkowski-Raumzeit und in euklidischer Raumzeit. In Kapitel 4 betrachten wir die Instantonlösungen des bosonischen \mathbb{CP}^N -Modells bei Temperatur $T = 0$ und bei endlicher Temperatur $T > 0$. Insbesondere untersuchen wir dabei den Fall getwisteter Randbedingungen, in dem sich die topologische Dichte in Konstituenten mit gebrochener Ladung aufspaltet. In Kapitel 5 beziehen wir schrittweise wieder Fermionen in die Untersuchung ein und berechnen die Lösungen der Dirac-Gleichung für minimale sowie supersymmetrische Fermionenkopplung im Instanton-Hintergrund. Den Abschluss bildet schließlich die Diskussion einer speziellen supersymmetrisch gekoppelten Nullmode, welche direkt ohne Lösung der Dirac-Gleichung mithilfe der Supersymmetrietransformationen erhalten werden kann.

2 Superraumformalismus in zwei Dimensionen

2.1 $\mathcal{N} = (2, 2)$ -Superraumformalismus in Minkowski-Raumzeit

2.1.1 Dirac-Matrizen und Spinoren

Wir wollen supersymmetrische Feldtheorien mit vier reellen Superladungen diskutieren, zwei mit positiver Chiralität und zwei mit negativer Chiralität. Dazu führen wir den $\mathcal{N} = (2, 2)$ -Superraum ein, angepasst an die zweidimensionale Minkowski-Raumzeit mit der Metrik¹

$$(\eta^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Wir verwenden die chirale Darstellung der Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

mit

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2, \quad (2.3)$$

und den Pauli-Matrizen² σ_i . Die Matrix

$$\gamma_* = -\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\sigma_3 \quad (2.4)$$

ist nützlich zur Untersuchung chiraler Symmetrien³. Sie quadriert zu eins und antivertauscht mit den Dirac-Matrizen,

$$\{\gamma_*, \gamma^\mu\} = 0. \quad (2.5)$$

Spinoren haben in unserer zweidimensionalen Raumzeit $2^{[d/2]} = 2$ Komponenten. Wir bezeichnen die Komponenten mit

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

und die Komponenten des adjungierten Spinors mit

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = ((\psi_+)^* \quad (\psi_-)^*) = (\bar{\psi}_+ \quad \bar{\psi}_-). \quad (2.7)$$

$\bar{\psi}_\pm$ bedeutet also komplexe Konjugation, $\bar{\psi}_\pm = (\psi_\pm)^*$. Lorentztransformationen wirken auf Vektoren über

$$A^\mu(x) \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x), \quad (2.8)$$

¹Die hier verwendeten Konventionen sind im Wesentlichen dem Buch „Mirror Symmetry“ von Hori et al. [H⁺03] entnommen, nach dem wir uns in diesem Kapitel zumeist richten. Sie wurden auch in der Vorlesung von S. Uhlmann [Uhl07] verwendet.

² $(\sigma_i) := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ mit $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ und ε_{ijk} total antisymmetrisch, $\varepsilon_{123} = 1$.

³Unter einer chiralen Transformation verstehen wir $\begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}$.

2 Superraumformalismus in zwei Dimensionen

und auf Spinoren über

$$\psi(x) \mapsto S\psi(\Lambda^{-1}x), \quad \bar{\psi}(x) \mapsto \psi(\Lambda^{-1}x)S^{-1}, \quad (2.9)$$

wobei wir die 2×2 -Matrizen

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \cosh \gamma & \sinh \gamma \\ \sinh \gamma & \cosh \gamma \end{pmatrix}, \quad S := \begin{pmatrix} e^{-\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{\gamma/2} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

eingeführt haben. Die links- und rechtshändigen Projektoren

$$P_L := \frac{1}{2}(1 - \gamma_*) , \quad P_R := \frac{1}{2}(1 + \gamma_*), \quad (2.11)$$

erfüllen die Projektoralgebra

$$P_{R,L}^2 = P_{R,L}, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0, \quad P_R + P_L = 1. \quad (2.12)$$

Mithilfe von P_L und P_R kann ψ in die links- und rechtshändigen Komponenten ψ_L und ψ_R zerlegt werden,

$$\psi_L := P_L \psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R := P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_+ \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Da die Matrix S mit P_L und P_R vertauscht, mischen die Komponenten von ψ unter Lorentztransformationen nicht. Die Händigkeit bleibt unter Lorentztransformationen also erhalten.

2.1.2 Superraum und Supersymmetriealgebra

Wir wollen die Lichtkegelkoordinaten

$$x^\pm := x^0 \pm x^1 \quad (2.14)$$

verwenden. Die Ableitungen nach diesen Koordinaten sind

$$\partial_\pm := \frac{\partial}{\partial x^\pm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right). \quad (2.15)$$

Zusätzlich zu den gewöhnlichen Raumzeit-Dimensionen besteht der $(2, 2)$ -Superraum aus vier Graßmann-Richtungen mit den komplexen fermionischen Koordinaten

$$\theta^+, \theta^-, \bar{\theta}^+, \bar{\theta}^-, \quad (2.16)$$

die

$$(\theta^\pm)^* = \bar{\theta}^\pm \quad (2.17)$$

erfüllen. Sie antikommutieren untereinander und mit anderen Graßmann-Zahlen (Graßmann-Eigenschaft). Eine auf diesem Raum definierte Funktion hängt dann nicht nur von x^\pm ab, sondern auch von θ^\pm und $\bar{\theta}^\pm$. Eine solche Funktion heißt Superfeld. Sie kann in ein Polynom in θ^\pm und $\bar{\theta}^\pm$ entwickelt werden,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x^\pm, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) = & f_0(x^\pm) + \theta^+ f_+(x^\pm) + \theta^- f_-(x^\pm) + \bar{\theta}^+ f'_+(x^\pm) + \bar{\theta}^- f'_-(x^\pm) \\ & + \theta^+ \theta^- f_{+-}(x^\pm) + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

Da jede Graßmann-Koordinate wegen der Antikommutationseigenschaft zu null quadriert, $(\theta^\pm)^2 = (\bar{\theta}^\pm)^2 = 0$, gibt es höchstens 16 nichtverschwindende Terme in der Entwicklung.

Die Supersymmetriealgebra ist ohne zentrale Ladungen von der Form

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu, \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0, \\ [P_\mu, Q_\alpha] &= [P_\mu, \bar{Q}_\alpha] = 0, \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0, \end{aligned} \tag{2.19}$$

wobei $\alpha, \beta = 1, 2$ und $\mu, \nu = 0, 1$. In unserer Schreibweise mit den Indizes \pm ist der einzige nichtverschwindende Antikommutator

$$\{Q_\pm, \bar{Q}_\pm\} = H \pm P, \tag{2.20}$$

mit $H := P_0$ und $P := P_1$. Alle anderen Kommutatoren und Antikommutatoren verschwinden,

$$\begin{aligned} Q_+^2 &= Q_-^2 = \bar{Q}_+^2 = \bar{Q}_-^2 = 0, \\ \{\bar{Q}_+, \bar{Q}_-\} &= \{Q_+, Q_-\} = 0, \\ \{Q_-, \bar{Q}_+\} &= \{Q_+, \bar{Q}_-\} = 0, \end{aligned} \tag{2.21}$$

und

$$[P_\mu, Q_\pm] = [P_\mu, \bar{Q}_\pm] = [P_\mu, P_\nu] = 0. \tag{2.22}$$

Im dem Fall, dass zentrale Ladungen auftreten, werden die Bedingungen (2.21b) und (2.21c) abgeschwächt zu

$$\begin{aligned} \{\bar{Q}_+, \bar{Q}_-\} &= Z, & \{Q_+, Q_-\} &= Z^*, \\ \{Q_-, \bar{Q}_+\} &= \tilde{Z}, & \{Q_+, \bar{Q}_-\} &= \tilde{Z}^*. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Die zentralen Ladungen Z und \tilde{Z} kommutieren mit allen anderen Operatoren der Theorie.

Die Supersymmetriegeneratoren Q_\pm und \bar{Q}_\pm können durch Differentialoperatoren auf dem Superraum dargestellt werden,

$$\begin{aligned} Q_\pm &= \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} + i\bar{\theta}^\pm \partial_\pm, \\ \bar{Q}_\pm &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\pm} - i\theta^\pm \partial_\pm. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Mit

$$P_\mu = -i\partial_\mu \tag{2.25}$$

erfüllen sie die Supersymmetriealgebra ohne zentrale Ladungen. Die superkovarianten Ableitungen

$$\begin{aligned} D_\pm &= \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} - i\bar{\theta}^\pm \partial_\pm, \\ \bar{D}_\pm &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\pm} + i\theta^\pm \partial_\pm, \end{aligned} \tag{2.26}$$

antikommütieren mit Q_{\pm} und \bar{Q}_{\pm} ,

$$\begin{aligned} \{D_+, Q_{\pm}\} &= 0, & \{D_-, Q_{\pm}\} &= 0, \\ \{D_+, \bar{Q}_{\pm}\} &= 0, & \{D_-, \bar{Q}_{\pm}\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Untereinander erfüllen sie bis auf das Vorzeichen die gleichen Antikommutationsregeln wie die Q 's,

$$\{D_{\pm}, \bar{D}_{\pm}\} = 2i\partial_{\pm}, \quad (2.28)$$

alle anderen Antikommutatoren verschwinden.

2.1.3 Superfelder

Wir können an die Superfelder Bedingungen stellen, wodurch jeweils gewisse Komponentenfelder eliminiert werden. Dabei müssen wir allerdings darauf Acht haben, dass die Bedingungen keine Einschränkungen an die x -Abhängigkeiten der Felder darstellen.

Ein chirales Superfeld Φ ist ein komplexes Superfeld, welches die Chiralitätsbedingung

$$\bar{D}_{\pm}\Phi = 0 \quad (2.29)$$

erfüllt. Sind Φ_1 und Φ_2 chirale Superfelder, dann ist auch die Summe $\Phi_1 + \Phi_2$ und das Produkt $\Phi_1\Phi_2$ ein chirales Superfeld. Ein allgemeines chirales Superfeld hat die Form

$$\Phi(x^{\pm}, \theta^{\pm}, \bar{\theta}^{\pm}) = \phi(y^{\pm}) + \theta^+\psi_+(y^{\pm}) + \theta^-\psi_-(y^{\pm}) + \theta^+\theta^-F(y^{\pm}), \quad (2.30)$$

wobei $y^{\pm} = x^{\pm} - i\theta^{\pm}\bar{\theta}^{\pm}$. Dass Superfelder dieser Form die Chiralitätsbedingung (2.29) erfüllen, ist offensichtlich, da $\bar{D}_{\pm}\theta^{\alpha} = 0$ und $\bar{D}_{\pm}y^{\alpha} = 0$ gilt. Das Abzählen der Freiheitsgrade legt nahe, dass sich auch jedes chirale Superfeld derart darstellen lässt, dies also die allgemeine Form ist: Ein chirales Superfeld hat 4 Freiheitsgrade (6 Superraum-Koordinaten $x^{\pm}, \theta^{\pm}, \bar{\theta}^{\pm}$, Chiralitätsbedingung liefert zwei Gleichungen). Dies entspricht den 4 freien Koordinaten (y^{\pm}, θ^{\pm}) des Superfeldes der Form (2.30). Ein chirales Superfeld kann in Koeffizientenfunktionen, die nur noch von x^{\pm} abhängen, geschrieben werden,

$$\begin{aligned} \Phi(x^{\pm}, \theta^{\pm}, \bar{\theta}^{\pm}) &= \phi - i\theta^+\bar{\theta}^+\partial_+\phi - i\theta^-\bar{\theta}^-\partial_-\phi - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\partial_+\partial_-\phi \\ &\quad + \theta^+\psi_+ - i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\partial_-\psi_+ + \theta^-\psi_- - i\theta^-\theta^+\bar{\theta}^+\partial_+\psi_- + \theta^+\theta^-F. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Das komplex konjugierte Superfeld $\bar{\Phi}$ eines chiralen Superfeldes erfüllt die Bedingung

$$D_{\pm}\bar{\Phi} = 0 \quad (2.32)$$

und heißt antichirales Superfeld. Es hat die Entwicklung

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \bar{\phi} + i\theta^+\bar{\theta}^+\partial_+\bar{\phi} + i\theta^-\bar{\theta}^-\partial_-\bar{\phi} - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\partial_+\partial_-\bar{\phi} \\ &\quad - \bar{\theta}^+\bar{\psi}_+ - i\bar{\theta}^+\theta^-\bar{\theta}^-\partial_-\bar{\psi}_+ - \bar{\theta}^-\bar{\psi}_- - i\bar{\theta}^-\theta^+\bar{\theta}^+\partial_+\bar{\psi}_- + \bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\bar{F}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

wobei wir verwendet haben, dass die komplexe Konjugation des Produktes zweier Graßmann-Zahlen durch $(\psi_1\psi_2)^* = \psi_2^*\psi_1^*$ definiert ist.

Superfelder U , die die Bedingung

$$\bar{D}_+U = D_-U = 0 \quad (2.34)$$

erfüllen, werden getwistet chirale Superfelder genannt. Sie haben analog zu (2.30) die Entwicklung

$$U(x^\pm, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) = u(\tilde{y}^\pm) + \theta^+ \bar{\chi}_+(\tilde{y}^\pm) + \bar{\theta}^- \chi_-(\tilde{y}^\pm) + \theta^+ \bar{\theta}^- E(\tilde{y}^\pm) \quad (2.35)$$

mit $\tilde{y}^\pm = x^\pm \mp i\theta^\pm \bar{\theta}^\pm$. Das komplex konjugierte Superfeld \bar{U} erfüllt dann die Bedingung

$$D_+ \bar{U} = \bar{D}_- \bar{U} = 0 \quad (2.36)$$

und heißt getwistet antichirales Superfeld. Superfelder V , für die die Realitätsbedingung

$$V = V^\dagger \quad (2.37)$$

gilt, heißen Vektorsuperfelder. Sie haben die Entwicklung

$$\begin{aligned} V(x^\pm, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) = & C + \theta^+ \chi_+ + \theta^- \chi_- - \bar{\theta}^+ \bar{\chi}_+ - \bar{\theta}^- \bar{\chi}_- + \theta^+ \theta^- (M + iN) + \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ (M - iN) \\ & - \theta^- \bar{\theta}^- (v_0 - v_1) - \theta^+ \bar{\theta}^+ (v_0 + v_1) - \theta^- \bar{\theta}^+ \sigma - \theta^+ \bar{\theta}^- \bar{\sigma} \\ & + i\theta^- \theta^+ (\bar{\theta}^- \bar{\lambda}_- + \bar{\theta}^+ \bar{\lambda}_+) + i\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\theta^- \lambda_- + \theta^+ \lambda_+) + \theta^- \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- D. \end{aligned} \quad (2.38)$$

C, D, M, N sind reelle Skalarfelder, σ ist ein komplexes Skalarfeld, und λ_\pm, χ_\pm definieren Dirac-Fermionenfelder. Das reelle Vektorfeld v_μ verleiht dem Vektorsuperfeld seinen Namen. Vektorsuperfelder sind relevant für die Konstruktion supersymmetrischer Eichtheorien. Im Abschnitt 2.1.6 wird gezeigt, dass durch eine geeignete Eichtransformation die niedrigeren θ -Komponenten eliminiert werden können, sodass wir V in der Wess-Zumino-Eichung

$$\begin{aligned} V_{\text{WZ}} = & -\theta^- \bar{\theta}^- (v_0 - v_1) - \theta^+ \bar{\theta}^+ (v_0 + v_1) - \theta^- \bar{\theta}^+ \sigma - \theta^+ \bar{\theta}^- \bar{\sigma} \\ & + i\theta^- \theta^+ (\bar{\theta}^- \bar{\lambda}_- + \bar{\theta}^+ \bar{\lambda}_+) + i\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\theta^- \lambda_- + \theta^+ \lambda_+) + \theta^- \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- D \end{aligned} \quad (2.39)$$

erhalten.

2.1.4 Supersymmetrietransformationen und invariante Wirkungen

Supersymmetrietransformationen sind Translationen im Superraum. Aus diesem Grund sind supersymmetrische Feldtheorien elegant mit Hilfe von Superfeldern konstruierbar, ähnlich wie relativistisch invariante Theorien in lorentzkovarianter Schreibweise konstruierbar sind. Wie gewöhnliche Translationen im Minkowski-Raum vom Ableitungsoperator ∂_μ generiert werden, so erzeugen die Supersymmetriegeneratoren Q_\pm und \bar{Q}_\pm die Supersymmetrietransformationen im Superraum. Eine Supersymmetrietransformation wirkt auf ein Superfeld \mathcal{F} durch $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} + \delta\mathcal{F}$ mit⁴

$$\delta := \epsilon_+ Q_- - \epsilon_- Q_+ - \bar{\epsilon}_+ \bar{Q}_- + \bar{\epsilon}_- \bar{Q}_+, \quad (2.40)$$

mit den komplexen Graßmann-Parametern ϵ_\pm . Mit

$$\delta\mathcal{F} = \epsilon_+ \hat{f}_- + \epsilon_- \hat{f}_+ + \bar{\epsilon}_- \hat{f}'_- + \bar{\epsilon}_+ \hat{f}'_+ + \theta^+ (\dots) + \dots \quad (2.41)$$

⁴Dabei ergeben sich die Vorzeichen in der Definition von δ durch die Forderung der Lorentzinvarianz und Realität. Eine sinnvolle Kombination ist deshalb $\delta := \epsilon^\alpha Q_\alpha - \bar{\epsilon}^\alpha \bar{Q}_\alpha$. Schreiben wir dies mit unteren Indizes, so ergibt sich genau unsere Definition (2.40), wenn wir die Spinorindizes mit dem total antisymmetrischen Tensor $(\epsilon^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ziehen, z. B. $\epsilon^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_\beta$.

2 Superraumformalismus in zwei Dimensionen

ist dann z. B. die Variation von δf_0 und δf_+ aus Gleichung (2.18)

$$\delta f_0 = \epsilon_+ \hat{f}_- + \epsilon_- \hat{f}_+ + \bar{\epsilon}_- \hat{f}'_- + \bar{\epsilon}_+ \hat{f}'_+, \quad \delta f_+ = (\dots), \quad \text{etc.} \quad (2.42)$$

Da die Supersymmetriegeneratoren Q_\pm und \bar{Q}_\pm mit \bar{D}_\pm und D_\pm vertauschen, ist die Variation eines chiralen (antichiralen, getwistet (anti-)chiralen) Superfeldes wieder ein chirales (antichirales, getwistet (anti-)chirales) Superfeld. Da $\delta = \delta^\dagger$ gilt, bildet δ Vektorsuperfelder wieder auf Vektorsuperfelder ab. Die Supersymmetrieviation δ ist damit auch für eingeschränkte Superfelder sinnvoll definiert.

Schauen wir uns die Supersymmetrietransformationen eines chiralen Superfeldes Φ mit der Entwicklung (2.31)

$$\begin{aligned} \Phi = & \phi - i\theta^+ \bar{\theta}^+ \partial_+ \phi - i\theta^- \bar{\theta}^- \partial_- \phi - \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ \partial_+ \partial_- \phi \\ & + \theta^+ \psi_+ - i\theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \partial_- \psi_+ + \theta^- \psi_- - i\theta^- \theta^+ \bar{\theta}^+ \partial_+ \psi_- + \theta^+ \theta^- F \end{aligned} \quad (2.43)$$

an. Mit

$$\begin{aligned} Q_\pm \Phi = & \psi_\pm - i\theta^+ \bar{\theta}^+ \partial_+ \psi_\pm - i\theta^- \bar{\theta}^- \partial_- \psi_\pm - \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ \partial_+ \partial_- \psi_\pm \pm \theta^\mp F + i\theta^+ \theta^- \bar{\theta}^\pm \partial_\pm F, \\ \bar{Q}_\pm \Phi = & -2i\theta^\pm \partial_\pm \phi \mp 2\theta^+ \theta^- \bar{\theta}^\mp \partial_+ \partial_- \phi \mp 2i\theta^+ \theta^- \partial_\pm \psi_\mp, \end{aligned} \quad (2.44)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta \phi &= \epsilon_+ \psi_- - \epsilon_- \psi_+, \\ \delta \psi_\pm &= \epsilon_\pm F \pm 2i\bar{\epsilon}_\mp \partial_\pm \phi, \\ \delta F &= -2i\bar{\epsilon}_- \partial_+ \psi_- - 2i\bar{\epsilon}_+ \partial_- \psi_+. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Auf die gleiche Weise ergeben sich die Supersymmetrietransformationen der Komponenten eines Vektorsuperfeldes V mit der Entwicklung (2.38),

$$\begin{aligned} V(x^\pm, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) = & C + \theta^+ \chi_+ + \theta^- \chi_- - \bar{\theta}^+ \bar{\chi}_+ - \bar{\theta}^- \bar{\chi}_- + \theta^+ \theta^- (M + iN) + \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ (M - iN) \\ & - \theta^- \bar{\theta}^- (v_0 - v_1) - \theta^+ \bar{\theta}^+ (v_0 + v_1) - \theta^- \bar{\theta}^+ \sigma - \theta^+ \bar{\theta}^- \bar{\sigma} \\ & + i\theta^- \theta^+ (\bar{\theta}^- \bar{\lambda}_- + \bar{\theta}^+ \bar{\lambda}_+) + i\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\theta^- \lambda_- + \theta^+ \lambda_+) + \theta^- \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- D. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Durch Koeffizientenvergleich von V mit δV ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta C &= \epsilon_+ \chi_- - \epsilon_- \chi_+ + \bar{\epsilon}_- \bar{\chi}_+ - \bar{\epsilon}_+ \bar{\chi}_-, \\ \delta \chi_+ &= \epsilon_+ (M + iN) + i\bar{\epsilon}_- \partial_+ C - \bar{\epsilon}_+ \bar{\sigma} + \bar{\epsilon}_- (v_0 + v_1), \\ \delta \chi_- &= \epsilon_- (M + iN) - i\bar{\epsilon}_+ \partial_- C + \bar{\epsilon}_- \sigma - \bar{\epsilon}_+ (v_0 - v_1), \\ \delta (M + iN) &= i\bar{\epsilon}_- \bar{\lambda}_+ - i\bar{\epsilon}_- \partial_+ \chi_- - i\bar{\epsilon}_+ \bar{\lambda}_- - i\bar{\epsilon}_+ \partial_- \chi_+, \\ \delta (v_0 + v_1) &= -i\epsilon_- \partial_+ \chi_+ - i\epsilon_+ \bar{\lambda}_+ - i\bar{\epsilon}_- \partial_+ \bar{\chi}_+ - i\bar{\epsilon}_+ \lambda_+, \\ \delta (v_0 - v_1) &= i\epsilon_+ \partial_- \chi_- - i\epsilon_- \bar{\lambda}_- + i\bar{\epsilon}_+ \partial_- \bar{\chi}_- - i\bar{\epsilon}_- \lambda_-, \\ \delta \sigma &= -i\epsilon_- \bar{\lambda}_+ - i\epsilon_- \partial_+ \chi_- - i\bar{\epsilon}_+ \lambda_- + i\bar{\epsilon}_+ \partial_- \bar{\chi}_+, \\ \delta \lambda_+ &= \epsilon_- \partial_+ \bar{\sigma} + \epsilon_+ \partial_- (v_0 + v_1) - \bar{\epsilon}_- \partial_+ (M - iN) + i\epsilon_+ D, \\ \delta \lambda_- &= \epsilon_+ \partial_- \sigma + \epsilon_- \partial_+ (v_0 - v_1) + \bar{\epsilon}_+ \partial_- (M + iN) + i\epsilon_- D, \\ \delta D &= \epsilon_- \partial_+ \bar{\lambda}_- + \epsilon_+ \partial_- \bar{\lambda}_+ - \bar{\epsilon}_- \partial_+ \lambda_- - \bar{\epsilon}_+ \partial_- \lambda_+. \end{aligned} \quad (2.47)$$

In Wess-Zumino-Eichung müssen diese Transformationen abgeändert werden, siehe dazu Abschnitt 2.1.6.

Wir wollen Wirkungen konstruieren, die invariant unter den Supersymmetrietransformationen sind. Diese können als Superraum-Integrale über Superfelder geschrieben werden. Betrachten wir dazu als erstes ein Integral der Form⁵

$$\int d^2x d^4\theta K(\mathcal{F}_i) := \int d^2x d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^- d\bar{\theta}^+ K(\mathcal{F}_i), \quad (2.48)$$

wobei K eine beliebige differenzierbare Funktion der Superfelder \mathcal{F}_i ist. Dieses ist invariant unter der Supersymmetrievaryation δ , siehe z. B. den Term proportional zu ϵ_+

$$\begin{aligned} \int d^2x d^4\theta \epsilon_+ Q_- K &= \int d^2x d^4\theta \epsilon_+ (Q_- \mathcal{F}_i) \frac{\partial K}{\partial \mathcal{F}_i} \\ &= \int d^2x d^4\theta \epsilon_+ \left(\frac{\partial}{\partial \theta^-} + i\bar{\theta}^- \partial_- \right) K(\mathcal{F}_i). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Der erste Term ist null, da im Integranden wegen der Ableitung $\partial/\partial\theta^-$ kein θ^- mehr steht und die Integration über $d^4\theta$ nur dann von null verschieden ist, wenn alle fermionischen Koordinaten $\theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^-$ im Integranden genau einmal vorkommen. Der zweite Term ist eine totale Ableitung und verschwindet deshalb nach der Integration über d^2x . Auf die gleiche Weise verschwinden auch die Koeffizienten von ϵ_- und $\bar{\epsilon}_\pm$. Terme dieser Form können also zur Konstruktion supersymmetrischer Wirkungen benutzt werden. Sie heißen D-Terme in Anlehnung an die oft D genannte θ^4 -Komponente in der Entwicklung eines Superfeldes, wie z. B. in (2.39).

Betrachten wir als Nächstes das Integral über die chiralen Superfelder Φ_i

$$\int d^2x d^2\theta W(\Phi_i) := \int d^2x d\theta^- d\theta^+ W(\Phi_i), \quad (2.50)$$

wobei $W(\Phi_i)$ eine holomorphe Funktion der Φ_i 's ist. W heißt Superpotential. Auch dieses Funktional ist invariant unter der Variation δ . Schauen wir uns zuerst den Term proportional zu ϵ_\pm an,

$$\pm \int d^2x d^2\theta \epsilon_\pm \left(\frac{\partial}{\partial \theta^\mp} + i\bar{\theta}^\mp \partial_\mp \right) W(\Phi_i). \quad (2.51)$$

Der erste Term verschwindet bei Integration über $d^2\theta$. Der zweite Term ist eine totale Ableitung. Betrachten wir den Term proportional zu $\bar{\epsilon}_\pm$. Wegen $\bar{Q}_\pm = \bar{D}_\pm - 2i\theta^\pm \partial_\pm$ ist die Variation

$$\mp \int d^2x d^2\theta \bar{\epsilon}_\pm (\bar{D}_\mp - 2i\theta^\mp \partial_\mp) W(\Phi_i). \quad (2.52)$$

Der erste Term im Integranden $\bar{D}_\mp W(\Phi_i)$ ist null, da Φ_i chirale Superfelder sind und W holomorph ist. Der zweite Term verschwindet wieder nach der Integration über x . Damit kann auch dieses Funktional zur Konstruktion supersymmetrischer Wirkungen benutzt werden. Terme dieser Art heißen F-Terme, da die höchste Komponente eines chiralen Superfeldes oft mit F bezeichnet wird, so z. B. in (2.31).

⁵Dabei wird die Integration über die Graßmannvariablen, wie sie erstmals von Berezin [Ber66] eingeführt wurde, durch $\int d\theta = 0$ und $\int d\theta\theta = 1$ definiert. Für Integrale über mehrere Graßmannvariablen gilt $\int d\theta_n \dots d\theta_1 \theta_1 \dots \theta_n = 1$ und $\{d\theta_i, d\theta_j\} = \{\theta_i, d\theta_j\} = 0$.

Betrachten wir schließlich noch das Integral der Form

$$\int d^2x d^2\tilde{\theta} \widetilde{W}(U_i) := \int d^2x d\bar{\theta}^- d\theta^+ \widetilde{W}(U_i), \quad (2.53)$$

wobei $\widetilde{W}(U_i)$ eine holomorphe Funktion der getwistet chiralen Superfelder U_i ist. Mithilfe eines analogen Arguments wie im Falle des F -Terms kann man sehen, dass auch dieses Integral invariant unter δ ist. Solche Terme heißen dann getwistete F -Terme.

Damit haben wir verschiedene Bausteine an der Hand, mit denen wir auf einfache Weise unter Supersymmetrietransformationen invariante Wirkungen konstruieren können. Um reelle Wirkungen zu erhalten, addieren wir gegebenenfalls die komplex konjugierten Terme hinzu.

2.1.5 Das Wess-Zumino-Modell

Das Wess-Zumino-Modell wurde 1974 von J. Wess und B. Zumino [WZ74] eingeführt und war eines der ersten Beispiele für eine wechselwirkende supersymmetrische Quantenfeldtheorie. Die zweidimensionale Version des Modells kann auf direktem Wege mit Hilfe unseres $\mathcal{N} = (2, 2)$ -Superraumformalismus konstruiert werden. Wir betrachten dazu als erstes den D-Term

$$S_{\text{kin}} = \int d^2x d^4\theta \bar{\Phi}\Phi, \quad (2.54)$$

wobei Φ ein chirales Superfeld mit der Entwicklung (2.31) ist. Die Integration $\int d^4\theta \bar{\Phi}\Phi$ liefert den θ^4 -Koeffizienten von $\bar{\Phi}\Phi$,

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}\Phi \Big|_{\theta^4} &= -\bar{\phi}\partial_+\partial_-\phi + \partial_+\bar{\phi}\partial_-\phi + \partial_-\bar{\phi}\partial_+\phi - \partial_+\partial_-\bar{\phi}\phi \\ &\quad + i\bar{\psi}_+\partial_-\psi_+ - i\partial_-\bar{\psi}_+\psi_+ + i\bar{\psi}_-\partial_+\psi_- - i\partial_+\bar{\psi}_-\psi_- + |F|^2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Mithilfe partieller Integration erhalten wir damit den kinetischen Teil der Wess-Zumino-Wirkung in der Form

$$\begin{aligned} S_{\text{kin}} &= \int d^2x (4\partial_+\bar{\phi}\partial_-\phi + 2i\bar{\psi}_-\partial_+\psi_- + 2i\bar{\psi}_+\partial_-\psi_+ + |F|^2) \\ &= \int d^2x (\partial^\mu\bar{\phi}\partial_\mu\phi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + |F|^2). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Er besteht aus den üblichen kinetischen Termen für das komplexe Skalarfeld ϕ und für das Dirac-Fermionenfeld ψ sowie aus einem quadratischen Term im äußeren Feld F . Als Nächstes berechnen wir den F -Term

$$S_{\text{I}} = \int d^2x d^2\theta W(\Phi) \Big|_{\bar{\theta}^\pm=0} + \text{c. c.}, \quad (2.57)$$

wobei das Superpotential $W(\Phi)$ eine holomorphe Funktion von Φ ist. Durch die Integration über $d^2\theta$ erhalten wir den Koeffizienten von $\theta^2 = \theta^+\theta^-$ in der θ -Entwicklung von $W(\Phi) \Big|_{\bar{\theta}^\pm=0}$,

$$W(\Phi) \Big|_{\bar{\theta}^\pm=0} = W(\phi) + \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} W(\Phi) \Big|_{\theta=0} + \theta^+ \frac{\partial}{\partial\theta^+} \theta^- \frac{\partial}{\partial\theta^-} W(\Phi) \Big|_{\theta=0}, \quad (2.58)$$

und somit

$$\begin{aligned} W(\Phi) \Big|_{\bar{\theta}^\pm=0, \theta^2} &= -\frac{\partial}{\partial\theta^+} \frac{\partial}{\partial\theta^-} W(\phi + \theta^+ \psi_+ + \theta^- \psi_- + \theta^+ \theta^- F) \Big|_{\theta=0} \\ &= W'(\phi)F - W''(\phi)\psi_+\psi_-. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Die Wechselwirkungen zwischen den Feldern werden damit durch

$$S_I = \int d^2x (W'(\phi)F - W''(\phi)\psi_+\psi_- + \bar{W}'(\bar{\phi})\bar{F} - \bar{W}''(\bar{\phi})\bar{\psi}_-\bar{\psi}_+) \quad (2.60)$$

beschrieben. S_{kin} und S_I zusammen ergeben die off-shell-Formulierung der Wess-Zumino-Wirkung

$$\begin{aligned} S_{\text{WZ}} &= S_{\text{kin}} + S_I \\ &= \int d^2x \{ 4\partial_+\bar{\phi}\partial_-\phi + 2i\bar{\psi}_-\partial_+\psi_- + 2i\bar{\psi}_+\partial_-\psi_+ - W''(\phi)\psi_+\psi_- - \bar{W}''(\bar{\phi})\bar{\psi}_-\bar{\psi}_+ \\ &\quad - |W'(\phi)|^2 + |F + \bar{W}'(\bar{\phi})|^2 \}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Der letzte Term $|F + \bar{W}'(\bar{\phi})|^2$ kann durch Lösen der Bewegungsgleichung für F eliminiert werden,

$$F = -\bar{W}'(\bar{\phi}). \quad (2.62)$$

Wir gelangen damit zur on-shell-Formulierung der Wess-Zumino-Wirkung,

$$\begin{aligned} S_{\text{WZ}} &= \int d^2x \{ 4\partial_+\bar{\phi}\partial_-\phi + 2i\bar{\psi}_-\partial_+\psi_- + 2i\bar{\psi}_+\partial_-\psi_+ - W''(\phi)\psi_+\psi_- - \bar{W}''(\bar{\phi})\bar{\psi}_-\bar{\psi}_+ \\ &\quad - |W'(\phi)|^2 \}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Das Wess-Zumino-Modell besteht also aus einem komplexen Skalarfeld ϕ mit dem Potential $|W'(\phi)|^2$ und einem Dirac-Fermionfeld ψ , welches per Yukawa-Wechselwirkung $W''(\phi)\psi_+\psi_-$ an das Skalarfeld koppelt.

2.1.6 Supersymmetrische Eichtheorien

Um supersymmetrische Theorien zu konstruieren, die invariant unter $U(1)$ -Eichtransformationen sind, geht man analog zum nichtsupersymmetrischen Fall vor. Lokale $U(1)$ -Eichtransformationen wirken z. B. auf ein komplexes Skalarfeld ϕ in der Form

$$\phi(x) \mapsto e^{i\alpha(x)}\phi(x), \quad (2.64)$$

mit der reellen Funktion $\alpha(x)$. Eichinvariante Wirkungen werden dadurch konstruiert, dass man anstatt der gewöhnlichen Ableitung ∂_μ die kovariante Ableitung

$$D_\mu^v := \partial_\mu - iv_\mu \quad (2.65)$$

verwendet. Dabei ist v_μ ein reelles Vektorfeld, welches unter der Eichtransformation nach

$$v_\mu \mapsto v_\mu + \partial_\mu\alpha \quad (2.66)$$

transformiert. Somit sind z. B. kinetische Terme der Form $|D_\mu\phi|^2$ eichinvariant.

2 Superraumformalismus in zwei Dimensionen

Wir erweitern nun unsere $U(1)$ -Eichtransformationen, indem wir das Skalarfeld ϕ durch ein chirales Superfeld Φ und α durch ein chirales Superfeld A ersetzen,

$$\Phi \mapsto e^{iA}\Phi. \quad (2.67)$$

Eine solche supersymmetrische $U(1)$ -Eichtransformation bildet chirale Superfelder wieder auf chirale Superfelder ab und ist deshalb sinnvoll definiert. Die einzelnen Komponenten von Φ in der θ -Entwicklung (2.31),

$$\begin{aligned} \Phi = & \phi - i\theta^+\bar{\theta}^+\partial_+\phi - i\theta^-\bar{\theta}^-\partial_-\phi - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\partial_+\partial_-\phi \\ & + \theta^+\psi_+ - i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\partial_-\psi_+ + \theta^-\psi_- - i\theta^-\theta^+\bar{\theta}^+\partial_+\psi_- + \theta^+\theta^-F, \end{aligned} \quad (2.68)$$

transformieren dann unter infinitesimalen Eichtransformationen $\delta_A\Phi = i\epsilon A\Phi$ nach

$$\begin{aligned} \delta_A\phi &= i\epsilon a\phi, \\ \delta_A\psi_\pm &= i\epsilon a\psi_\pm + i\epsilon\psi_\pm^A\phi, \\ \delta_AF &= i\epsilon aF - i\epsilon\psi_+^A\psi_- + i\epsilon\psi_-^A\psi_+ + i\epsilon F^A\phi, \end{aligned} \quad (2.69)$$

wobei wir die Komponenten des chiralen Superfeldes A zur Unterscheidung von den Komponenten von Φ mit a , ψ_\pm^A und F^A bezeichnet haben. Ein Vektorsuperfeld V transformiert unter supersymmetrischen Eichtransformationen nach

$$V \mapsto V + i(\bar{A} - A). \quad (2.70)$$

V hat die θ -Entwicklung (2.38),

$$\begin{aligned} V = & C + \theta^+\chi_+ + \theta^-\chi_- - \bar{\theta}^+\bar{\chi}_+ - \bar{\theta}^-\bar{\chi}_- + \theta^+\theta^-(M + iN) + \bar{\theta}^-\bar{\theta}^+(M - iN) \\ & - \theta^-\bar{\theta}^-(v_0 - v_1) - \theta^+\bar{\theta}^+(v_0 + v_1) - \theta^-\bar{\theta}^+\sigma - \theta^+\bar{\theta}^-\bar{\sigma} \\ & + i\theta^-\theta^+(\bar{\theta}^-\bar{\lambda}_- + \bar{\theta}^+\bar{\lambda}_+) + i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\theta^-\lambda_- + \theta^+\lambda_+) + \theta^-\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-D, \end{aligned} \quad (2.71)$$

mit den reellen Skalarfeldern C , D , M und N , dem komplexen Skalarfeld σ , dem reellen Vektorfeld v_μ und den Dirac-Fermionen λ_\pm , χ_\pm . Die Entwicklung von $i(\bar{A} - A)$ ist

$$\begin{aligned} i(\bar{A} - A) = & i(\bar{a} - a) - i(\theta^-\psi_- + \theta^+\psi_+ + \bar{\theta}^-\bar{\psi}_- + \bar{\theta}^+\bar{\psi}_+) \\ & - \theta^+\bar{\theta}^+\partial_+(\bar{a} + a) - \theta^-\bar{\theta}^-\partial_-(\bar{a} + a) + i(\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\bar{F} - \theta^+\theta^-F) \\ & + \theta^-\bar{\theta}^-(\bar{\theta}^+\partial_-\bar{\psi}_+ - \theta^+\partial_-\psi_+) + \theta^+\bar{\theta}^+(\bar{\theta}^-\partial_+\bar{\psi}_- - \theta^-\partial_+\psi_-) \\ & - i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\partial_+\partial_-(\bar{a} - a). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Damit transformieren die Komponenten von V unter der Eichtransformation (2.70) nach

$$\begin{aligned} C &\mapsto C + i(\bar{a} - a), \\ \chi_\pm &\mapsto \chi_\pm - i\psi_\pm, \\ M + iN &\mapsto M + iN - iF, \\ v_\mu &\mapsto v_\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu(\bar{a} + a), \\ \sigma &\mapsto \sigma, \\ \lambda_\pm &\mapsto \lambda_\pm \mp i\partial_\pm\bar{\psi}_\mp, \\ D &\mapsto D - i\partial_+\partial_-(\bar{a} - a). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Die Transformationen nehmen eine einfachere Form an, wenn wir die Umbenennungen $D \rightsquigarrow D - \partial_+ \partial_- C$ und $\lambda_\pm \rightsquigarrow \lambda_\pm \pm \partial_\pm \bar{\chi}_\mp$ in (2.71) durchführen, weil dann neben σ auch λ_\pm und D eichinvariant sind [WB92],

$$\begin{aligned}
 C &\mapsto C + i(\bar{a} - a), \\
 \chi_\pm &\mapsto \chi_\pm - i\psi_\pm, \\
 M + iN &\mapsto M + iN - iF, \\
 v_\mu &\mapsto v_\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu(\bar{a} + a), \\
 \sigma &\mapsto \sigma, \\
 \lambda_\pm &\mapsto \lambda_\pm, \\
 D &\mapsto D.
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Wir sehen, dass eine spezielle Eichung existiert, in der a , ψ und F derart gewählt sind, dass C , χ_\pm und $M + iN$ alle null sind. Diese Eichung heißt Wess-Zumino-Eichung (WZ-Eichung). In der Wess-Zumino-Eichung hat V die bereits in Abschnitt 2.1.3 angekündigte Form (2.39),

$$\begin{aligned}
 V_{\text{WZ}} &= -\theta^-\bar{\theta}^-(v_0 - v_1) - \theta^+\bar{\theta}^+(v_0 + v_1) - \theta^-\bar{\theta}^+\sigma - \theta^+\bar{\theta}^-\bar{\sigma} \\
 &\quad + i\theta^-\theta^+(\bar{\theta}^-\bar{\lambda}_- + \bar{\theta}^+\bar{\lambda}_+) + i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\theta^-\lambda_- + \theta^+\lambda_+) + \theta^-\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-D.
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Dadurch ist die Eichung allerdings nicht vollständig fixiert, denn es sind weiterhin gewöhnliche lokale $U(1)$ -Eichtransformationen mit reellem $\alpha(x)$ erlaubt, unter denen v_μ transformiert wird nach

$$v_\mu(x) \mapsto v_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x), \tag{2.76}$$

und alle anderen Komponenten unverändert bleiben. In der Wess-Zumino-Eichung ist es sehr einfach, Potenzen von V zu berechnen,

$$\begin{aligned}
 V_{\text{WZ}}^2 &= 2\theta^+\bar{\theta}^+\theta^-\bar{\theta}^-(v_0^2 - v_1^2 - \bar{\sigma}\sigma) = 2\theta^+\bar{\theta}^+\theta^-\bar{\theta}^-(v^\mu v_\mu - \bar{\sigma}\sigma), \\
 V_{\text{WZ}}^3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Allerdings wird die Wess-Zumino-Eichung i. Allg. durch die Supersymmetrietransformationen verlassen, d. h. $V + \delta V$ ist nicht mehr notwendigerweise in Wess-Zumino-Eichung. Wir müssen deshalb die Supersymmetrietransformationen um eine Eichtransformation ergänzen, welche $V + \delta V$ jeweils wieder zurück in WZ-Eichung bringt. Dies leistet die Eichtransformation, die von dem chiralen Superfeld A mit den Komponenten

$$\begin{aligned}
 a &= 0, \\
 \psi_+ &= i\bar{\epsilon}_+\bar{\sigma} - i\bar{\epsilon}_-(v_0 + v_1), \\
 \psi_- &= -i\bar{\epsilon}_-\sigma + i\bar{\epsilon}_+(v_0 - v_1), \\
 F &= \bar{\epsilon}_-\bar{\lambda}_+ - \bar{\epsilon}_+\bar{\lambda}_-,
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

erzeugt wird, wie man durch Vergleich der allgemeinen Eichtransformation (2.73) mit den Supersymmetrietransformationen des Vektorsuperfeldes (2.47) einsieht. Die Supersymme-

2 Superraumformalismus in zwei Dimensionen

trietransformationen für ein Vektorsuperfeld in Wess-Zumino-Eichung sind damit

$$\begin{aligned}
\delta v_{\pm} &= -i\bar{\epsilon}_{\pm}\lambda_{\pm} - i\epsilon_{\pm}\bar{\lambda}_{\pm}, \\
\delta\sigma &= -i\bar{\epsilon}_{+}\lambda_{-} - i\epsilon_{-}\bar{\lambda}_{+}, \\
\delta D &= -\bar{\epsilon}_{+}\partial_{-}\lambda_{+} - \bar{\epsilon}_{-}\partial_{+}\lambda_{-} + \epsilon_{+}\partial_{-}\bar{\lambda}_{+} + \epsilon_{-}\partial_{+}\bar{\lambda}_{-}, \\
\delta\lambda_{+} &= i\epsilon_{+}(D - iv_{01}) + 2\epsilon_{-}\partial_{+}\bar{\sigma}, \\
\delta\lambda_{-} &= i\epsilon_{-}(D + iv_{01}) + 2\epsilon_{+}\partial_{-}\sigma,
\end{aligned} \tag{2.79}$$

wobei wir $v_{\pm} := v_0 \pm v_1$ abgekürzt haben und mit v_{01} die Feldstärke von v_{μ} ,

$$v_{01} := \partial_0 v_1 - \partial_1 v_0, \tag{2.80}$$

bezeichnen. Auch die Supersymmetrietransformationen des chiralen Superfeldes (2.45) ändern sich dadurch. Mit der Eichtransformation (2.69) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \epsilon_{+}\psi_{-} - \epsilon_{-}\psi_{+}, \\
\delta\psi_{+} &= 2i\bar{\epsilon}_{-}D_{+}^v\phi + \epsilon_{+}F - \bar{\epsilon}_{+}\bar{\sigma}\phi, \\
\delta\psi_{-} &= -2i\bar{\epsilon}_{+}D_{-}^v\phi + \epsilon_{-}F + \bar{\epsilon}_{-}\sigma\phi, \\
\delta F &= -2i\bar{\epsilon}_{+}D_{-}^v\psi_{+} - 2i\bar{\epsilon}_{-}D_{+}^v\psi_{-} + \bar{\epsilon}_{+}\bar{\sigma}\psi_{-} + \bar{\epsilon}_{-}\sigma\psi_{+} + i(\bar{\epsilon}_{-}\bar{\lambda}_{+} - \bar{\epsilon}_{+}\bar{\lambda}_{-})\phi,
\end{aligned} \tag{2.81}$$

mit der kovarianten Ableitung bezüglich v_{μ} ,

$$D_{\pm}^v := \frac{1}{2}(D_0^v \pm D_1^v), \quad D_{\mu}^v := \partial_{\mu} - iv_{\mu}. \tag{2.82}$$

Wir wollen mögliche supersymmetrische und eichinvariante Lagrangedichten diskutieren. Die entsprechende Verallgemeinerung des kinetischen Terms in der Wess-Zumino-Wirkung ist

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \int d^4\theta \bar{\Phi} e^V \Phi, \tag{2.83}$$

welche nach Konstruktion supersymmetrisch (D-Term) und offensichtlich auch eichinvariant (vgl. (2.67) und (2.70)) ist. Er enthält die kinetischen Terme für die Komponenten von Φ . Die kinetischen Terme für die Komponenten des Vektorsuperfeldes V können mithilfe der Superfeldstärke Σ konstruiert werden,

$$\Sigma := \bar{D}_{+}D_{-}V. \tag{2.84}$$

Diese ist invariant unter der Eichtransformation $V \mapsto V + i(\bar{A} - A)$, da A und \bar{A} chirale bzw. antichirale Superfelder sind. Σ selber ist ein getwistet chirales Superfeld,

$$\bar{D}_{+}\Sigma = D_{-}\Sigma = 0. \tag{2.85}$$

Mit V in WZ-Eichung erhalten wir die Entwicklung

$$\begin{aligned}
D_{-}V &= -\bar{\theta}^{-}(v_0 - v_1) - \bar{\theta}^{+}\sigma + i\theta^{+}(\bar{\theta}^{-}\bar{\lambda}_{-} + \bar{\theta}^{+}\bar{\lambda}_{+}) + i\bar{\theta}^{+}\bar{\theta}^{-}\lambda_{-} + \theta^{+}\bar{\theta}^{+}\bar{\theta}^{-}D \\
&\quad + i\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\bar{\theta}^{+}(\partial_{-}v_0 + \partial_{-}v_1) + i\bar{\theta}^{-}\theta^{-}\bar{\theta}^{+}\partial_{-}\sigma + \bar{\theta}^{-}\theta^{-}\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\partial_{-}\bar{\lambda}_{+}, \\
\bar{D}_{+}D_{-}V &= \sigma + i\theta^{+}\bar{\lambda}_{+} - i\bar{\theta}^{-}\lambda_{-} + \theta^{+}\bar{\theta}^{-}D - i\bar{\theta}^{-}\theta^{+}(\partial_{-}v_0 + \partial_{+}v_1) - i\bar{\theta}^{-}\theta^{-}\partial_{-}\sigma \\
&\quad + \bar{\theta}^{-}\theta^{-}\theta^{+}\partial_{-}\bar{\lambda}_{+} - \theta^{+}\bar{\theta}^{+}\bar{\theta}^{-}\partial_{+}\lambda_{-} - i\theta^{+}\bar{\theta}^{-}(\partial_{+}v_0 - \partial_{+}v_1) - i\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\partial_{+}\sigma \\
&\quad - \theta^{+}\bar{\theta}^{-}\theta^{-}\bar{\theta}^{+}\partial_{+}\partial_{-}\sigma \\
&= \sigma + i\theta^{-}\bar{\theta}^{-}\partial_{-}\sigma - i\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\partial_{+}\sigma + \theta^{+}\bar{\theta}^{+}\theta^{-}\bar{\theta}^{-}\partial_{+}\partial_{-}\sigma + i\theta^{+}(\bar{\lambda}_{+} + i\theta^{-}\bar{\theta}^{-}\partial_{-}\bar{\lambda}_{+}) \\
&\quad - i\bar{\theta}^{-}(\lambda_{-} - i\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\partial_{+}\lambda_{-}) + i\theta^{+}\bar{\theta}^{-}(\partial_0 v_1 - \partial_1 v_0) + \theta^{+}\bar{\theta}^{-}D,
\end{aligned} \tag{2.86}$$

wobei die Komponentenfelder σ , λ_{\pm} , $\bar{\lambda}_{\pm}$, v_{μ} und D bei x^{\pm} auszuwerten sind. Wie jedes getwistet chirale Superfeld kann Σ in Abhängigkeit der Koordinate $\tilde{y}^{\pm} = x^{\pm} \mp i\theta^{\pm}\bar{\theta}^{\pm}$ geschrieben werden. In dieser Form ist

$$\Sigma = \sigma(\tilde{y}) + i\theta^+ \bar{\lambda}_+(\tilde{y}) - i\bar{\theta}^- \lambda_-(\tilde{y}) + \theta^+ \bar{\theta}^- (D(\tilde{y}) + i v_{01}(\tilde{y})), \quad (2.87)$$

welches man rückwärts durch Taylor-Entwicklung und Vergleich mit (2.86) einsieht. Die Wirkung

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2e^2} \int d^4\theta \bar{\Sigma} \Sigma \quad (2.88)$$

ist eichinvariant (da Σ eichinvariant) und supersymmetrisch (D-Term). Die Eichkopplungskonstante e hat dabei die Dimension einer Masse. Wir können auch getwistete F-Terme für getwistete Superpotentiale $\widetilde{W}(\Sigma)$ angeben, z. B. das lineare getwistete Superpotential

$$\widetilde{W}_{\text{FI},\theta} = -\frac{t\Sigma}{2}, \quad (2.89)$$

wobei der dimensionslose komplexe Parameter t aus dem sog. Fayet-Iliopoulos-Parameter r und dem Theta-Winkel θ zusammengesetzt ist,

$$t = r + i\theta. \quad (2.90)$$

Der dazugehörige getwistete F-Term ist der Fayet-Iliopoulos-Term,

$$\mathcal{L}_{\text{FI},\theta} = -\frac{t}{2} \int d^2\bar{\theta} \tilde{\Sigma} + \text{c. c.} = -rD + \theta v_{01}, \quad (2.91)$$

wobei D die höchste Komponente in der θ -Entwicklung von V ist.

2.1.7 $\mathcal{N} = (1, 1)$ -Supersymmetrie

Der $\mathcal{N} = (2, 2)$ -Superraum kann auf einen Unterraum eingeschränkt werden, um Supersymmetrien mit weniger Superladungen zu erhalten. Wir diskutieren dies für die Einschränkung auf den $\mathcal{N} = (1, 1)$ -Unterraum. Dort haben wir zwei reelle Superladungen, eine mit positiver Chiralität und die andere mit negativer Chiralität. Dieser Unterraum kann dadurch definiert werden, dass die Koordinaten θ^+ und θ^- reell bis auf feste Phasen sind,

$$\begin{aligned} \theta^+ &= i e^{i\nu_+} \theta_1^+, \\ \theta^- &= i e^{i\nu_-} \theta_1^-, \end{aligned} \quad (2.92)$$

mit $(\theta_1^{\pm})^* = \theta_1^{\pm}$. Statt θ^{\pm} können wir in diesem Unterraum auch die reellen θ_1^{\pm} als Koordinaten ansehen. Wir kombinieren die $(2, 2)$ -Supersymmetriegeneratoren Q_{\pm} und \bar{Q}_{\pm} zu $(1, 1)$ -Supersymmetriegeneratoren Q_{\pm}^1 , welche Translationen im $(1, 1)$ -Unterraum erzeugen,

$$Q_{\pm}^1 := e^{i\nu_{\pm}} Q_{\pm} + e^{-i\nu_{\pm}} \bar{Q}_{\pm} = -i \frac{\partial}{\partial \theta_1^{\pm}} + 2\theta_1^{\pm} \partial_{\pm}. \quad (2.93)$$

Auf die selbe Weise können wir auch $(1, 1)$ -superkovariante Ableitungen D_{\pm}^1 definieren,

$$D_{\pm}^1 := e^{i\nu_{\pm}} D_{\pm} + e^{-i\nu_{\pm}} \bar{D}_{\pm} = -i \frac{\partial}{\partial \theta_1^{\pm}} - 2\theta_1^{\pm} \partial_{\pm}. \quad (2.94)$$

2 Superraumformalismus in zwei Dimensionen

Sie erfüllen die Antikommutationsrelationen

$$\{Q_{\pm}^1, Q_{\pm}^1\} = -4i\partial_{\pm}, \quad \{D_{\pm}^1, D_{\pm}^1\} = 4i\partial_{\pm}, \quad (2.95)$$

alle anderen Antikommutatoren verschwinden. Die θ -Entwicklung eines $(1, 1)$ -Superfeldes Φ hat die Form

$$\Phi(x^{\pm}, \theta_{\pm}^{\pm}) = \phi(x^{\pm}) + i\theta_{\pm}^+ \psi_{\pm}(x^{\pm}) + i\theta_{\pm}^- \psi_{\mp}(x^{\pm}) + i\theta_{\pm}^+ \theta_{\pm}^- f(x^{\pm}). \quad (2.96)$$

Die $(1, 1)$ -Supersymmetrietransformationen lauten

$$\delta^1 := i\epsilon_{-}^1 Q_{+}^1 - i\epsilon_{+}^1 Q_{-}^1, \quad (2.97)$$

mit den reellen Graßmann-Parametern ϵ_{\pm}^1 . Die Komponenten von Φ transformieren dann wegen

$$Q_{\pm}^1 \Phi = \psi_{\pm} \pm \theta_{\pm}^{\mp} f + 2\theta_{\pm}^{\pm} \partial_{\pm} \phi \pm 2i\theta^+ \theta^- \partial_{\pm} \psi_{\mp} \quad (2.98)$$

nach

$$\begin{aligned} \delta^1 \phi &= i\epsilon_{-}^1 \psi_{+} - i\epsilon_{+}^1 \psi_{-}, \\ \delta^1 \psi_{\pm} &= -\epsilon_{\pm}^1 f \mp 2\epsilon_{\mp}^1 \partial_{\pm} \phi, \\ \delta^1 f &= 2i\epsilon_{-}^1 \partial_{+} \psi_{-} + 2i\epsilon_{+}^1 \partial_{-} \psi_{+}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Invariante Wirkungen können in der Form

$$\int d^2x d^2\theta_1 F(\Phi_i, D_{\pm}^1 \Phi_i, \dots) := \int d^2x d\theta_1^+ d\theta_1^- F(\Phi_i, D_{\pm}^1 \Phi_i, \dots), \quad (2.100)$$

mit einer beliebigen Funktion $F = F(\Phi_i, D_{\pm}^1 \Phi_i, \dots)$ konstruiert werden. Zum Beispiel ist durch

$$S_{\text{WZ}} = \int d^2x d^2\theta_1 \left(\frac{1}{2} D_{-}^1 \Phi D_{+}^1 \Phi + i h(\Phi) \right) \quad (2.101)$$

die Wirkung des $\mathcal{N} = (1, 1)$ -Wess-Zumino-Modells gegeben. Derart kann jede $(2, 2)$ -supersymmetrische Theorie als eine $(1, 1)$ -supersymmetrische Theorie angesehen werden und insbesondere kann eine Wirkung auf dem $(2, 2)$ -Superraum als ein Ausdruck auf dem $(1, 1)$ -Unterraum geschrieben werden.

2.2 $\mathcal{N} = (2, 2)$ -Superraumformalismus in euklidischer Raumzeit

Im vorigen Abschnitt haben wir den an die Minkowskische Signatur angepassten Superraum eingeführt. Wir wollen unsere Diskussion nun für die euklidische Raumzeit verallgemeinern.

2.2.1 Dirac-Matrizen und Spinoren

Die Dirac-Matrizen,

$$\gamma^1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = -\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^* = -i\gamma^1\gamma^2 = -\sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.102)$$

bilden eine Darstellung der Clifford-Algebra,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}, \quad (2.103)$$

mit der euklidischen Metrik

$$(\delta^{\mu\nu}) = (\delta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.104)$$

Die zwei Komponenten eines Spinors ψ bezeichnen wir wieder mit

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}, \quad (2.105)$$

und die Komponenten des adjungierten Spinors $\bar{\psi}$ mit

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger = ((\psi_-)^* \quad (\psi_+)^*) = (\bar{\psi}_+ \quad \bar{\psi}_-). \quad (2.106)$$

Im Gegensatz zum Minkowski-Fall gilt nun $\bar{\psi}_\pm = (\psi_\mp)^*$. Mithilfe der links- und rechtshändigen Projektoren

$$P_L := \frac{1}{2}(1 - \gamma_*) , \quad P_R := \frac{1}{2}(1 + \gamma_*), \quad (2.107)$$

kann ψ in die links- und rechtshändigen Komponenten ψ_L und ψ_R zerlegt werden,

$$\psi_L := P_L \psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R := P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_+ \end{pmatrix}. \quad (2.108)$$

Wir verwenden die komplexen Koordinaten x_\pm mit

$$x^\pm := x^1 \pm ix^2, \quad \partial_\pm = \frac{\partial}{\partial x^\pm} = \frac{1}{2}(\partial_1 \mp i\partial_2). \quad (2.109)$$

2.2.2 Der euklidische Superraum

Der euklidische $\mathcal{N} = (2, 2)$ -Superraum wird ebenso durch die Koordinaten $x^\pm, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm$ beschrieben, wobei jetzt

$$(x^\pm)^* = x^\mp, \quad (\theta^\pm)^* = \bar{\theta}^\mp, \quad (\bar{\theta}^\pm)^* = \theta^\mp. \quad (2.110)$$

Wir wählen die Supersymmetriegeneratoren Q_\pm wieder derart, dass sie die Antikommutatorrelationen

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \quad (2.111)$$

mit $P_\mu = -i\partial_\mu$ erfüllen, d. h.

$$\{Q_\pm, \bar{Q}_\pm\} = -2i\partial_\pm. \quad (2.112)$$

Alle anderen Antikommutatoren zwischen Q 's sollen wieder verschwinden. Analog (2.24) wählen wir

$$\begin{aligned} Q_\pm &= \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} + i\bar{\theta}^\pm \partial_\pm, \\ \bar{Q}_\pm &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\pm} - i\theta^\pm \partial_\pm. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Wir führen wieder superkovariante Ableitungen ein,

$$\begin{aligned} D_{\pm} &= \frac{\partial}{\partial \theta^{\pm}} - i\bar{\theta}^{\pm} \partial_{\pm}, \\ \bar{D}_{\pm} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\pm}} + i\theta^{\pm} \partial_{\pm}, \end{aligned} \quad (2.114)$$

die

$$\{D_{\pm}, \bar{D}_{\pm}\} = 2i\partial_{\pm} \quad (2.115)$$

erfüllen und mit den Supersymmetriegeneratoren antikommutieren. Wie oben verschwinden auch wieder alle anderen Antikommutatoren zwischen D 's.

2.2.3 Superfelder

Ein chirales Superfeld mit $\bar{D}_{\pm}\Phi = 0$ kann in der Form

$$\Phi(x^{\pm}, \theta^{\pm}, \bar{\theta}^{\pm}) = \phi(y^{\pm}) + \theta^+ \psi_+(y^{\pm}) + \theta^- \psi_-(y^{\pm}) + i\theta^+ \theta^- F(y^{\pm}), \quad (2.116)$$

mit $y^{\pm} = x^{\pm} - i\theta^{\pm} \bar{\theta}^{\pm}$ geschrieben werden. Entwickelt man in Koeffizientenfunktionen bei x^{\pm} , so gilt

$$\begin{aligned} \Phi(x^{\pm}, \theta^{\pm}, \bar{\theta}^{\pm}) &= \phi - i\theta^+ \bar{\theta}^+ \partial_+ \phi - i\theta^- \bar{\theta}^- \partial_- \phi - \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ \partial_+ \partial_- \phi \\ &\quad + \theta^+ \psi_+ - i\theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \partial_- \psi_+ + \theta^- \psi_- - i\theta^- \theta^+ \bar{\theta}^+ \partial_+ \psi_- + i\theta^+ \theta^- F. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Das komplex konjugierte (antichirale) Superfeld $\bar{\Phi}$ hat die Entwicklung

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \bar{\phi} + i\theta^+ \bar{\theta}^+ \partial_+ \bar{\phi} + i\theta^- \bar{\theta}^- \partial_- \bar{\phi} - \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ \partial_+ \partial_- \bar{\phi} \\ &\quad - \bar{\theta}^+ \bar{\psi}_+ - i\bar{\theta}^+ \theta^- \bar{\theta}^- \partial_- \bar{\psi}_+ - \bar{\theta}^- \bar{\psi}_- - i\bar{\theta}^- \theta^+ \bar{\theta}^+ \partial_+ \bar{\psi}_- + i\bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ \bar{F}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Beide Entwicklungen unterscheiden sich nur um den Faktor i im $\theta^+ \theta^-$ - bzw. $\bar{\theta}^- \bar{\theta}^+$ -Term vom Minkowski-Fall (2.31) bzw. (2.33). Unter der infinitesimalen Eichtransformation $\delta_A \Phi = i\epsilon A \Phi$ transformiert das chirale Superfeld Φ nach

$$\begin{aligned} \delta_A \phi &= i\epsilon a \phi, \\ \delta_A \psi_{\pm} &= i\epsilon a \psi_{\pm} + i\epsilon \psi_{\pm}^A \phi, \\ \delta_A F &= i\epsilon a F - \epsilon \psi_+^A \psi_- + \epsilon \psi_-^A \psi_+ + i\epsilon F^A \phi. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Ein Vektorsuperfeld mit $V^{\dagger} = V$ hat die Entwicklung

$$\begin{aligned} V(x^{\pm}, \theta^{\pm}, \bar{\theta}^{\pm}) &= C + \theta^+ \chi_+ + \theta^- \chi_- - \bar{\theta}^+ \bar{\chi}_+ - \bar{\theta}^- \bar{\chi}_- + i\theta^+ \theta^- (M + iN) + i\bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ (M - iN) \\ &\quad - \theta^- \bar{\theta}^- (v_1 + iv_2) - \theta^+ \bar{\theta}^+ (v_1 - iv_2) - \theta^- \bar{\theta}^+ \sigma - \theta^+ \bar{\theta}^- \tau \\ &\quad + \theta^- \theta^+ (\bar{\theta}^- \bar{\lambda}_- + \bar{\theta}^+ \bar{\lambda}_+) + \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\theta^- \lambda_- + \theta^+ \lambda_+) + \theta^- \theta^+ \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- D, \end{aligned} \quad (2.120)$$

mit den reellen Komponentefeldern C, D, M, N, σ, τ und v_{μ} und den Dirac-Fermionenfeldern $\lambda_{\pm}, \chi_{\pm}$. Unter der Eichtransformation mit dem chiralen Superfeld A ,

$$V \mapsto V + i(\bar{A} - A), \quad (2.121)$$

transformieren die Komponenten damit nach

$$\begin{aligned}
 C &\mapsto C + i(\bar{a} - a), \\
 \chi_{\pm} &\mapsto \chi_{\pm} - i\psi_{\pm}, \\
 M + iN &\mapsto M + iN - iF, \\
 v_{\mu} &\mapsto v_{\mu} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}(\bar{a} + a), \\
 \sigma &\mapsto \sigma, \\
 \tau &\mapsto \tau, \\
 \lambda_{\pm} &\mapsto \lambda_{\pm} \mp i\partial_{\pm}\bar{\psi}_{\mp}, \\
 D &\mapsto D - i\partial_{+}\partial_{-}(\bar{a} - a).
 \end{aligned} \tag{2.122}$$

Führen wir wieder die Umbenennungen $D \rightsquigarrow D - \partial_{+}\partial_{-}C$ und $\lambda_{\pm} \rightsquigarrow \lambda_{\pm} \pm i\partial_{\pm}\bar{\chi}_{\mp}$ durch, dann können wir, wie im Minkowski-Fall, die Eichung so wählen, dass $C = 0$, $\chi_{\pm} = 0$, $M + iN = 0$ ist. Damit erhalten wir V in Wess-Zumino-Eichung,

$$\begin{aligned}
 V_{\text{WZ}} &= -\theta^{-}\bar{\theta}^{-}(v_1 + iv_2) - \theta^{+}\bar{\theta}^{+}(v_1 - iv_2) - \theta^{-}\bar{\theta}^{+}\sigma - \theta^{+}\bar{\theta}^{-}\tau \\
 &\quad + \theta^{-}\theta^{+}(\bar{\theta}^{-}\bar{\lambda}_{-} + \bar{\theta}^{+}\bar{\lambda}_{+}) + \bar{\theta}^{+}\bar{\theta}^{-}(\theta^{-}\lambda_{-} + \theta^{+}\lambda_{+}) + \theta^{-}\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\bar{\theta}^{-}D.
 \end{aligned} \tag{2.123}$$

Das euklidische Vektorsuperfeld stimmt formal mit dem Ergebnis im Minkowski-Fall (2.38) überein, wenn wir die Ersetzungen

$$M \pm iN \rightsquigarrow i(M \pm iN), \quad v_0 \pm v_1 \rightsquigarrow v_1 \mp iv_2, \quad \bar{\sigma} \rightsquigarrow \tau, \quad \lambda_{\pm} \rightsquigarrow -i\lambda_{\pm}, \quad \bar{\lambda}_{\pm} \rightsquigarrow -i\bar{\lambda}_{\pm}, \tag{2.124}$$

durchführen. Wir wollen uns dies bei der Konstruktion von invarianten euklidischen Wirkungen zunutze machen: Haben wir eine bestimmte Wirkung bereits in Minkowski-Raumzeit berechnet, so erhalten wir die entsprechende euklidische Wirkung durch die formalen Ersetzungen (2.124) der Komponenten eines Vektorsuperfeldes sowie durch die Ersetzungen

$$F \rightsquigarrow iF, \quad \bar{F} \rightsquigarrow i\bar{F}, \tag{2.125}$$

der Komponenten eines chiralen Superfeldes Φ .

2.2.4 Supersymmetrietransformationen

Die euklidischen Supersymmetrietransformationen sind durch

$$\delta := \epsilon_{+}Q_{-} - \epsilon_{-}Q_{+} + \bar{\epsilon}_{+}\bar{Q}_{-} - \bar{\epsilon}_{-}\bar{Q}_{+} \tag{2.126}$$

gegeben, wobei ϵ_{\pm} ein komplexer Grassmann-Parameter mit $(\epsilon_{\pm})^{*} = \bar{\epsilon}_{\mp}$ ist. Damit gilt wieder die Relation $\delta^{\dagger} = \delta$. Schauen wir uns die Transformation eines chiralen Superfeldes Φ an. Mit

$$\begin{aligned}
 Q_{\pm}\Phi &= \psi_{\pm} - i\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\partial_{+}\psi_{\pm} - i\theta^{-}\bar{\theta}^{-}\partial_{-}\psi_{\pm} - \theta^{+}\theta^{-}\bar{\theta}^{-}\bar{\theta}^{+}\partial_{+}\partial_{-}\psi_{\pm} \pm i\theta^{\mp}F - \theta^{+}\theta^{-}\bar{\theta}^{\pm}\partial_{\pm}F, \\
 \bar{Q}_{\pm}\Phi &= -2i\theta^{\pm}\partial_{\pm}\phi \mp 2\theta^{+}\theta^{-}\bar{\theta}^{\mp}\partial_{+}\partial_{-}\phi \mp 2i\theta^{+}\theta^{-}\partial_{\pm}\psi_{\mp},
 \end{aligned} \tag{2.127}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \delta\phi &= \epsilon_{+}\psi_{-} - \epsilon_{-}\psi_{+}, \\
 \delta\psi_{\pm} &= i\epsilon_{\pm}F \mp 2i\bar{\epsilon}_{\mp}\partial_{\pm}\phi, \\
 \delta F &= 2\bar{\epsilon}_{-}\partial_{+}\psi_{-} + 2\bar{\epsilon}_{+}\partial_{-}\psi_{+}.
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

2 Superraumformalismus in zwei Dimensionen

Wenn wir in unseren bereits durchgeführten Rechnungen im Minkowski-Raum jeweils die formalen Ersetzungen

$$\epsilon_{\pm} \rightsquigarrow \epsilon_{\pm}, \quad \bar{\epsilon}_{\pm} \rightsquigarrow -\bar{\epsilon}_{\pm}, \quad (2.129)$$

machen, so erhalten wir zusammen mit den Ersetzungen der Superfeldkomponenten (2.124–2.125) die euklidischen Supersymmetrietransformationen. Damit ergibt sich für die Transformationen der Komponenten von V analog (2.47)

$$\begin{aligned} \delta C &= \epsilon_+ \chi_- - \epsilon_- \chi_+ - \bar{\epsilon}_- \bar{\chi}_+ + \bar{\epsilon}_+ \bar{\chi}_-, \\ \delta \chi_+ &= i\epsilon_+(M + iN) - i\bar{\epsilon}_- \partial_+ C + \bar{\epsilon}_+ \tau - \bar{\epsilon}_- v_+, \\ \delta \chi_- &= i\epsilon_-(M + iN) + i\bar{\epsilon}_+ \partial_- C - \bar{\epsilon}_- \sigma + \bar{\epsilon}_+ v_-, \\ \delta(M + iN) &= i\bar{\epsilon}_- \bar{\lambda}_+ + \bar{\epsilon}_- \partial_+ \chi_- - i\bar{\epsilon}_+ \bar{\lambda}_- + \bar{\epsilon}_+ \partial_- \chi_+, \\ \delta v_+ &= -i\epsilon_- \partial_+ \chi_+ - \epsilon_+ \bar{\lambda}_+ + i\bar{\epsilon}_- \partial_+ \bar{\chi}_+ + \bar{\epsilon}_+ \lambda_+, \\ \delta v_- &= i\epsilon_+ \partial_- \chi_- - \epsilon_- \bar{\lambda}_- - i\bar{\epsilon}_+ \partial_- \bar{\chi}_- + \bar{\epsilon}_- \lambda_-, \\ \delta \sigma &= -\epsilon_- \bar{\lambda}_+ - i\epsilon_- \partial_+ \chi_- + \bar{\epsilon}_+ \lambda_- - i\bar{\epsilon}_+ \partial_- \bar{\chi}_+, \\ \delta \tau &= \bar{\epsilon}_- \lambda_+ + i\bar{\epsilon}_- \partial_+ \bar{\chi}_- - \epsilon_+ \bar{\lambda}_- + i\epsilon_+ \partial_- \chi_+, \\ \delta \lambda_+ &= i\epsilon_- \partial_+ \tau + i\epsilon_+ \partial_- v_+ - \bar{\epsilon}_- \partial_+(M - iN) - \epsilon_+ D, \\ \delta \lambda_- &= i\epsilon_+ \partial_- \sigma + i\epsilon_- \partial_+ v_- + \bar{\epsilon}_+ \partial_-(M - iN) - \epsilon_- D, \\ \delta D &= -i\epsilon_- \partial_+ \bar{\lambda}_- - i\epsilon_+ \partial_- \bar{\lambda}_+ - i\bar{\epsilon}_- \partial_+ \lambda_- - i\bar{\epsilon}_+ \partial_- \lambda_+, \end{aligned} \quad (2.130)$$

wobei wir $v_{\pm} := v_1 \mp iv_2$ abgekürzt haben. In Wess-Zumino-Eichung müssen die Supersymmetrietransformationen um die Eichtransformation mit dem erzeugenden chiralen Superfeld A mit den Komponenten

$$\begin{aligned} a &= 0, \\ \psi_+ &= -i\bar{\epsilon}_+ \tau + i\bar{\epsilon}_- v_+, \\ \psi_- &= i\bar{\epsilon}_- \sigma - i\bar{\epsilon}_+ v_-, \\ F &= \bar{\epsilon}_- \bar{\lambda}_+ - \bar{\epsilon}_+ \bar{\lambda}_-, \end{aligned} \quad (2.131)$$

erweitert werden. Die Supersymmetrietransformationen des chiralen Superfeldes Φ sind dann in WZ-Eichung

$$\begin{aligned} \delta \phi &= \epsilon_+ \psi_- - \epsilon_- \psi_+, \\ \delta \psi_+ &= i\epsilon_+ F - 2i\bar{\epsilon}_- D_+^v \phi + \bar{\epsilon}_+ \tau \phi, \\ \delta \psi_- &= i\epsilon_- F + 2i\bar{\epsilon}_+ D_-^v \phi - \bar{\epsilon}_- \sigma \phi, \\ \delta F &= 2\bar{\epsilon}_- D_+^v \psi_- + 2\bar{\epsilon}_+ D_-^v \psi_+ + i\bar{\epsilon}_+ \tau \psi_- + i\bar{\epsilon}_- \sigma \psi_+ + i(\bar{\epsilon}_- \bar{\lambda}_+ - \bar{\epsilon}_+ \bar{\lambda}_-) \phi, \end{aligned} \quad (2.132)$$

wobei

$$D_{\pm}^v := \frac{1}{2}(D_0^v \mp iD_1^v), \quad D_{\mu}^v := \partial_{\mu} - iv_{\mu}. \quad (2.133)$$

2.2.5 $\mathcal{N} = (1, 1)$ -Supersymmetrie

Um zu euklidischen $\mathcal{N} = (1, 1)$ -supersymmetrischen Feldtheorien zu gelangen, schränken wir wieder die Koordinaten des $(2, 2)$ -Superraums ein,

$$\theta^{\pm} = i e^{i\nu_{\pm}} \theta_1^{\pm}, \quad (2.134)$$

mit

$$(\theta_1^\pm)^* = \theta_1^\mp, \quad \nu_\pm^* = \nu_\mp. \quad (2.135)$$

Wir führen analog zum Minkowski-Fall $(1, 1)$ -Supersymmetriegeneratoren und superkovariante Ableitungen ein,

$$\begin{aligned} Q_\pm^1 &:= e^{i\nu_\pm} Q_\pm + e^{-i\nu_\pm} \bar{Q}_\pm = -i \frac{\partial}{\partial \theta_1^\pm} + 2\theta_1^\pm \partial_\pm, \\ D_\pm^1 &:= e^{i\nu_\pm} D_\pm + e^{-i\nu_\pm} \bar{D}_\pm = -i \frac{\partial}{\partial \theta_1^\pm} - 2\theta_1^\pm \partial_\pm, \end{aligned} \quad (2.136)$$

welche die Antikommutationsrelationen

$$\{Q_\pm^1, Q_\pm^1\} = -4i\partial_\pm, \quad \{D_\pm^1, D_\pm^1\} = 4i\partial_\pm, \quad (2.137)$$

erfüllen, alle anderen Antikommutatoren verschwinden wieder. Wir definieren die $(1, 1)$ -Supersymmetrievariation über

$$\delta^1 = i\epsilon_-^1 Q_+^1 + i\epsilon_+^1 Q_-^1. \quad (2.138)$$

Mit $(\epsilon_\pm^1)^* = \epsilon_\mp^1$ gilt die Relation $(\delta^1)^\dagger = \delta^1$. Die Entwicklung eines $(1, 1)$ -Superfeldes Φ hat die Form

$$\Phi = \phi + i\theta_1^+ \psi_+ + i\theta_1^- \psi_- + \theta_1^+ \theta_1^- f. \quad (2.139)$$

Im Gegensatz zum Minkowski-Fall tritt hier kein Faktor i im $\theta_1^+ \theta_1^-$ -Term auf. Die $(1, 1)$ -Supersymmetrietransformationen ergeben sich mit

$$Q_\pm^1 \Phi = \psi_\pm \mp i\theta_1^\mp f + 2\theta_1^\pm \partial_\pm \phi \pm 2i\theta_1^+ \theta_1^- \partial_\pm \psi_\mp \quad (2.140)$$

zu

$$\begin{aligned} \delta^1 \phi &= i\epsilon_-^1 \psi_+ + i\epsilon_+^1 \psi_-, \\ \delta^1 \psi_\pm &= \mp i\epsilon_\pm^1 f - 2\epsilon_\mp^1 \partial_\pm \phi, \\ \delta^1 f &= 2\epsilon_+^1 \partial_- \psi_+ - 2\epsilon_-^1 \partial_+ \psi_-. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Falls wir eine invariante Wirkung bereits im Minkowski-Superraum konstruiert haben, können wir die dort erhaltenen Ergebnisse direkt übertragen, wenn wir formal ersetzen

$$f \rightsquigarrow -if, \quad \bar{f} \rightsquigarrow -i\bar{f}, \quad \epsilon_\pm \rightsquigarrow \mp \epsilon_\pm. \quad (2.142)$$

2 Superraumformalismus in zwei Dimensionen

3 Supersymmetrische Sigma-Modelle in zwei Dimensionen

Supersymmetrische Sigma-Modelle sind Feldtheorien mit verschwindendem Superpotential W . Im Falle von $\mathcal{N} = (2, 2)$ -supersymmetrischen Sigma-Modellen ist die Wirkung allgemein von der Form

$$S = \int d^2x d^4\theta K(\Phi^i, \bar{\Phi}^i). \quad (3.1)$$

Die Komponenten von Φ^i bilden von der Raumzeit in eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ab. Falls \mathcal{M} ein linearer Raum ist, so heißt die Theorie lineares Sigma-Modell, ist \mathcal{M} ein gekrümmter Raum, so spricht man von nichtlinearen Sigma-Modellen [Wip00]. Um $(2, 2)$ -supersymmetrische Sigma-Modelle konstruieren zu können, müssen wir Bedingungen an diese Mannigfaltigkeit stellen. Wie Zumino 1979 gezeigt hat [Zum79], existiert die $(2, 2)$ -supersymmetrische Erweiterung eines zweidimensionalen Sigma-Modells genau dann, wenn \mathcal{M} eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit der Kähler-Metrik

$$ds^2 = g_{ij} dz^i d\bar{z}^j, \quad g_{ij} = \frac{\partial^2 K(\Phi^i, \bar{\Phi}^i)}{\partial \Phi^i \partial \bar{\Phi}^j}, \quad (3.2)$$

auf $\mathbb{C}^N = \{z^1, \dots, z^N\}$ ist. Falls \mathcal{M} diese Bedingung nicht erfüllt, können wir nur eine $(1, 1)$ -supersymmetrische Erweiterung des jeweiligen Modells konstruieren [FT81].

3.1 Supersymmetrisches $O(N)$ -Modell in Minkowski-Raumzeit

Das wohl einfachste nichtlineare supersymmetrische Sigma-Modell wurde erstmals von Di Vecchia und Ferrara [DVF77], sowie unabhängig davon von Witten [Wit77], im Jahre 1977 diskutiert. Die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , in die die Felder abbilden, ist in diesem Modell die $(N - 1)$ -dimensionale Sphäre

$$S^{N-1} = \left\{ (\Phi^i) \in \mathbb{R}^N \text{ mit } \sum_{i=1}^N \Phi^i \Phi^i = 1 \right\}. \quad (3.3)$$

Im Allgemeinen ist S^{N-1} keine Kähler-Mannigfaltigkeit¹. Wir konstruieren das Modell deshalb im $\mathcal{N} = (1, 1)$ -Superraum und beginnen mit der Version in Minkowski-Raumzeit. Später werden wir dies auf die euklidische Raumzeit verallgemeinern. Die Wirkung unseres Modells ist von der Form

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x d^2\theta_1 \sum_{i=1}^N D_-^1 \Phi^i D_+^1 \Phi^i, \quad (3.4)$$

¹Allerdings ist S^2 eine Kähler-Mannigfaltigkeit.

3 Supersymmetrische Sigma-Modelle in zwei Dimensionen

mit den $(1, 1)$ -superkovarianten Ableitungen D_{\pm} ,

$$D_{\pm}^1 = -i \frac{\partial}{\partial \theta_{\pm}^1} - 2\theta_{\pm}^{\mp} \partial_{\pm}, \quad (3.5)$$

und den reellen $(1, 1)$ -Superfeldern $\Phi^i(x^{\pm}, \theta_{\pm}^{\pm})$ mit der θ -Entwicklung

$$\Phi^i = n^i + i\theta_1^+ \psi_+^i + i\theta_1^- \psi_-^i + i\theta_1^+ \theta_1^- F^i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.6)$$

Damit müssen auch n^i , ψ_{\pm}^i und F^i reell sein. Anstatt im gekrümmten Raum zu rechnen, können wir die Sphäre S^{N-1} in den \mathbb{R}^N einbetten und die Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^N \Phi^i \Phi^i = 1 \quad (3.7)$$

fordern. Durch die Nebenbedingung werden Wechselwirkungen zwischen den Feldern induziert. Unser Modell ist invariant unter orthogonalen Transformationen der Superfelder Φ^i und wird deshalb $O(N)$ -Modell genannt². Nach Konstruktion es außerdem invariant unter den $(1, 1)$ -Supersymmetrietransformationen

$$\delta^1 = i\epsilon_-^1 Q_+^1 - i\epsilon_+^1 Q_-^1. \quad (3.8)$$

Wir setzen die Entwicklung von Φ^i in die Nebenbedingung (3.7) ein,

$$n^i n^i + 2i\theta_1^+ n^i \psi_+^i + 2i\theta_1^- n^i \psi_-^i + 2\theta_1^+ \theta_1^- \psi_+^i \psi_-^i + 2i\theta_1^+ \theta_1^- n^i F^i = 1, \quad (3.9)$$

und erhalten Bedingungen für die Komponentenfelder,

$$n^i n^i = 1, \quad n^i \psi_{\pm}^i = 0, \quad \psi_+^i \psi_-^i + i n^i F^i = 0, \quad (3.10)$$

wobei wir der Einfachheit halber jeweils das Summenzeichen $\sum_{i=1}^N$ unterdrückt haben. Wir wollen die Wirkung in den Komponentenfeldern ausdrücken. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} D_-^1 \Phi^i &= -2\theta_1^- \partial_- n^i - 2i\theta_1^- \theta_1^+ \partial_- \psi_+^i + \psi_-^i - \theta_1^+ F^i, \\ D_+^1 \Phi^i &= -2\theta_1^+ \partial_+ n^i - 2i\theta_1^+ \theta_1^- \partial_+ \psi_-^i + \psi_+^i + \theta_1^- F^i. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nach der Integration über $d^2\theta_1 = d\theta_1^+ d\theta_1^-$ bleibt nur der $\theta_1^- \theta_1^+$ -Term übrig,

$$D_-^1 \Phi^i D_+^1 \Phi^i \Big|_{\theta^2} = \theta_1^- \theta_1^+ (4\partial_- n^i \partial_+ n^i - 2i\partial_- \psi_+^i \psi_+^i + 2i\psi_-^i \partial_+ \psi_-^i + F^i F^i). \quad (3.12)$$

Damit ist die Wirkung von der Form

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \partial^\mu n^i \partial_\mu n^i + 2i\psi_+^i \partial_- \psi_+^i + 2i\psi_-^i \partial_+ \psi_-^i + (F^i)^2 \right\}. \quad (3.13)$$

Sie ist invariant unter den $(1, 1)$ -Supersymmetrietransformationen (2.99)

$$\begin{aligned} \delta^1 n^i &= i\epsilon_- \psi_+^i - i\epsilon_+ \psi_-^i, \\ \delta^1 \psi_{\pm}^i &= -\epsilon_{\pm} F^i \mp 2\epsilon_{\mp} \partial_{\pm} n^i, \\ \delta^1 F^i &= 2i\epsilon_- \partial_+ \psi_-^i + 2i\epsilon_+ \partial_- \psi_+^i. \end{aligned} \quad (3.14)$$

²Die orthogonale Gruppe $O(N)$ besteht aus den orthogonalen $N \times N$ -Matrizen und beschreibt die Isometrien im \mathbb{R}^N , die den Ursprung invariant lassen.

Wir gelangen zur on-shell-Formulierung, indem wir das äußere Feld F^i ausintegrieren. Dazu variieren wir die Wirkung unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen mithilfe des Lagrange-Multiplikators λ ,

$$(F^i + i\lambda n^i) \delta F^i = 0, \quad (3.15)$$

und erhalten damit für F^i eine rein algebraische Bewegungsgleichung, da Ableitungen von F^i weder in der Wirkung noch in den Nebenbedingungen vorkommen,

$$F^i = i \left(\psi_+^j \psi_-^j \right) n^i. \quad (3.16)$$

Die on-shell-Wirkung ist damit

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \partial^\mu n^i \partial_\mu n^i + 2i\psi_+^i \partial_- \psi_+^i + 2i\psi_-^i \partial_+ \psi_-^i - (\psi_+^i \psi_-^i)^2 \right\}, \quad (3.17)$$

wobei die Felder den Nebenbedingungen

$$n^i n^i = 1, \quad n^i \psi_\pm^i = 0, \quad (3.18)$$

unterliegen. In der Tat ist dieses Modell eine supersymmetrische Erweiterung des gewöhnlichen bosonischen $O(N)$ -Modells: Ohne die fermionischen Felder ψ^i in der Wirkung und in den Nebenbedingungen ergibt sich genau die Wirkung und die Nebenbedingung des bosonischen Modells. Im Anhang B.1 vergleichen wir unser Ergebnis mit der Originalarbeit von Witten [Wit77].

3.2 Supersymmetrisches $O(N)$ -Modell in euklidischer Raumzeit

Wir verallgemeinern unsere Ergebnisse für die euklidische Raumzeit. Die euklidische Wirkung in $(1, 1)$ -Superfeldsprache ist

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x d^2\theta_1 D_-^1 \Phi^i D_+^1 \Phi^i, \quad (3.19)$$

mit der Nebenbedingung

$$\Phi^i \Phi^i = 1. \quad (3.20)$$

Das reelle $(1, 1)$ -Superfeld Φ^i hat die Entwicklung

$$\Phi^i = n^i + i\theta_1^+ \psi_+^i + i\theta_1^- \psi_-^i + \theta_1^+ \theta_1^- F^i. \quad (3.21)$$

Im Gegensatz zum Minkowski-Fall (3.6) enthält diese keinen Faktor i im $\theta_1^+ \theta_1^-$ -Term. Damit gelten die Realitätsbedingungen

$$(n^i)^* = n^i, \quad (F^i)^* = F^i, \quad (\psi_\pm^i)^* = \psi_\mp^i. \quad (3.22)$$

Die Rechnungen sind demnach formal analog, wenn wir im Minkowski-Fall das äußere Feld F^i durch $-iF^i$ ersetzen. So ergeben sich die Nebenbedingungen für die Komponentfelder zu

$$n^i n^i = 1, \quad n^i \psi_\pm^i = 0, \quad \psi_+^i \psi_-^i + n^i F^i = 0, \quad (3.23)$$

und wir erhalten die Wirkung des supersymmetrischen euklidischen $O(N)$ -Modells,

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \partial^\mu n^i \partial_\mu n^i + 2i\psi_+^i \partial_- \psi_+^i + 2i\psi_-^i \partial_+ \psi_-^i - (F^i)^2 \right\}. \quad (3.24)$$

Mithilfe der Bewegungsgleichung für das äußere Feld,

$$F^i = - \left(\psi_+^j \psi_-^j \right) n^i, \quad (3.25)$$

erhalten wir die on-shell-Wirkung

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \partial^\mu n^i \partial_\mu n^i + 2i\psi_+^i \partial_- \psi_+^i + 2i\psi_-^i \partial_+ \psi_-^i - (\psi_+^i \psi_-^i)^2 \right\}, \quad (3.26)$$

mit den Nebenbedingungen

$$n^i n^i = 1, \quad n^i \psi_\pm^i = 0. \quad (3.27)$$

Das Modell ist invariant unter den Supersymmetrietransformationen (2.141)

$$\begin{aligned} \delta^1 n^i &= i\epsilon_-^1 \psi_+^i + i\epsilon_+^1 \psi_-^i, \\ \delta^1 \psi_\pm^i &= \mp i\epsilon_\pm^1 F^i - 2\epsilon_\pm^1 \partial_\pm n^i, \\ \delta^1 F^i &= 2\epsilon_+^1 \partial_- \psi_+^i - 2\epsilon_-^1 \partial_+ \psi_-^i. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Das supersymmetrische $O(N)$ -Modell wurde in euklidischer Raumzeit bereits von Di Vecchia und Ferrara [DVF77] konstruiert. Im Anhang B.2 zeigen wir, dass unsere Ergebnisse äquivalent zu den dortigen sind.

Im Falle $N = 3$ hat das $O(N)$ -Modell einige interessante Eigenschaften, die erstaunlich ähnlich zu Yang-Mills-Theorien in vier Dimensionen sind. Beispielsweise liefern beide Systeme Instantonen, die durch ganzzahlige topologische Ladungen charakterisiert sind. Beide sind renormierbar und asymptotisch frei³ [Wit77]. Allerdings ist das $O(3)$ -Modell vergleichsweise einfach und damit ein nützliches Spielzeugmodell, mit dessen Hilfe weitere Einblicke in die komplizierteren nichtabelschen Eichtheorien gewonnen werden können. Ein in gewissem Sinne unbefriedigender Aspekt dieser Analogie ist jedoch das Fehlen von stabilen Instantonen in den $O(N)$ -Modellen für $N > 3$, währenddessen man $SU(2)$ -Yang-Mills-Systeme in höhere $SU(N)$ -Eichtheorien einbetten kann und für beliebiges N Instantonlösungen existieren. Dies erlaubt, Quanten-Instantoneffekte mit der $1/N$ -Entwicklung zu vergleichen. Vor diesem Hintergrund ist es also sinnvoll, eine alternative Verallgemeinerung des $O(3)$ -Modells anzugeben, welche die oben genannten Eigenschaften mit den $O(N)$ -Modellen teilen, jedoch Instantonlösungen für beliebige N liefern. Dies erfüllen die \mathbb{CP}^N -Modelle, die 1978 von Eichenherr [Eic78], Golo und Perelomov [GP78], sowie Zakharov und Mikhailov [ZM78] vorgeschlagen wurden. Für $N = 1$ ist das \mathbb{CP}^N -Modell äquivalent zum $O(3)$ -Modell, für $N > 1$ ist es eine angemessene Verallgemeinerung, in dem Sinne, dass (im Gegensatz zu den $O(N)$ -Modellen) weiterhin Instantonlösungen existieren [Raj82].

3.3 $\mathcal{N} = (1, 1)$ -supersymmetrisches \mathbb{CP}^N -Modell in Minkowski-Raumzeit

Die supersymmetrische Erweiterung des \mathbb{CP}^N -Modells wurde erstmals von D'Adda, Di Vecchia und Lüscher [DLDV79], Witten [Wit79], sowie im Kontext der Supergravitation von

³Dies gilt auch für $N \neq 3$.

Cremmer und Scherk [CS78], diskutiert. In diesem Modell bilden die Felder in den komplex projektiven Raum \mathbb{CP}^N ab. \mathbb{CP}^N ist der Raum der Ursprungsgeraden im \mathbb{C}^{N+1} , d. h. er wird durch die komplexen $(N + 1)$ -Tupel

$$z = (z_0, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^{N+1}, \quad z \neq 0, \quad (3.29)$$

beschrieben, wobei wir zwei Tupel, die durch Multiplikation mit einer von null verschiedenen komplexen Zahl λ miteinander verbunden sind, als äquivalent auffassen,

$$z \sim \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0. \quad (3.30)$$

\mathbb{CP}^N kann mit einem homogenen Raum G/H identifiziert werden [GP78, DLDV78], wobei

$$G = SU(N + 1), \quad H = S(U(1) \times U(N)) \simeq U(N). \quad (3.31)$$

Anstatt der Äquivalenzklassen $[z](x)$ können wir auch nur die Repräsentanten $z(x)$ mit Einheitslänge,

$$|z(x)|^2 = 1, \quad (3.32)$$

betrachten, und Felder, die über eine $U(1)$ -Eichtransformation miteinander in Beziehung stehen,

$$z(x) \mapsto e^{i\Lambda(x)} z(x), \quad (3.33)$$

als äquivalent auffassen. In diesem Sinne kann \mathbb{CP}^N mit dem Quotientenraum der $(2N + 1)$ -dimensionalen Sphäre im \mathbb{C}^{N+1} unter der Wirkung von $U(1)$ identifiziert werden,

$$\mathbb{CP}^N \simeq S^{2N+1}/U(1). \quad (3.34)$$

Das supersymmetrische \mathbb{CP}^N -Modell kann damit analog zum $O(N)$ -Modell im $(1, 1)$ -Superraum mit den reellen Graßmann-Koordinaten θ^\pm konstruiert werden⁴. Die Wirkung besteht dann nur aus dem kinetischen Term in den $N + 1$ komplexen $(1, 1)$ -Superfeldern $\Phi^i = \Phi^i(x^\pm, \theta^\pm)$

$$S = \int d^2x d^2\theta (\nabla_- \Phi^i)^\dagger \nabla_+ \Phi^i, \quad (3.35)$$

wobei wir die eichkovariante Ableitung

$$\nabla_\pm := D_\pm - iA_\pm \quad (3.36)$$

mit dem reellen fermionischen Superfeld A_\pm und der $(1, 1)$ -superkovarianten Ableitung

$$D_\pm = -i \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} - 2\theta^\pm \partial_\pm \quad (3.37)$$

verwendet haben. Für die Superfelder fordern wir die Nebenbedingung

$$\Phi^{i\dagger} \Phi^i = 1. \quad (3.38)$$

Das Modell ist damit invariant unter den lokalen $U(1)$ -Eichtransformationen

$$\Phi^i \mapsto e^{i\Lambda(x^\pm, \theta^\pm)} \Phi^i, \quad (3.39)$$

⁴Um die folgenden Rechnungen übersichtlich zu gestalten, lassen wir den Index 1, der die Koordinaten im $(1, 1)$ -Superraum bezeichnete, weg.

3 Supersymmetrische Sigma-Modelle in zwei Dimensionen

wobei Λ ein reelles bosonisches Superfeld ist. Das fermionische Superfeld A_{\pm} transformiert wie ein abelsches Eichfeld,

$$A_{\pm} \mapsto A_{\pm} + D_{\pm}\Lambda. \quad (3.40)$$

In Minkowski-Raumzeit haben die Superfelder Φ^i die Entwicklung

$$\Phi^i = z^i + i\theta^+\chi_+^i + i\theta^-\chi_-^i + i\theta^+\theta^-F^i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (3.41)$$

mit den komplexen bosonischen Komponentefeldern z^i und F^i und dem Dirac-Fermionenfeld χ_{\pm}^i . In Anlehnung an die Analogie zur QCD heißt der Index i Farbindex. Wir wollen ihn der Einfachheit halber soweit als möglich unterdrücken und z , χ und F als $(N+1)$ -Vektoren im Farbraum betrachten. Da weder die Wirkung noch die Nebenbedingung Ableitungen des Eichfeldes A_{\pm} enthält, können wir A_{\pm} ausintegrieren. Unter Benutzung der Nebenbedingung erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$A_{\pm} = -i\Phi^{\dagger}D_{\pm}\Phi. \quad (3.42)$$

Damit kann A_{\pm} aus der Wirkung eliminiert werden,

$$S = \int d^2x d^2\theta \left\{ (D_-\Phi)^{\dagger} (D_+\Phi) + (\Phi^{\dagger}D_-\Phi) (\Phi^{\dagger}D_+\Phi) \right\}. \quad (3.43)$$

Wir entwickeln die Nebenbedingung

$$\begin{aligned} \Phi^{\dagger}\Phi &= (\bar{z} + i\theta^+\bar{\chi}_+ + i\theta^-\bar{\chi}_- + i\theta^+\theta^-\bar{F}) (z + i\theta^+\chi_+ + i\theta^-\chi_- + i\theta^+\theta^-F) \\ &= \bar{z}z + i\theta^+(\bar{\chi}_+z + \bar{z}\chi_+) + i\theta^-(\bar{\chi}_-z + \bar{z}\chi_-) + \theta^+\theta^-(\bar{\chi}_+\chi_- - \bar{\chi}_-\chi_+ + i\bar{F}z + i\bar{z}F) \\ &= 1, \end{aligned} \quad (3.44)$$

und erhalten durch Koeffizientenvergleich Bedingungen an die Komponentfelder⁵,

$$\bar{z}z = 1, \quad \bar{\chi}_{\pm}z + \bar{z}\chi_{\pm} = 0, \quad \bar{F}z + \bar{z}F = i\bar{\chi}_+\chi_- - i\bar{\chi}_-\chi_+. \quad (3.45)$$

Mit

$$\begin{aligned} D_-\Phi &= \left(-i\frac{\partial}{\partial\theta^-} - 2\theta^-\partial_- \right) (z + i\theta^+\chi_+ + i\theta^-\chi_- + i\theta^+\theta^-F) \\ &= \chi_- - \theta^+F - 2\theta^-\partial_-z - 2i\theta^-\theta^+\partial_-\chi_+, \\ D_+\Phi &= \left(-i\frac{\partial}{\partial\theta^+} - 2\theta^+\partial_+ \right) (z + i\theta^+\chi_+ + i\theta^-\chi_- + i\theta^+\theta^-F) \\ &= \chi_+ + \theta^-F - 2\theta^+\partial_+z + 2i\theta^-\theta^+\partial_+\chi_-, \end{aligned} \quad (3.46)$$

erhalten wir für den ersten Term in der Wirkung

$$(D_-\Phi)^{\dagger}D_+\Phi \Big|_{\theta^2} = 4\partial_-\bar{z}\partial_+z + 2i\bar{\chi}_-\partial_+\chi_- - 2i\partial_-\bar{\chi}_+\chi_+ + \bar{F}F, \quad (3.47)$$

⁵Dabei verstehen wir unter dem Überstrich komplexe Konjugation bzw. Dirac-Adjunktion (Spinor) und Transposition im Farbraum, also z. B. $\bar{z}z = z^{\dagger}z = \sum_{i=0}^N (z^i)^* z^i$.

wobei wir unter $(\dots)|_{\theta^2}$ den $\theta^-\theta^+$ -Koeffizienten von (\dots) verstehen. Für den zweiten Term ergibt sich mit

$$\begin{aligned}
 \Phi^\dagger D_- \Phi &= (\bar{z} + i\theta^+ \bar{\chi}_+ + i\theta^- \bar{\chi}_- + i\theta^+ \theta^- \bar{F}) (\chi_- - \theta^+ F - 2\theta^- \partial_- z - 2i\theta^- \theta^+ \partial_- \chi_+) \\
 &= \bar{z}\chi_- + i\theta^+ \bar{\chi}_+ \chi_- - \theta^+ \bar{z}F - 2\theta^- \bar{z}\partial_- z + i\theta^- \bar{\chi}_- \chi_- + i\theta^+ \theta^- \bar{F}\chi_- \\
 &\quad - i\theta^+ \theta^- \bar{\chi}_- F + 2i\theta^+ \theta^- \bar{\chi}_+ \partial_- z + 2i\theta^+ \theta^- \bar{z}\partial_- \chi_+, \\
 \Phi^\dagger D_+ \Phi &= (\bar{z} + i\theta^+ \bar{\chi}_+ + i\theta^- \bar{\chi}_- + i\theta^+ \theta^- \bar{F}) (\chi_+ + \theta^- F - 2\theta^+ \partial_+ z + 2i\theta^- \theta^+ \partial_+ \chi_-) \\
 &= \bar{z}\chi_+ + i\theta^+ \bar{\chi}_+ \chi_+ - 2\theta^+ \bar{z}\partial_+ z + \theta^- \bar{z}F + i\theta^- \bar{\chi}_- \chi_+ + i\theta^+ \theta^- \bar{F}\chi_+ \\
 &\quad - i\theta^+ \theta^- \bar{\chi}_+ F - 2i\theta^+ \theta^- \bar{\chi}_- \partial_+ z - 2i\theta^+ \theta^- \bar{z}\partial_+ \chi_-,
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

und unter Verwendung der Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
 \left(\Phi^\dagger D_- \Phi \right) \left(\Phi^\dagger D_+ \Phi \right) \Big|_{\theta^2} &= -i(\bar{z}\chi_-)(\bar{F}\chi_+) + i(\bar{z}\chi_-)(\bar{\chi}_+ F) + i(\bar{z}\chi_+)(\bar{F}\chi_-) - i(\bar{z}\chi_+)(\bar{\chi}_- F) \\
 &\quad - 2i(\bar{\chi}_- \partial_+ z)(\bar{z}\chi_-) - 2i(\bar{z}\partial_+ \chi_-)(\bar{z}\chi_-) - 2i(\bar{\chi}_+ \partial_- z)(\bar{z}\chi_+) \\
 &\quad - 2i(\bar{z}\partial_- \chi_+)(\bar{z}\chi_+) - 2i(\bar{z}\partial_- z)(\bar{\chi}_+ \chi_+) - 2i(\bar{z}\partial_+ z)(\bar{\chi}_- \chi_-) \\
 &\quad + 4(\bar{z}\partial_- z)(\bar{z}\partial_+ z) - (\bar{F}z)(\bar{z}F) - (\bar{\chi}_- \chi_-)(\bar{\chi}_+ \chi_+) \\
 &\quad + (\bar{\chi}_+ \chi_-)(\bar{\chi}_- \chi_+).
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Damit lässt sich die Wirkung in der Form

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^2x \{ 4\partial_- \bar{z}\partial_+ z + 2i\bar{\psi}_- \partial_+ \psi_- + 2i\bar{\psi}_+ \partial_- \psi_+ + 4(\bar{z}\partial_- z)(\bar{z}\partial_+ z) \\
 &\quad + (\bar{G} + \bar{\psi}_+ \rho_- - \bar{\psi}_- \rho_+)(G + \rho_- \psi_+ - \rho_+ \psi_-) - 2i(\bar{z}\partial_- z)(\bar{\psi}_+ \psi_+) \\
 &\quad - 2i(\bar{z}\partial_+ z)(\bar{\psi}_- \psi_-) - (\bar{\psi}_+ \psi_+)(\bar{\psi}_- \psi_-) + (\bar{\psi}_- \psi_-)(\bar{\psi}_+ \psi_+) \}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

schreiben, wobei wir die neuen Felder

$$\psi_\pm = (1 - z\bar{z})\chi_\pm, \quad \bar{\psi}_\pm = \bar{\chi}_\pm(1 - z\bar{z}), \tag{3.51}$$

$$G = (1 - z\bar{z})F, \quad \bar{G} = \bar{F}(1 - z\bar{z}), \tag{3.52}$$

$$\rho_\pm = -i\bar{z}\chi_\pm, \quad \bar{\rho}_\pm = i\bar{\chi}_\pm z = \rho_\pm, \tag{3.53}$$

eingeführt haben. Dies sieht man wie folgt ein: Die in der Wirkung (3.50) auftretenden Terme sind

$$\begin{aligned}
 (\bar{G} + \bar{\psi}_+ \rho_- - \bar{\psi}_- \rho_+)(G + \rho_- \psi_+ - \rho_+ \psi_-) &= \bar{G}G + \rho_- (\bar{G}\psi_+) - \rho_+ (\bar{G}\psi_-) + (\bar{\psi}_+ G)\rho_- \\
 &\quad - (\bar{\psi}_- G)\rho_+ - (\bar{\psi}_+ \psi_-)\rho_- \rho_+ - (\bar{\psi}_- \psi_+)\rho_+ \rho_-,
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

in den alten Feldern geschrieben,

$$\begin{aligned}
 \bar{G}G &= \bar{F}F - (\bar{F}z)(\bar{z}F), \\
 \rho_- (\bar{G}\psi_+) &= -i(\bar{z}\chi_-)(\bar{F}\chi_+) + i(\bar{z}\chi_-)(\bar{z}\chi_+)(\bar{F}z), \\
 -\rho_+ (\bar{G}\psi_-) &= i(\bar{z}\chi_+)(\bar{F}\chi_-) + i(\bar{z}\chi_-)(\bar{z}\chi_+)(\bar{F}z), \\
 (\bar{\psi}_+ G)\rho_- &= i(\bar{z}\chi_-)(\bar{\chi}_+ F) + i(\bar{z}\chi_-)(\bar{z}\chi_+)(\bar{z}F), \\
 -(\bar{\psi}_- G)\rho_+ &= -i(\bar{z}\chi_+)(\bar{\chi}_- F) + i(\bar{z}\chi_-)(\bar{\chi}_+ z)(\bar{z}F), \\
 -(\bar{\psi}_+ \psi_-)\rho_- \rho_+ &= (\bar{z}\chi_-)(\bar{z}\chi_+)(\bar{\chi}_+ \chi_-), \\
 -(\bar{\psi}_- \psi_+)\rho_+ \rho_- &= -(\bar{z}\chi_-)(\bar{z}\chi_+)(\bar{\chi}_- \chi_+),
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

3 Supersymmetrische Sigma-Modelle in zwei Dimensionen

sowie

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_- \psi_+) (\bar{\psi}_+ \psi_-) &= (\bar{\chi}_- \chi_+) (\bar{\chi}_+ \chi_-) + (\bar{z} \chi_-) (\bar{z} \chi_+) (\bar{\chi}_+ \chi_- - \bar{\chi}_- \chi_+), \\ -(\bar{\psi}_- \psi_-) (\bar{\psi}_+ \psi_+) &= -(\bar{\chi}_- \chi_-) (\bar{\chi}_+ \chi_+). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Setzen wir diese Terme unter Benutzung der Nebenbedingung (3.45c) in die Wirkung (3.50) ein, so erhalten wir genau die Terme in (3.47) und (3.49).

Wir können das äußere Feld G ausintegrieren, indem wir die Bewegungsgleichung einsetzen. Dabei verschwindet auch ρ_{\pm} und wir erhalten

$$\begin{aligned} S &= \int d^2x \left\{ 4\bar{\partial}_- \bar{z} \partial_+ z + 2i\bar{\psi}_- \partial_+ \psi_- + 2i\bar{\psi}_+ \partial_- \psi_+ + 4(\bar{z} \partial_- z) (\bar{z} \partial_+ z) \right. \\ &\quad \left. - 2i(\bar{z} \partial_- z) (\bar{\psi}_+ \psi_+) - 2i(\bar{z} \partial_+ z) (\bar{\psi}_- \psi_-) - (\bar{\psi}_+ \psi_+) (\bar{\psi}_- \psi_-) + (\bar{\psi}_- \psi_+) (\bar{\psi}_+ \psi_-) \right\}, \\ &= \int d^2x \left\{ (D^\mu z)^\dagger (D_\mu z) + i\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi + \frac{1}{4} \left[(\bar{\psi} \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma_* \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu := \partial_\mu - \bar{z} \partial_\mu z. \quad (3.58)$$

Dabei unterliegen die Felder den Nebenbedingungen

$$\bar{z} z = 1, \quad \bar{z} \psi = \bar{\psi} z = 0. \quad (3.59)$$

Nach Konstruktion ist das Modell invariant unter den $(1, 1)$ -Supersymmetrietransformationen

$$\begin{aligned} \delta z &= i\epsilon_- \psi_+ - i\epsilon_+ \psi_-, \\ \delta \psi_+ &= -i\epsilon_- (\bar{\psi}_+ \psi_+) z + i\epsilon_+ (\bar{\psi}_- \psi_+) z - 2\epsilon_- D_+^z z, \\ \delta \psi_- &= -i\epsilon_- (\bar{\psi}_+ \psi_-) z + i\epsilon_+ (\bar{\psi}_- \psi_-) z + 2\epsilon_+ D_-^z z, \end{aligned} \quad (3.60)$$

wobei

$$D_\pm^z := \frac{1}{2} (D_0 \pm D_1) = \partial_\pm - \bar{z} \partial_\pm z, \quad (3.61)$$

sowie unter den $U(1)$ -Eichtransformationen

$$\begin{aligned} z(x) &\mapsto e^{i\Lambda(x)} z(x), \\ \psi(x) &\mapsto e^{i\Lambda(x)} \psi(x), \end{aligned} \quad (3.62)$$

mit der reellen Funktion $\Lambda(x)$.

Die Wirkung kann auch noch in einer anderen Form, ohne 4-Fermi-Terme, geschrieben werden [Wit79]. Dazu führen wir die reellen bosonischen Hilfsfelder τ , π und σ^μ ein und schreiben

$$\begin{aligned} S &= \int d^2x \left\{ (D^\mu z)^\dagger (D_\mu z) + i\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{1}{2} (\tau^2 - \pi^2 - \sigma^\mu \sigma_\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} [(\bar{\psi} \psi) \tau + (\bar{\psi} \gamma_* \psi) \pi + (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \sigma_\mu] + \lambda(\bar{z} z - 1) + \bar{\mu} \bar{z} \psi + \mu \bar{\psi} z \right\}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

wobei λ , $\bar{\mu}$ und μ Lagrange'sche Multiplikatoren sind, die die Nebenbedingungen

$$\bar{z} z = 1, \quad \bar{z} \psi = \bar{\psi} z = 0, \quad (3.64)$$

erzwingen. Werden die Hilfsfelder ausintegriert, so erhalten wir die Wirkung (3.57) mit den 4-Fermi-Wechselwirkungen zurück.

3.4 $\mathcal{N} = (1, 1)$ -supersymmetrisches \mathbb{CP}^N -Modell in euklidischer Raumzeit

Um die Wirkung, die Nebenbedingungen und die dazugehörigen Supersymmetrietransformationen des euklidischen Modells zu erhalten, führen wir lediglich die formalen Ersetzungen

$$F \rightsquigarrow -iF, \quad \bar{F} \rightsquigarrow -i\bar{F}, \quad \epsilon_{\pm} \rightsquigarrow \mp \epsilon_{\pm}, \quad (3.65)$$

durch. Damit ergibt sich für die Wirkung

$$\begin{aligned} S = \int d^2x \{ & 4\partial_- \bar{z} \partial_+ z + 2i\bar{\psi}_- \partial_+ \psi_- + 2i\bar{\psi}_+ \partial_- \psi_+ + 4(\bar{z} \partial_- z)(\bar{z} \partial_+ z) \\ & - (\bar{G} + i\bar{\psi}_+ \rho_- - i\bar{\psi}_- \rho_+)(G + i\rho_- \psi_+ - i\rho_+ \psi_-) - 2i(\bar{z} \partial_- z)(\bar{\psi}_+ \psi_+) \\ & - 2i(\bar{z} \partial_+ z)(\bar{\psi}_- \psi_-) - (\bar{\psi}_+ \psi_+)(\bar{\psi}_- \psi_-) + (\bar{\psi}_- \psi_+)(\bar{\psi}_+ \psi_-) \}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

bzw. nach der Ausintegration von G ,

$$\begin{aligned} S = \int d^2x \{ & 4\partial_- \bar{z} \partial_+ z + 2i\bar{\psi}_- \partial_+ \psi_- + 2i\bar{\psi}_+ \partial_- \psi_+ + 4(\bar{z} \partial_- z)(\bar{z} \partial_+ z) \\ & - 2i(\bar{z} \partial_- z)(\bar{\psi}_+ \psi_+) - 2i(\bar{z} \partial_+ z)(\bar{\psi}_- \psi_-) - (\bar{\psi}_+ \psi_+)(\bar{\psi}_- \psi_-) + (\bar{\psi}_- \psi_+)(\bar{\psi}_+ \psi_-) \} \\ = \int d^2x \left\{ & (D^\mu z)^\dagger (D_\mu z) + i\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi + \frac{1}{4} \left[(\bar{\psi} \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma_* \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\bar{z} z = 1, \quad \bar{z} \psi = \bar{\psi} z = 0. \quad (3.68)$$

Die (1, 1)-Supersymmetrietransformationen lauten

$$\begin{aligned} \delta z &= i\epsilon_- \psi_+ + i\epsilon_+ \psi_-, \\ \delta \psi_+ &= -i\epsilon_+ (\bar{\psi}_- \psi_+) z - i\epsilon_- (\bar{\psi}_+ \psi_+) z - 2\epsilon_- D_+^z z, \\ \delta \psi_- &= -i\epsilon_- (\bar{\psi}_+ \psi_-) z - i\epsilon_+ (\bar{\psi}_- \psi_-) z - 2\epsilon_+ D_-^z z, \end{aligned} \quad (3.69)$$

wobei

$$D_\pm^z := \frac{1}{2} (D_1 \mp iD_2) = \partial_\pm - \bar{z} \partial_\pm z. \quad (3.70)$$

Im Anhang B.3 wird gezeigt, dass diese Ergebnisse äquivalent zu denen von D'Adda et. al. [DLDV79] sind.

3.5 Äquivalenz von \mathbb{CP}^1 -Modell und $O(3)$ -Modell

Wir wollen nachweisen, dass das \mathbb{CP}^1 -Modell äquivalent zum $O(3)$ -Modell ist und damit die \mathbb{CP}^N -Modelle eine geeignete Verallgemeinerung des $O(3)$ -Modells darstellen⁶. Der Zusammenhang zwischen den zwei komplexen \mathbb{CP}^1 -Superfeldern Ψ^0, Ψ^1 , und den drei reellen $O(3)$ -Superfeldern $\Phi^i, i = 1, 2, 3$, ist durch

$$\Phi^i = \Psi^\dagger \sigma^i \Psi \quad (3.71)$$

⁶In dem Sinne, dass in \mathbb{CP}^N -Modellen für beliebiges N Instantonlösungen existieren. Die Instantonlösungen werden in Kapitel 4 diskutiert.

3 Supersymmetrische Sigma-Modelle in zwei Dimensionen

gegeben, wobei σ^i die Pauli-Matrizen bezeichnen. Damit ist die Wirkung des $O(3)$ -Modells von der Form

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{O(3)} &= \frac{1}{2} \int d^2x d^2\theta D_- \Phi^i D_+ \Phi^i \\ &= \frac{1}{2} \int d^2x d^2\theta \left[(D_- \Psi^\dagger) \sigma^i \Psi + \Psi^\dagger \sigma^i (D_- \Psi) \right] \left[(D_+ \Psi^\dagger) \sigma^i \Psi + \Psi^\dagger \sigma^i (D_+ \Psi) \right].\end{aligned}\quad (3.72)$$

Mit der Identität⁷

$$\Psi_1 \Psi_2^\dagger = \pm \left[\frac{1}{2} \Psi_2^\dagger \Psi_1 + \frac{1}{2} (\Psi_2^\dagger \sigma^j \Psi_1) \sigma^j \right], \quad (3.73)$$

wobei das untere Vorzeichen für den Fall gilt, dass Ψ_1 und Ψ_2 Grassmanngrößen sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}(D_- \Psi^\dagger) \sigma^i \Psi (D_+ \Psi^\dagger) \sigma^i \Psi &= \frac{3}{2} (D_- \Psi^\dagger) \Psi (D_+ \Psi^\dagger) \Psi + \frac{1}{2} (D_- \Psi^\dagger) \sigma^i \sigma^j \sigma^i \Psi (D_+ \Psi^\dagger) \sigma^j \Psi \\ &= (\Psi^\dagger D_- \Psi) (\Psi^\dagger D_+ \Psi), \\ \Psi^\dagger \sigma^i (D_- \Psi) (D_+ \Psi^\dagger) \sigma^i \Psi &= -\frac{3}{2} (D_+ \Psi^\dagger) (D_- \Psi) - \frac{1}{2} (D_+ \Psi^\dagger) \sigma^j (D_- \Psi) \Psi^\dagger \sigma^i \sigma^j \sigma^i \Psi \\ &= -\frac{3}{2} (D_+ \Psi^\dagger) (D_- \Psi) + \frac{3}{4} (D_+ \Psi^\dagger) \Psi \Psi^\dagger (D_- \Psi) \\ &\quad + \frac{1}{4} (D_+ \Psi^\dagger) \sigma^j \sigma^k \sigma^j \Psi \Psi^\dagger \sigma^k (D_- \Psi) \\ &= -2 (D_+ \Psi^\dagger) (D_- \Psi) - (\Psi^\dagger D_+ \Psi) (\Psi^\dagger D_- \Psi), \\ (D_- \Psi^\dagger) \sigma^i \Psi \Psi^\dagger \sigma^i (D_+ \Psi) &= 2 (D_- \Psi^\dagger) (D_+ \Psi) + (\Psi^\dagger D_- \Psi) (\Psi^\dagger D_+ \Psi), \\ \Psi^\dagger \sigma^i (D_- \Psi) \Psi^\dagger \sigma^i (D_+ \Psi) &= -\frac{3}{2} \Psi^\dagger (D_+ \Psi) \Psi^\dagger (D_- \Psi) + \frac{1}{2} \Psi^\dagger \sigma^j (D_- \Psi) \Psi^\dagger \sigma^i \sigma^j \sigma^i (D_+ \Psi) \\ &= -(\Psi^\dagger D_+ \Psi) (\Psi^\dagger D_- \Psi),\end{aligned}\quad (3.74)$$

wobei wir jeweils den auf der rechten Seite auftretenden Term, der bis auf einen Vorfaktor identisch mit der linken Seite ist, wieder subtrahiert haben. Wir haben außerdem die Eigenschaften für die Produkte aus den Pauli-Matrizen

$$(\sigma^i)^2 = 3, \quad \sigma^i \sigma^j \sigma^i = \sigma^i (\{\sigma^i, \sigma^j\} - \sigma^i \sigma^j) = -\sigma^j, \quad (3.75)$$

sowie die Nebenbedingung $\Psi^\dagger \Psi = 1$ und deren Ableitungen benutzt. Damit ergibt sich bis auf den in unserer Diskussion nicht bedeutsamen Faktor 2 die Wirkung des \mathbb{CP}^N -Modells,

$$\begin{aligned}S_{O(3)} &= \frac{1}{2} \int d^2x d^2\theta D_- \Phi^i D_+ \Phi^i \\ &= 2 \int d^2x d^2\theta \left\{ (D_- \Phi)^\dagger (D_+ \Phi) + (\Phi^\dagger D_- \Phi) (\Phi^\dagger D_+ \Phi) \right\} \\ &= 2S_{\mathbb{CP}^1}.\end{aligned}\quad (3.76)$$

⁷Diese Identität folgt daraus, dass sich jede 2×2 -Matrix in Pauli-Matrizen und Einheitsmatrix entwickeln lässt. Die Koeffizienten a^μ des dyadischen Produkts $\Psi_1 \Psi_2^\dagger = \sum_{\mu=0}^3 a^\mu \sigma^\mu$ ergeben sich nach Multiplikation mit σ^ν von rechts und Spurbildung unter Benutzung von $\text{tr}(\Psi_1 \Psi_2^\dagger \sigma^\mu) = \pm \Psi_2^\dagger \sigma^\mu \Psi_1$ und $\text{tr}(\sigma^\mu \sigma^\nu) = 2\delta^{\mu\nu}$ zu $a^\mu = \pm \frac{1}{2} \Psi_2^\dagger \sigma^\mu \Psi_1$, wobei das untere Vorzeichen für den Fall gilt, dass Ψ_1 und Ψ_2 Grassmanngrößen sind.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
 \Phi^i \Phi^i &= \Psi^\dagger \sigma^i \Psi \Psi^\dagger \sigma^i \Psi \\
 &= \frac{3}{2} \Psi^\dagger \Psi - \frac{1}{2} \Psi^\dagger \sigma^j \Psi \Psi^\dagger \sigma^j \Psi \\
 &= \Psi^\dagger \Psi \\
 &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Wirkung und Nebenbedingung von $O(3)$ -Modell und \mathbb{CP}^1 -Modell stimmen also überein und die Modelle sind demnach äquivalent.

3.6 $\mathcal{N} = (2, 2)$ -supersymmetrisches \mathbb{CP}^N -Modell in Minkowski-Raumzeit

Das supersymmetrische \mathbb{CP}^N -Modell besitzt eine weitere Supersymmetrie, welche in unserem $(1, 1)$ -Superraumformalismus nicht direkt offensichtlich ist. Wir wollen das Modell deshalb derart schreiben, dass die volle $(2, 2)$ -Supersymmetriealgebra manifest ist. Dies ist möglich, da \mathbb{CP}^N eine Kählermannigfaltigkeit ist. Betrachten wir die Funktion

$$K(\Phi^i, \bar{\Phi}^i) = \sum_{i=0}^N \bar{\Phi}^i e^V \Phi^i - \frac{1}{2} \left(\int d^2 \tilde{\theta} \Sigma + \text{c. c.} \right), \tag{3.78}$$

mit den chiralen bzw. antichiralen Superfeldern Φ^i und $\bar{\Phi}^i$, $i = 0, \dots, N$, dem Vektorsuperfeld V und der dazugehörigen Superfeldstärke

$$\Sigma = \bar{D}_+ D_- V. \tag{3.79}$$

K ist dann invariant unter supersymmetrischen Eichtransformationen mit einem chiralen Superfeld A ,

$$V \mapsto V + i(\bar{A} - A), \quad \Phi^i \mapsto e^{iA} \Phi^i. \tag{3.80}$$

Die zu K gehörige Wirkung hat die Form

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^2 x d^4 \theta K(\Phi^i, \bar{\Phi}^i) \\
 &= \int d^2 x d^4 \theta (\bar{\Phi}^i e^V \Phi^i - V),
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

wie wir in Abschnitt 2.1.6 gezeigt haben. Sie ist invariant unter Eichtransformationen und den $(2, 2)$ -Supersymmetrietransformationen im Minkowski-Raum,

$$\delta = \epsilon_+ Q_- - \epsilon_- Q_+ - \bar{\epsilon}_+ \bar{Q}_- + \bar{\epsilon}_- \bar{Q}_+. \tag{3.82}$$

Das Vektorsuperfeld V kann mithilfe der Bewegungsgleichung

$$\bar{\Phi}^i e^V \Phi^i - 1 = 0 \tag{3.83}$$

ausintegriert werden. Damit lautet die Wirkung

$$S = \int d^2 x d^4 \theta \ln(\bar{\Phi}^i \Phi^i), \tag{3.84}$$

3 Supersymmetrische Sigma-Modelle in zwei Dimensionen

wobei wir benutzt haben, dass konstante Terme im Integranden keinen Beitrag zur Wirkung liefern, da sie nach der Integration über $d^4\theta$ verschwinden. Falls die Eichung derart gewählt wird, dass $\Phi^0 = 1$ ist, so ist das dazugehörige Kählerpotential gerade die Fubini-Study-Metrik für $\mathbb{C}P^N$,

$$K(\Phi, \bar{\Phi}) = \ln \left(1 + \sum_{a=1}^N \bar{\Phi}^a \Phi^a \right). \quad (3.85)$$

Damit ist durch (3.81) die gesuchte Wirkung des $\mathbb{C}P^N$ -Modells im $(2, 2)$ -Superraumformalismus gegeben.

Wir wollen die Wirkung in den Komponentenfeldern schreiben. Um die Schreibweise so übersichtlich wie möglich zu gestalten, werden wir im Folgenden wieder die Indizes $i = 0, \dots, N$ so weit als möglich unterdrücken. Das chirale Superfeld Φ hat im Minkowski-Raum die θ -Entwicklung

$$\begin{aligned} \Phi = & z - i\theta^+\bar{\theta}^+\partial_+z - i\theta^-\bar{\theta}^-\partial_-z - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\partial_+\partial_-z \\ & + \theta^+\psi_+ - i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\partial_-\psi_+ + \theta^-\psi_- - i\theta^-\theta^+\bar{\theta}^+\partial_+\psi_- + \theta^+\theta^-F, \end{aligned} \quad (3.86)$$

und für das Vektorsuperfeld V gilt in Wess-Zumino-Eichung

$$\begin{aligned} V = & -\theta^-\bar{\theta}^-(v_0 - v_1) - \theta^+\bar{\theta}^+(v_0 + v_1) - \theta^-\bar{\theta}^+\sigma - \theta^+\bar{\theta}^-\bar{\sigma} \\ & + i\theta^-\theta^+(\bar{\theta}^-\bar{\lambda}_- + \bar{\theta}^+\bar{\lambda}_+) + i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\theta^-\lambda_- + \theta^+\lambda_+) + \theta^-\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-D. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Die Entwicklung der linken Seite der Bewegungsgleichung

$$\bar{\Phi}\Phi = e^{-V} \quad (3.88)$$

ist von der Form

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}\Phi = & \bar{z}z + \theta^+\bar{z}\psi_+ + \theta^-\bar{z}\psi_- - \bar{\theta}^+\bar{\psi}_+z - \bar{\theta}^-\bar{\psi}_-z \\ & - \theta^-\bar{\theta}^-(i\bar{z}\partial_-z - i\partial_-\bar{z}z + \bar{\psi}_-\psi_-) - \theta^+\bar{\theta}^+(i\bar{z}\partial_+z - i\partial_+\bar{z}z + \bar{\psi}_+\psi_+) \\ & - \theta^-\bar{\theta}^+\bar{\psi}_+\psi_- - \theta^+\bar{\theta}^-\bar{\psi}_-\psi_+ + \theta^+\theta^-\bar{z}F + \bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\bar{F}z \\ & - i\theta^-\theta^+\bar{\theta}^-(-\bar{z}\partial_-\psi_+ + \partial_-\bar{z}\psi_+ + i\bar{\psi}_-F) - i\theta^-\theta^+\bar{\theta}^+(-\partial_+\bar{z}\psi_- + \bar{z}\partial_+\psi_- + i\bar{\psi}_+F) \\ & - i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^-(-\partial_-\bar{\psi}_+z + \bar{\psi}_+\partial_-\bar{z} - i\bar{F}\psi_-) - i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\theta^+(\partial_+\bar{\psi}_-z - \bar{\psi}_-\partial_+\bar{z} - i\bar{F}\psi_+) \\ & + \theta^-\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(-\bar{z}\partial_+\partial_-\bar{z} - \partial_-\partial_+\bar{z}z + \partial_+\bar{z}\partial_-\bar{z} + \partial_-\bar{z}\partial_+z \\ & + i\bar{\psi}_+\partial_-\psi_+ - i\partial_-\bar{\psi}_+\psi_+ + i\bar{\psi}_-\partial_+\psi_- - i\partial_+\bar{\psi}_-\psi_- + \bar{F}F). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Wir vergleichen die Koeffizienten mit denen der Entwicklung der rechten Seite der Gleichung,

$$\begin{aligned} e^{-V} = & 1 - V + \frac{1}{2}V^2 \\ = & 1 + \theta^-\bar{\theta}^-(v_0 - v_1) + \theta^+\bar{\theta}^+(v_0 + v_1) + \theta^-\bar{\theta}^+\sigma + \theta^+\bar{\theta}^-\bar{\sigma} \\ & - i\theta^-\theta^+(\bar{\theta}^-\bar{\lambda}_- + \bar{\theta}^+\bar{\lambda}_+) - i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(\theta^-\lambda_- + \theta^+\lambda_+) + \theta^-\theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-(-D + v^\mu v_\mu - \bar{\sigma}\sigma), \end{aligned} \quad (3.90)$$

und erhalten damit Bedingungen an die Komponentenfelder,

$$\begin{aligned}
 \bar{z}z &= 1, \\
 \bar{z}\psi_{\pm} &= \bar{\psi}_{\pm}z = 0, \\
 v_0 \pm v_1 &= -i\bar{z}\partial_{\pm}z + i\partial_{\pm}\bar{z}z - \bar{\psi}_{\pm}\psi_{\pm}, \\
 \sigma &= -\bar{\psi}_{+}\psi_{-}, \\
 \bar{z}F &= \bar{F}z = 0, \\
 \lambda_{\pm} &= \pm\partial_{\pm}\bar{\psi}_{\mp}z \mp \bar{\psi}_{\mp}\partial_{\pm}z - i\bar{F}\psi_{\pm}, \\
 -D + v^{\mu}v_{\mu} - \bar{\sigma}\sigma &= -\bar{z}\partial_{+}\partial_{-}z - \partial_{-}\partial_{+}\bar{z}z + \partial_{+}\bar{z}\partial_{-}z + \partial_{-}\bar{z}\partial_{+}z \\
 &\quad + i\bar{\psi}_{+}\partial_{-}\psi_{+} - i\partial_{-}\bar{\psi}_{+}\psi_{+} + i\bar{\psi}_{-}\partial_{+}\psi_{-} - i\partial_{+}\bar{\psi}_{-}\psi_{-} + \bar{F}F.
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Die Wirkung kann mit der Bewegungsgleichung in der einfachen Form

$$S = \int d^2x d^4\theta (\bar{\Phi}e^V\Phi - V) = - \int d^2x D \tag{3.92}$$

geschrieben werden. Für die Komponenten v^{μ} und σ des Vektorsuperfeldes gilt nach (3.91)

$$\begin{aligned}
 -v^{\mu}v_{\mu} &= -(v_0 + v_1)(v_0 - v_1) \\
 &= -(2i\bar{z}\partial_{+}z + \bar{\psi}_{+}\psi_{+})(2i\bar{z}\partial_{-}z + \bar{\psi}_{-}\psi_{-}) \\
 &= 4(\bar{z}\partial_{+}z)(\bar{z}\partial_{-}z) - 2i(\bar{z}\partial_{+}z)(\bar{\psi}_{-}\psi_{-}) - 2i(\bar{z}\partial_{-}z)(\bar{\psi}_{+}\psi_{+}) - (\bar{\psi}_{+}\psi_{+})(\bar{\psi}_{-}\psi_{-}), \\
 \bar{\sigma}\sigma &= (\bar{\psi}_{-}\psi_{+})(\bar{\psi}_{+}\psi_{-}).
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

Damit erhalten wir für die Wirkung

$$\begin{aligned}
 S &= - \int d^2x D \\
 &= \int d^2x \{ 4\partial_{+}\bar{z}\partial_{-}z + 2i\bar{\psi}_{+}\partial_{-}\psi_{+} + 2i\bar{\psi}_{-}\partial_{+}\psi_{-} + \bar{F}F + 4(\bar{z}\partial_{+}z)(\bar{z}\partial_{-}z) \\
 &\quad - 2i(\bar{z}\partial_{+}z)(\bar{\psi}_{-}\psi_{-}) - 2i(\bar{z}\partial_{-}z)(\bar{\psi}_{+}\psi_{+}) - (\bar{\psi}_{+}\psi_{+})(\bar{\psi}_{-}\psi_{-}) + (\bar{\psi}_{-}\psi_{+})(\bar{\psi}_{+}\psi_{-}) \},
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\bar{z}z = 1, \quad \bar{z}\psi_{\pm} = \bar{\psi}_{\pm}z = 0, \quad \bar{z}F = \bar{F}z = 0. \tag{3.95}$$

Wir gelangen zur on-shell-Formulierung, indem wir das äußere Feld F ausintegrieren. Die entsprechende Bewegungsgleichung ist einfach $F = 0$. Damit lautet die Wirkung

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^2x \{ 4\partial_{+}\bar{z}\partial_{-}z + 2i\bar{\psi}_{+}\partial_{-}\psi_{+} + 2i\bar{\psi}_{-}\partial_{+}\psi_{-} + 4(\bar{z}\partial_{+}z)(\bar{z}\partial_{-}z) \\
 &\quad - 2i(\bar{z}\partial_{+}z)(\bar{\psi}_{-}\psi_{-}) - 2i(\bar{z}\partial_{-}z)(\bar{\psi}_{+}\psi_{+}) - (\bar{\psi}_{+}\psi_{+})(\bar{\psi}_{-}\psi_{-}) + (\bar{\psi}_{-}\psi_{+})(\bar{\psi}_{+}\psi_{-}) \} \\
 &= \int d^2x \left\{ (D^{\mu}z)^{\dagger} (D_{\mu}z) + i\bar{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi + \frac{1}{4} \left[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_{*}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

mit

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - \bar{z}\partial_{\mu}z. \tag{3.97}$$

3 Supersymmetrische Sigma-Modelle in zwei Dimensionen

Die Felder unterliegen den Nebenbedingungen

$$\bar{z}z = 1, \quad \bar{z}\psi_{\pm} = \bar{\psi}_{\pm}z = 0. \quad (3.98)$$

Das Modell ist invariant unter den (2, 2)-Supersymmetrietransformationen (2.81)

$$\begin{aligned} \delta z &= \epsilon_+ \psi_- - \epsilon_- \psi_+, \\ \delta \psi_+ &= 2i\bar{\epsilon}_- D_+^z z - \bar{\epsilon}_- (\bar{\psi}_+ \psi_+) z + \bar{\epsilon}_+ (\bar{\psi}_- \psi_+) z, \\ \delta \psi_- &= -2i\bar{\epsilon}_+ D_-^z z + \bar{\epsilon}_+ (\bar{\psi}_- \psi_-) z - \bar{\epsilon}_- (\bar{\psi}_+ \psi_-) z, \end{aligned} \quad (3.99)$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_{\pm}^z = \partial_{\pm} - \bar{z}\partial_{\pm}z, \quad (3.100)$$

sowie unter den $U(1)$ -Eichtransformationen

$$\begin{aligned} z(x) &\mapsto e^{i\Lambda(x)} z(x), \\ \psi(x) &\mapsto e^{i\Lambda(x)} \psi(x), \end{aligned} \quad (3.101)$$

mit der reellen Funktion $\Lambda(x)$. Wie wir sehen, stimmen Wirkung und Nebenbedingungen genau mit unseren im (1, 1)-Superraumformalismus berechneten Ergebnissen (3.57) und (3.59) überein. Die (1, 1)-Supersymmetrietransformationen (3.60) ergeben sich gerade, wenn wir die Supersymmetrieparameter ϵ_{\pm} als rein imaginär annehmen und

$$\epsilon_{\pm} = -i\epsilon_{\pm}^1, \quad \bar{\epsilon}_{\pm} = i\epsilon_{\pm}^1, \quad (3.102)$$

identifizieren.

3.7 $\mathcal{N} = (2, 2)$ -supersymmetrisches \mathbb{CP}^N -Modell in euklidischer Raumzeit

Die Wirkung und die Nebenbedingungen des euklidischen \mathbb{CP}^N -Modells erhalten wir durch die formalen Ersetzungen $F \rightsquigarrow iF$ und $\bar{F} \rightsquigarrow i\bar{F}$ (vgl. Abschnitt 2.2.2). Die on-shell-Wirkung ist damit von der gleichen Form wie im Minkowski-Fall,

$$\begin{aligned} S &= \int d^2x \left\{ 4\partial_+ \bar{z}\partial_- z + 2i\bar{\psi}_+ \partial_- \psi_+ + 2i\bar{\psi}_- \partial_+ \psi_- + 4(\bar{z}\partial_+ z)(\bar{z}\partial_- z) \right. \\ &\quad \left. - 2i(\bar{z}\partial_+ z)(\bar{\psi}_- \psi_-) - 2i(\bar{z}\partial_- z)(\bar{\psi}_+ \psi_+) - (\bar{\psi}_+ \psi_+)(\bar{\psi}_- \psi_-) + (\bar{\psi}_- \psi_-)(\bar{\psi}_+ \psi_+) \right\} \\ &= \int d^2x \left\{ (D^{\mu}z)^{\dagger} (D_{\mu}z) + i\bar{\psi}\gamma^{\mu} D_{\mu}\psi + \frac{1}{4} \left[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_{*}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.103)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\bar{z}z = 1, \quad \bar{z}\psi_{\pm} = \bar{\psi}_{\pm}z = 0. \quad (3.104)$$

Das Modell ist invariant unter den euklidischen (2, 2)-Supersymmetrietransformationen

$$\begin{aligned} \delta z &= \epsilon_+ \psi_- - \epsilon_- \psi_+, \\ \delta \psi_+ &= -2i\bar{\epsilon}_- D_+^z z + \bar{\epsilon}_- (\bar{\psi}_+ \psi_+) z - \bar{\epsilon}_+ (\bar{\psi}_- \psi_+) z, \\ \delta \psi_- &= 2i\bar{\epsilon}_+ D_-^z z - \bar{\epsilon}_+ (\bar{\psi}_- \psi_-) z + \bar{\epsilon}_- (\bar{\psi}_+ \psi_-) z, \end{aligned} \quad (3.105)$$

wobei wir in den Supersymmetrietransformationen des Minkowski-Modells formal

$$\epsilon_{\pm} \rightsquigarrow \epsilon_{\pm}, \quad \bar{\epsilon}_{\pm} \rightsquigarrow -\bar{\epsilon}_{\pm}, \quad (3.106)$$

ersetzt haben (vgl. Abschnitt 2.2.4). Die euklidischen $(2, 2)$ -Supersymmetrietransformationen entsprechen den bereits im $(1, 1)$ -Superraumformalismus erhaltenen Transformationen (3.69), wenn wir

$$\epsilon_{\pm} = \pm i \epsilon_{\pm}^1, \quad \bar{\epsilon}_{\pm} = \pm i \bar{\epsilon}_{\pm}^1, \quad (3.107)$$

identifizieren, d. h. wenn die Supersymmetrieparameter $\bar{\epsilon}_{\pm} = \epsilon_{\pm}$ erfüllen.

4 Instantonlösungen des bosonischen $\mathbb{C}P^N$ -Modells

Instantonen wurden 1975 von Polyakov entdeckt, der zeigen konnte, wie diese für überraschende Effekte verantwortlich sind [Pol75, Pol77]. Die erste Instantonlösung der Yang-Mills-Gleichungen wurde von Belavin, Polyakov, Schwartz und Tyupkin gefunden [BPST75]. Wir wollen die Instantonlösungen unseres $\mathbb{C}P^N$ -Modells berechnen und insbesondere den Fall endlicher Temperaturen diskutieren. Dazu betrachten wir vorerst das rein bosonische Modell, d. h. wir lassen die Fermionen, die in unserem supersymmetrischen Modell auftraten, erst einmal außen vor. In Kapitel 5 nehmen wir dann schrittweise Fermionen hinzu und berechnen die Nullmoden des Dirac-Operators im Hintergrund der Instantonlösungen.

4.1 Das bosonische $\mathbb{C}P^N$ -Modell auf \mathbb{R}^2

4.1.1 Äquivalente Beschreibungen des Modells

Das rein bosonische $\mathbb{C}P^N$ -Modell in zwei Dimensionen wird durch $N + 1$ komplexe Skalarfelder

$$z(x) = \begin{pmatrix} z_0(x) \\ z_1(x) \\ \vdots \\ z_N(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N+1}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (4.1)$$

mit der Wirkung

$$S = \int d^2x \left\{ \partial_\mu z^\dagger \partial_\mu z + (z^\dagger \partial_\mu z)(z^\dagger \partial_\mu z) \right\} \quad (4.2)$$

und der Nebenbedingung

$$z^\dagger z = 1 \quad (4.3)$$

beschrieben [Eic78, GP78, ZM78]. Die Instantonlösungen dieses Modells wurden erstmals von D'Adda, Lüscher und Di Vecchia [DLDV78] sowie Witten [Wit79] berechnet. Das $\mathbb{C}P^N$ -Modell ist invariant unter lokalen $U(1)$ -Eichtransformationen,

$$z(x) \mapsto e^{i\Lambda(x)} z(x), \quad (4.4)$$

mit einer beliebigen reellen Funktion $\Lambda(x)$. Um diese Eichinvarianz direkt offensichtlich zu machen, führen wir das reelle Eichfeld A_μ ein und schreiben

$$S = \int d^2x (D_\mu z)^\dagger D_\mu z, \quad (4.5)$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu. \quad (4.6)$$

Diese Formulierung der Wirkung ist äquivalent zu (4.2), denn wir können (4.5) in der Form

$$S = \int d^2x \left\{ \partial_\mu z^\dagger \partial_\mu z + 2iA_\mu z^\dagger \partial_\mu z + A_\mu^2 \right\} \quad (4.7)$$

schreiben, welche keine Ableitungen von A_μ enthält. Damit kann A_μ mithilfe der Bewegungsgleichung aus der Wirkung eliminiert werden,

$$A_\mu = \frac{1}{2i} \left(z^\dagger \partial_\mu z - (\partial_\mu z^\dagger) z \right) = -iz^\dagger \partial_\mu z, \quad (4.8)$$

wobei wir die Nebenbedingung benutzt haben. Unter der Eichtransformation (4.4) transformiert A_μ wie ein abelsches Eichfeld,

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \quad (4.9)$$

Somit ist die Wirkung offensichtlich $U(1)$ -eichinvariant. Das Modell ist außerdem invariant unter globalen $SU(N+1)$ -Transformationen,

$$z \mapsto Uz \quad \text{mit} \quad U \in SU(N+1). \quad (4.10)$$

Deshalb spricht man manchmal auch vom $SU(N+1)$ -Sigma-Modell [Wit79]. Wegen der Nebenbedingung $z^\dagger z = 1$ lässt sich z in der Form

$$z_i(x) = \frac{w_i(x)}{|w(x)|}, \quad i = 0, \dots, N, \quad (4.11)$$

mit einer geeigneten Funktion w schreiben. w ist dadurch natürlich nicht eindeutig bestimmt: Wir können jede Komponente von w mit einer für alle x von null verschiedenen (aber für alle Komponenten gleichen) komplexen Funktion $\lambda(x)$ multiplizieren und erhalten ein äquivalentes $z(x)$: Der Betrag von λ kürzt sich in der Definition (4.11) direkt heraus, die Änderung der Phase von z entspricht einer Eichtransformation. Somit identifizieren wir für alle $x \in \mathbb{R}^2$

$$w_i(x) \sim \lambda(x)w_i(x), \quad \text{wobei} \quad \lambda(x) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (4.12)$$

Dadurch ist eine Äquivalenzrelation definiert. Die Transformation (4.11) ist dann eindeutig bis auf diese Identifikation. Die Äquivalenzklassen $[w(x)]$ sind Ursprungsgeraden im \mathbb{C}^{N+1} und wir können somit den Repräsentanten $w(x)$ für jedes x genauso gut direkt mit der entsprechenden Gerade identifizieren. Damit ist $w(x)$ ein Element im Raum der komplexen Ursprungsgeraden im \mathbb{C}^{N+1} . Dies ist der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^N$, welcher unserem Modell seinen Namen verleiht.

Eine weitere äquivalente Beschreibung erhält man in den eichinvarianten u -Koordinaten [Raj82]. Wegen $z^\dagger z = 1$ muss an jedem Punkt x ein $i = 0, \dots, N$ existieren, sodass $z_i(x) \neq 0$ ist. Betrachten wir das Gebiet $U_0 \in \mathbb{R}^2$, in dem, sagen wir, $z_0(x) \neq 0$ für alle $x \in U_0$ ist. In U_0 definieren wir

$$u_i(x) = \frac{z_i(x)}{z_0(x)}, \quad i = 0, \dots, N. \quad (4.13)$$

Da bei einer Eichtransformation im Zähler und im Nenner der gleiche Faktor auftritt, sind die u -Koordinaten eichinvariant. Entfernen wir uns vom Gebiet U_0 , so könnte z_0 verschwinden und unsere Definition für u wird sinnlos. Wegen $z^\dagger z = 1$ muss es aber ein angrenzendes

Gebiet U_1 geben, in dem eine andere Komponente, sagen wir z_1 , nichtverschwindend ist. Dort können wir dann definieren

$$u'_i(x) = \frac{z_i(x)}{z_1(x)}, \quad i = 0, \dots, N. \quad (4.14)$$

U_0 und U_1 überlappen dann in einem Gebiet, in dem weder z_0 noch z_1 verschwindet. Dort hängen dann u und u' über

$$u'(x) = u(x) \frac{z_0(x)}{z_1(x)} \quad (4.15)$$

zusammen. In diesem Sinne können wir u (bzw. u' , u'' , etc.) gebietsweise definieren, indem wir den \mathbb{R}^2 in jeweils überlappende Gebiete unterteilen und die Definition von einem zum anderen Gebiet analog (4.15) analytisch fortsetzen.

4.1.2 Die topologische Ladung

Die topologische Ladung ist durch

$$Q = \int d^2x q(x) = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \quad (4.16)$$

definiert¹. Als Integral über eine totale Divergenz ist sie invariant unter stetigen Felddeformationen. Der Integrand $q(x)$ heißt die topologische Ladungsdichte. Q muss auf dem klassischen Niveau ganzzahlig sein, wie folgende Überlegung zeigt: Damit die Wirkung (4.5) endlich ist, muss $D_\mu z$ für $|x| \rightarrow \infty$ verschwinden, d. h. z muss in eine reine Eichung übergehen,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} z_i(x) = c_i e^{i\Lambda(x)}, \quad i = 0, \dots, N, \quad (4.17)$$

mit der Konstanten c_i und einer beliebigen reellen Funktion $\Lambda(x)$. Q kann als Oberflächenintegral über den Kreis B_r mit dem Radius $r \rightarrow \infty$ und dem Normaleneinheitsvektor n_μ geschrieben werden,

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint_{B_r} ds n_\mu \varepsilon_{\mu\nu} A_\nu = \frac{1}{2\pi} \oint_{B_r} dx_\mu A_\mu = -\frac{i}{2\pi} \oint_{B_r} dx_\mu z^\dagger \partial_\mu z. \quad (4.18)$$

Wegen $c_i^\dagger c_i = 1$ erhalten wir für $r \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\pi} \oint dx_\mu \partial_\mu \Lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta \Lambda. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dabei gibt $\Delta \Lambda$ gerade die Änderung von $\Lambda(x)$ an, wenn man einmal entlang des Integrationskreises geht. Diese Änderung muss ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein,

$$\Delta \Lambda = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.20)$$

Die topologische Ladung ist damit ganzzahlig,

$$Q = k \in \mathbb{Z}. \quad (4.21)$$

¹ $\varepsilon_{\mu\nu}$ ist der total antisymmetrische Tensor mit $\varepsilon_{12} = 1$.

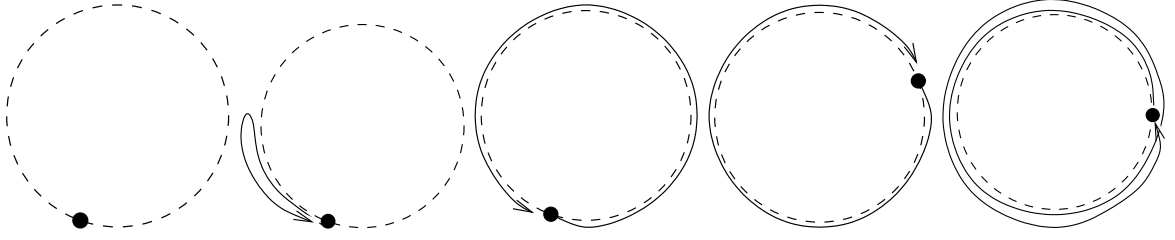


Abbildung 4.1: Veranschaulichung der Windungszahl für Abbildungen von S^1 nach S^1 [Bru07]. Von links nach rechts ist die Windungszahl für die ersten beiden Abbildungen null (konstante Abbildung und Deformation davon), für die anderen Abbildungen 1, -1 und 2.

Wenn man Quantenkorrekturen betrachtet, gilt dies allerdings i. Allg. nicht mehr [Wit79].

Betrachten wir die Funktion $e^{i\Lambda}$ nur auf dem Integrationskreis B_r , so erhalten wir eine Funktion von S^1 nach S^1 . Beim Entlanggehen der Kurve $e^{i\Lambda}(S^1)$ umrunden wir den Wertebereich S^1 k -mal, wobei wir Umrundungen gegen den Uhrzeigersinn (d. h. im mathematisch positiven Sinne) positiv zählen und Umrundungen im Uhrzeigersinn davon abziehen wollen. k heißt dann Windungszahl oder Grad der Abbildung $e^{i\Lambda}$,

$$k = \deg(e^{i\Lambda}) \in \mathbb{Z}. \quad (4.22)$$

Damit haben wir eine anschauliche Bedeutung der topologischen Ladung Q : Sie entspricht gerade der Windungszahl der Abbildung $e^{i\Lambda}$,

$$Q = \deg(e^{i\Lambda}), \quad \text{wobei } e^{i\Lambda} : S^1 \rightarrow S^1. \quad (4.23)$$

In Abbildung 4.1 ist dies veranschaulicht.

4.1.3 Bogomolny-Schranke und Selbstdualitätsgleichungen

Betrachten wir die topologische Dichte $q(x)$ etwas genauer. Sie kann mithilfe unseres Feldes z ausgedrückt werden durch

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu (z^\dagger \partial_\nu z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu z^\dagger \partial_\nu z \\ &= \frac{1}{2\pi i} \varepsilon_{\mu\nu} (\partial_\mu + iA_\mu) z^\dagger (\partial_\nu - iA_\nu) z \\ &= \frac{1}{2\pi i} \varepsilon_{\mu\nu} (D_\mu z)^\dagger (D_\nu z). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nun gilt

$$0 \leq (D_\mu z \pm i\varepsilon_{\mu\nu} D_\nu z)^\dagger (D_\mu z \pm i\varepsilon_{\mu\rho} D_\rho z) = 2\mathcal{L} \pm 2i\varepsilon_{\mu\nu} (D_\mu z)^\dagger (D_\nu z), \quad (4.25)$$

und damit

$$\mathcal{L} \geq \mp i\varepsilon_{\mu\nu} (D_\mu z)^\dagger (D_\nu z) = \pm 2\pi q. \quad (4.26)$$

Nach Integration über den \mathbb{R}^2 erhalten wir somit eine untere Schranke für die Wirkung, die Bogomolny-Schranke,

$$S \geq \pm 2\pi Q. \quad (4.27)$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn das Feld $z(x)$ die Selbstdualitätsgleichungen oder Bogomolny-Gleichungen

$$D_\mu z = \mp i \varepsilon_{\mu\nu} D_\nu z \quad (4.28)$$

erfüllt. Diese sind offensichtlich Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Lösungen heißen im Falle des oberen Vorzeichens Instantonen und im Falle des unteren Vorzeichens Anti-Instantonen. Wegen $S \geq 0$ gilt dann

$$Q \in \begin{cases} \mathbb{N}_0 & \text{für Instantonen,} \\ -\mathbb{N} & \text{für Anti-Instantonen.} \end{cases} \quad (4.29)$$

Da sie die Wirkung in einem Sektor mit definierter topologischer Ladung Q minimieren, sind (Anti-)Instantonen automatisch Lösungen der Bewegungsgleichung

$$D_\mu D_\mu z + \left((D_\mu z)^\dagger (D_\mu z) \right) z = 0, \quad \text{mit} \quad z^\dagger z = 1. \quad (4.30)$$

Um Lösungen der Bewegungsgleichung zu finden, können wir also erst einmal nach Lösungen der Selbstdualitätsgleichungen suchen. Allerdings finden wir dadurch i. Allg. nicht alle Lösungen. In der Tat existieren im $\mathbb{C}P^N$ -Modell mit $N > 1$ Lösungen der Bewegungsgleichung, die weder Instantonen noch Anti-Instantonen sind². Wie Din et. al. [DZ80] gezeigt haben, sind solche Nicht-Instantonlösungen instabil gegen kleine Fluktuationen, d. h. an dieser Stelle liegt ein Sattelpunkt der Wirkung vor. Abbildung 4.2 veranschaulicht schematisch diesen Sachverhalt.

4.1.4 Instantonlösungen des $\mathbb{C}P^N$ -Modells

Die Selbstdualitätsgleichungen lassen sich im $\mathbb{C}P^N$ -Modell eindeutig lösen. Dazu beschreiben wir die Felder in den u -Koordinaten. Da die Selbstdualitätsgleichungen lokal sind, können wir sie in einem beliebigen Gebiet, sagen wir U_0 , lösen. In diesem Gebiet lautet die Definition für u

$$u_i = \frac{z_i}{z_0}, \quad z_0 \neq 0, \quad i = 0, \dots, N. \quad (4.31)$$

Damit sind die Selbstdualitätsgleichungen

$$D_\mu (u z_0) = \mp i \varepsilon_{\mu\nu} D_\nu (u z_0), \quad (4.32)$$

bzw.

$$u D_\mu z_0 + z_0 \partial_\mu u = \mp i \varepsilon_{\mu\nu} (u D_\nu z_0 + z_0 \partial_\nu u). \quad (4.33)$$

Die jeweils ersten Terme auf der linken und rechten Seite sind gleich, da z_0 die Selbstdualitätsgleichungen erfüllt. Mit $z_0 \neq 0$ ergeben sich somit die linearen Selbstdualitätsgleichungen [Raj82]

$$\partial_\mu u = \mp i \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu u \quad \Leftrightarrow \quad (\partial_1 \pm i \partial_2) u = 0. \quad (4.34)$$

²Eine Ausnahme bildet der Fall $N = 1$. Für dieses Modell zeigte Woo [Woo77], dass alle klassischen Lösungen Instantonen oder Anti-Instantonen sind.

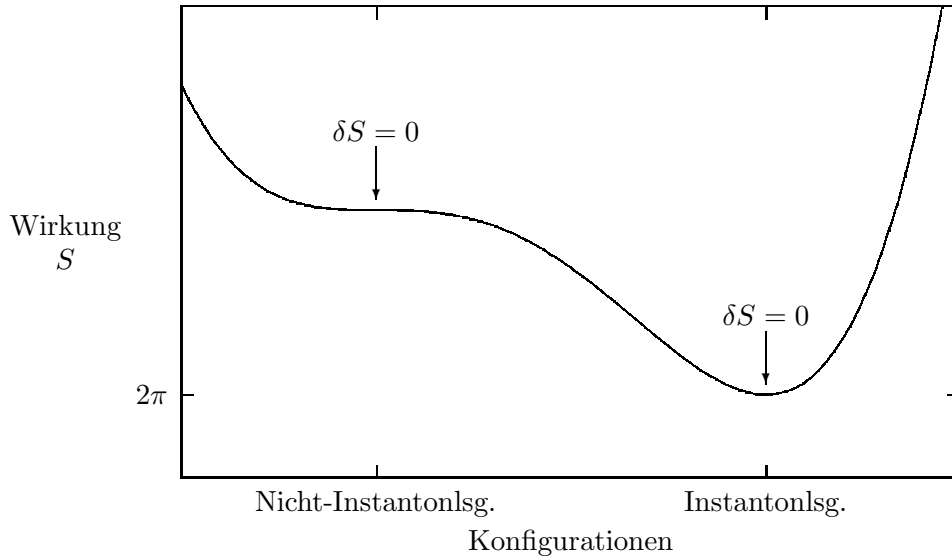


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung der Wirkung im ($Q = 1$)-Sektor des Konfigurationsraumes für das $\mathbb{C}P^N$ -Modell mit $N > 1$. Bei der Instantonkonfiguration nimmt die Wirkung ein absolutes Minimum in diesem Sektor an, $S = 2\pi$. Die Nicht-Instantonlösung löst die Bewegungsgleichung $\delta S = 0$, jedoch nicht die Selbstdualitätsgleichungen. Die Wirkung hat an dieser Stelle einen Sattelpunkt.

Definieren wir die komplexen Variablen $x_{\pm} := x_1 \pm ix_2$ und verstehen wir u als Funktion dieser Variablen, so sind die Selbstdualitätsgleichungen gerade die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen bezüglich dieser Variablen. Lösungen der Selbstdualitätsgleichungen für u sind also meromorphe Funktionen³ der komplexen Koordinate x_+ (für Instantonlösungen) bzw. x_- (für Anti-Instantonlösungen),

$$\begin{aligned} \partial_- u = 0 &\Rightarrow u = u(x_+) && \text{für Instantonlösungen,} \\ \partial_+ u = 0 &\Rightarrow u = u(x_-) && \text{für Anti-Instantonlösungen,} \end{aligned} \quad (4.35)$$

wobei

$$\partial_{\pm} := \frac{1}{2}(\partial_1 \mp i\partial_2). \quad (4.36)$$

In den w -Koordinaten haben die Instantonlösungen die Form

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ u_1(x_+) \\ \vdots \\ u_N(x_+) \end{pmatrix} w_0. \quad (4.37)$$

³Unter einer meromorphen Funktion verstehen wir eine bis auf isolierte Pole holomorphe Funktion. Eine meromorphe Funktion kann stets als Quotient zweier holomorpher Funktionen geschrieben werden.

Da wir $w \sim \lambda w$ identifizieren, ist dies äquivalent zu

$$w = \begin{pmatrix} f(x_+) \\ u_1(x_+)f(x_+) \\ \vdots \\ u_N(x_+)f(x_+) \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

mit einer beliebigen holomorphen Funktion $f(x_+)$. Eine Instantonlösung ist also durch meromorphe w -Felder bezüglich der Koordinate $x_+ = x_1 + ix_2$ gegeben,

$$D_\mu z = -i\varepsilon_{\mu\nu} D_\nu z \quad \Leftrightarrow \quad z(x) = \frac{w(x_+)}{|w(x_+)|}. \quad (4.39)$$

Anti-Instantonen sind mit dem gleichen Argument durch meromorphe w -Felder bezüglich x_- gegeben. Im Folgenden wollen wir die Instantonlösungen weiter untersuchen⁴. Dazu genügt es, für w Polynome in x_+ zu betrachten [DZ80],

$$w_i(x_+) = a_i^0 + a_i^1 x_+ + a_i^2 x_+^2 + \cdots + a_i^{k_i} x_+^{k_i}, \quad i = 0, \dots, N. \quad (4.40)$$

Um die topologische Ladung dieser Lösung zu berechnen, betrachten wir das Feld z im Limes $|x_+| \rightarrow \infty$. Sei k das Maximum aller k_i ,

$$k = \max_{0 \leq i \leq N} \{k_i\}, \quad (4.41)$$

wobei k_i der Grad des Polynoms w_i ist. Dann gilt im Limes $|x_+| \rightarrow \infty$ für alle i mit $k_i < k$

$$z_i = \frac{w_i}{|w|} \rightarrow 0, \quad (4.42)$$

und für alle i mit $k_i = k$

$$z_i = \frac{w_i}{|w|} \rightarrow \frac{a_i^k}{|a_i^k|} \left(\frac{x_+}{|x_+|} \right)^k = c_i e^{ik \arg(x_+)}. \quad (4.43)$$

Vergleichen wir mit (4.17), so lesen wir ab

$$\Lambda = k \arg(x_+). \quad (4.44)$$

Die topologische Ladung Q hängt nach (4.19) über

$$Q = \frac{1}{2\pi} \Delta \Lambda \quad (4.45)$$

mit Λ zusammen, wobei $\Delta \Lambda$ die Änderung von Λ beim einmaligen Entlanggehen des Kreises B_r mit dem Radius $r \rightarrow \infty$ in der komplexen x_+ -Ebene ist. Dabei ändert sich $\arg(x_+)$ um 2π und damit gilt

$$Q = k. \quad (4.46)$$

Die topologische Ladung unseres Instantons ist also gleich dem maximalen Grad der Polynome $w_i(x_+)$. Eine Instantonlösung mit topologischer Ladung Q wird demnach durch

⁴Für Anti-Instantonen ergeben sich jeweils analoge Ergebnisse durch Ersetzung von x_+ durch x_- .

die $(Q + 1)(N + 1)$ komplexen Parameter a_i^0, \dots, a_i^k mit $i = 0, \dots, N$ beschrieben. Verschiedene dieser Parameter führen jedoch nicht zwingend auf inäquivalente Felder, da wir $w(x) \sim \lambda w(x)$ identifizieren⁵. Die minimale Anzahl komplexer Parameter, die eine Äquivalenzklasse von Feldern eindeutig festlegt, ist somit $(Q + 1)(N + 1) - 1$. Die dazugehörigen Parameter heißen Moduli-Parameter. Alle Parameterkonfigurationen, die zu inäquivalenten Feldern führen, bilden zusammen den Moduli-Raum \mathcal{M} . Die komplexe Dimension von \mathcal{M} ist gleich der Anzahl unabhängiger komplexer Parameter und damit

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = (Q + 1)(N + 1) - 1. \quad (4.47)$$

Die allgemeine 1-Instantonlösung (d. h. die Instantonlösung mit $Q = 1$) ist linear in x_+ und hat die Form

$$w_i(x) = b_i^0 + b_i^1(x_1 + ix_2), \quad i = 0, \dots, N, \quad (4.48)$$

mit den komplexen Parametern b_i^0 und b_i^1 . In Übereinstimmung mit der allgemeinen Formel sind nur $2N + 1$ davon Moduli-Parameter, da $w \in \mathbb{CP}^N$ ist. Die Lösung kann auch noch etwas anschaulicher geschrieben werden: Dazu zerlegen wir den Vektor b^0 in einen zu b^1 senkrechten und einen parallelen Anteil⁶,

$$\begin{aligned} w &= b^0 + b^1 x_+ \\ &\sim \frac{b^0}{|b^1|} + \underbrace{\frac{b^1}{|b^1|}}_{=: v} x_+ \\ &= \underbrace{\frac{b^0}{|b^1|} - \frac{v^\dagger b^0}{|b^1|} v}_{=: \lambda u} + \underbrace{\frac{v^\dagger b^0}{|b^1|}}_{=: -a_1 - ia_2} v + x_+ v \\ &= \lambda u + [(x_1 - a_1) + i(x_2 - a_2)] v, \end{aligned} \quad (4.49)$$

mit

$$\lambda > 0, \quad |u|^2 = |v|^2 = 1, \quad u^\dagger v = 0. \quad (4.50)$$

Das Feld z kann so in der Form

$$z(x) = \frac{\lambda u + [(x_1 - a_1) + i(x_2 - a_2)] v}{[\lambda^2 + (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2]^{1/2}} \quad (4.51)$$

geschrieben werden. Nun können wir unseren Parametern eine anschauliche Bedeutung geben: a_μ ist die Position des Instantons und kann beliebig im Raum verschoben werden. a_μ und x_μ werden in Einheiten von $\lambda > 0$ gemessen. Die beiden zueinander senkrecht stehenden Einheitsvektoren u und v charakterisieren die Orientierung des Instantons. Für $x \rightarrow \infty$ gilt

$$z(x) = \frac{x_1 + ix_2}{|x|} v + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) = e^{i\Lambda(x_+)} v + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad (4.52)$$

mit $\Lambda(x_+) = \arg(x_+)$. Die Windungszahl von $e^{i\Lambda}$ ist damit wie erwartet gleich 1. Das Vakuum weitab der Instantonposition wird demnach durch v beschrieben. Wegen der Eichfreiheit

⁵Wir wollen uns auf konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ beschränken, damit w weiterhin ein Polynom vom Grade $k = Q$ ist.

⁶Senkrecht und parallel beziehen sich auf das Skalarprodukt im \mathbb{C}^{N+1} : $\langle x, y \rangle := x^\dagger y$.

und der Nebenbedingung $|v| = 1$ entspricht dies $2N$ unabhängigen reellen Parametern. Die verbleibenden $2(N + 1)$ reellen Parameter a_μ , λ und u_i können dann als unabhängige Freiheitsgrade relativ zum asymptotischen Vakuum interpretiert werden [DLDV78].

Das Eichfeld A_μ und die topologische Dichte q lassen sich für Instantonlösungen mithilfe der w -Felder noch einfacher darstellen. Mithilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen,

$$\partial_\mu w = -i\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu w, \quad (4.53)$$

ergibt sich für das Eichfeld

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{1}{2i} \left[z^\dagger \partial_\mu z - (\partial_\mu z^\dagger) z \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{w^\dagger}{|w|} \partial_\mu \left(\frac{w}{|w|} \right) - \partial_\mu \left(\frac{w^\dagger}{|w|} \right) \frac{w}{|w|} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \frac{w^\dagger \partial_\mu w - (\partial_\mu w^\dagger) w}{|w|^2} \\ &= -\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{2|w|^2} \left[w^\dagger \partial_\nu w + (\partial_\nu w^\dagger) w \right] \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial_\nu |w|^2}{|w|^2} \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \ln |w|^2. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Für die topologische Dichte von Instantonlösungen erhalten wir somit

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \\ &= \frac{1}{4\pi} \partial_\mu^2 \ln |w|^2. \end{aligned} \quad (4.55)$$

4.2 Instantonen auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times S^1$

Wir wollen die Instantonlösungen des \mathbb{CP}^N -Modells bei endlichen Temperaturen diskutieren⁷. Dazu schränken wir die x_2 -Richtung unserer Raumzeit auf ein endliches Intervall $[0, \beta]$ mit periodischen Randbedingungen ein, d. h. wir identifizieren

$$x_2 \sim x_2 + \beta \quad \Leftrightarrow \quad x_+ \sim x_+ + i\beta. \quad (4.56)$$

Wir betrachten das Modell also auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times S_\beta^1$, wobei die Periode $\beta > 0$ gerade die inverse Temperatur ist,

$$\beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (4.57)$$

mit der endlichen Temperatur $T > 0$ und der Boltzmann-Konstanten $k_B = 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$. Instantonlösungen bei endlichen Temperaturen werden auch Calorons⁸ genannt. Damit sie die Selbstdualitätsgleichungen

$$D_\mu z = -i\varepsilon_{\mu\nu} D_\nu z \quad (4.58)$$

⁷Zur Erläuterung des Begriffs einer Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen siehe Anhang C.

⁸Der Begriff des Calorons ist aus dem Englischen übernommen. Er lässt sich zurückführen auf den lateinischen Begriff für Wärme, *calor*.

erfüllen, haben sie analog zum Fall $T = 0$ die Form

$$z_i(x_1, x_2) = \frac{w_i(x_+)}{|w(x_+)|}, \quad x_+ = x_1 + ix_2, \quad i = 0, \dots, N. \quad (4.59)$$

Entsprechendes gilt für Anti-Instantonen, wenn man x_+ durch x_- ersetzt.

4.2.1 Instantonlösungen mit periodischen Randbedingungen

Wir wollen fordern, dass die topologische Dichte q periodisch in x_2 ist,

$$q(x_1, x_2 + \beta) = q(x_1, x_2). \quad (4.60)$$

Üblicherweise wird dies durch periodische Instantonlösungen $w(x_+)$ implementiert. $w_i(x_+)$ muss dann eine Funktion von $e^{2\pi x_+/\beta}$ sein. Analog zum Fall $T = 0$ können wir uns auf Polynome in $e^{2\pi x_+/\beta}$ beschränken. Solche periodischen Lösungen und die damit zusammenhängenden Effekte wurden bereits von Lazarides [Laz79], Affleck [Aff80a, Aff80b, Aff80c] sowie Gava, Jengo und Omero [GJO80, GJO82] diskutiert. Die allgemeine k -Instanton-Lösung ist durch

$$w(x) = b^0 + b^1 e^{2\pi x_+/\beta} + b^2 e^{4\pi x_+/\beta} + \dots + b^k e^{2\pi k x_+/\beta}, \quad b^j \in \mathbb{C}^{N+1}, \quad j = 0, \dots, k, \quad (4.61)$$

gegeben. Für $b^0, b^k \neq 0$ hat sie in der Tat die topologische Ladung $Q = k$, denn unter Verwendung von (4.54) erhalten wir

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\beta dx_2 [A_2(x_1, x_2)]_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty} - \int_{-\infty}^\infty dx_1 [A_1(x_1, x_2)]_{x_2=0}^{x_2=\beta} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\beta dx_2 \left[\frac{\partial_1 |w|^2}{|w|^2} \right]_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\beta dx_2 \left(\frac{4\pi k}{\beta} - 0 \right) \\ &= k. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Die Dimension des Moduli-Raumes \mathcal{M} für die Instantonlösung mit der topologischen Ladung Q ist demnach für endliche Temperaturen $T > 0$ genauso groß wie für $T = 0$,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = (Q + 1)(N + 1) - 1. \quad (4.63)$$

Die allgemeine 1-Instanton-Lösung kann auch in der anschaulichen Form

$$\begin{aligned} w &= b^0 + b^1 e^{2\pi x_+/\beta} \\ &= b^0 + b^1 \underbrace{\frac{b^{1\dagger} b^0}{|b^{1\dagger} b^0|} \frac{|b^0|}{|b^1|}}_{=: e^{2\pi a_+/\beta}} e^{2\pi(x_+ - a_+)/\beta} \\ &\sim \underbrace{\frac{b^0}{|b^0|}}_{=: u} + \underbrace{\frac{b^1}{|b^1|} \frac{b^{1\dagger} b^0}{|b^{1\dagger} b^0|}}_{=: v} e^{2\pi(x_+ - a_+)/\beta} \\ &= u + v e^{2\pi[(x_1 - a_1) + i(x_2 - a_2)]/\beta}, \quad a_+ = a_1 + ia_2, \end{aligned} \quad (4.64)$$

mit

$$|u|^2 = |v|^2 = 1, \quad \text{Im}(u^\dagger v) = 0, \quad (4.65)$$

analog zu Gleichung (4.49) geschrieben werden. Der dort auftretende Maßstab λ ist hier verschwunden, da die Multiplikation von v mit einer Konstanten äquivalent zu einer Änderung von a_+ ist. Dafür darf nun $\text{Re}(u^\dagger v)$ ungleich null sein. Der einzige nichtkompakte Parameter ist damit die Instanton-Position a_μ , die beliebig innerhalb der Raumzeit verschoben werden kann. In Übereinstimmung mit der allgemeinen Formel wird die 1-Instanton-Lösung demnach wie bei $T = 0$ durch $2N + 1$ Parameter beschrieben [Aff80c]. Die topologische Dichte $q(x)$ hängt nur von dem Betragsquadrat $|w|^2$ ab. Für die allgemeine 1-Instantonlösung ist

$$|w|^2 = e^{4\pi(x_1 - a_1)/\beta} + 2u^\dagger v e^{2\pi(x_1 - a_1)/\beta} \cos[2\pi(x_2 - a_2)/\beta] + 1. \quad (4.66)$$

Die topologische Dichte ist damit allein durch die drei reellen Parameter $u^\dagger v$, a_1 und a_2 eindeutig bestimmt. Im Folgenden wollen wir die spezielle Orientierung des Instantons

$$v_i = \delta_{i0}, \quad i = 0, \dots, N \quad \Rightarrow \quad u_0 \in \mathbb{R}, \quad (4.67)$$

wählen. Die Instantonlösung ist dann

$$\begin{aligned} w_0 &= u_0 + e^{2\pi(x_+ - a_+)/\beta}, \\ w_k &= u_k, \end{aligned} \quad (4.68)$$

mit $k = 1, \dots, N$, und wir erhalten für das Betragsquadrat unserer speziellen 1-Instantonlösung

$$|w|^2 = e^{4\pi(x_1 - a_1)/\beta} + 2u_0 e^{2\pi(x_1 - a_1)/\beta} \cos[2\pi(x_2 - a_2)/\beta] + 1. \quad (4.69)$$

Vergleichen wir dies mit dem Betragsquadrat für die allgemeine Lösung (4.66), so sehen wir, dass trotz unserer Spezialisierung jede beliebige topologische Dichte $q(x)$ generiert wird. Dies ist nicht verwunderlich, denn wir können eine beliebige Instantonlösung w immer mit einer unitären Matrix U transformieren,

$$w' = U w \quad \text{mit} \quad U \in U(N + 1), \quad (4.70)$$

sodass die transformierte Lösung unsere spezielle Orientierung hat,

$$w'_i = u'_i + v'_i e^{2\pi[(x_1 - a_1) + i(x_2 - a_2)]/\beta} \quad \text{mit} \quad v'_i = \delta_{i0}. \quad (4.71)$$

Die topologische Dichte ist darunter invariant,

$$|w'|^2 = |w|^2 \quad \Rightarrow \quad q' = q. \quad (4.72)$$

Für die Diskussion von $q(x)$ genügt es also, nur diese speziellen Lösungen zu betrachten. Unter der Annahme $u_0 \neq 0$ können wir auch äquivalent formulieren⁹

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 + \lambda_{N+1} e^{2\pi x_+/\beta}, \\ w_k &= \lambda_k, \end{aligned} \quad (4.73)$$

mit $k = 1, \dots, N$ und den neuen Parametern $\lambda_k := u_k/u_0$, $\lambda_{N+1} := e^{-2\pi a_+/\beta}/u_0$. Diese sind frei wählbar und i. Allg. komplex. Um unsere Diskussion möglichst übersichtlich zu gestalten, wollen wir jedoch annehmen, dass sie reell sind. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da unsere Ergebnisse in dieser Hinsicht leicht verallgemeinert werden können.

⁹Falls $u_0 = 0$ ist, so existiert mindestens ein anderes von null verschiedenes u_i , in dessen Richtung wir v drehen können und durch welches wir dann teilen können.

4.2.2 Instantonen mit getwisteten Randbedingungen

Da für Instantonen das Eichfeld $A_\mu(x)$ und somit auch die topologische Dichte $q(x)$ nur von $|w|^2$ abhängt, können wir erlauben, dass w_i lediglich periodisch bis auf eine Phase $e^{2\pi i \omega_i}$ mit $\omega_i \in (0, 1)$ ist¹⁰. Die topologische Dichte bleibt dann periodisch. Eine solche getwistete Instanton-Lösung mit Ladung 1 ist

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 + \lambda_{N+1} e^{2\pi x_+/\beta}, \\ w_k &= \lambda_k e^{2\pi \omega_k x_+/\beta}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

mit $k = 1, \dots, N$. Es ist nicht notwendig, für w_0 einen Twist einzuführen, da dieser durch die Twists in den w_k 's absorbiert werden kann. Dies sieht man insbesondere in den u -Koordinaten, z. B. in dem Gebiet U_0 mit $w_0 \neq 0$,

$$u_k = \frac{z_k}{z_0} = \frac{w_k}{w_0} = \frac{\lambda_k e^{2\pi \omega_k x_+/\beta}}{1 + \lambda_{N+1} e^{2\pi x_+/\beta}}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.75)$$

Wir wollen bestätigen, dass es sich wirklich um eine Lösung mit $Q = 1$ handelt. Dazu berechnen wir

$$|w|^2 = \lambda_{N+1}^2 e^{4\pi x_1/\beta} + 2\lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) + \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 e^{4\pi \omega_k x_1/\beta} + 1. \quad (4.76)$$

Mit

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \frac{\partial_1 |w|^2}{|w|^2} &= 0, \\ \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{\partial_1 |w|^2}{|w|^2} &= \frac{4\pi}{\beta}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

gilt wie in (4.62)

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\beta dx_2 \left[\frac{\partial_1 |w|^2}{|w|^2} \right]_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Im zum \mathbb{CP}^1 -Modell äquivalenten $O(3)$ -Modell wurde diese Lösung erstmals von Bruckmann [Bru08] untersucht.

Wir können auch getwistete Instantonlösungen für beliebige Ladungen $Q = k \in \mathbb{N}$ angeben. Dazu drehen wir unsere ungetwistete allgemeine Lösung (4.61) wieder mit einer unitären Matrix derart, dass der Koeffizient von $e^{2\pi k x_+/\beta}$ in 0-Richtung des Farbraumes liegt und twisten die anderen Komponenten w_i , $i = 1, \dots, N$, durch Multiplikation mit $e^{2\pi \omega_i x_+/\beta}$. Die allgemeine getwistete Instantonlösung mit der topologischen Ladung $Q = k$ ist dann

$$w(x_+) = \begin{pmatrix} b_0^0 + b_0^1 e^{2\pi x_+/\beta} + \dots + b_0^{k-1} e^{2\pi(k-1)x_+/\beta} + b_0^k e^{2\pi k x_+/\beta} \\ b_1^0 e^{2\pi \omega_1 x_+/\beta} + b_1^1 e^{2\pi(1+\omega_1)x_+/\beta} + \dots + b_1^{k-1} e^{2\pi(k-1+\omega_1)x_+/\beta} \\ \vdots \\ b_N^0 e^{2\pi \omega_N x_+/\beta} + b_N^1 e^{2\pi(1+\omega_N)x_+/\beta} + \dots + b_N^{k-1} e^{2\pi(k-1+\omega_N)x_+/\beta} \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

¹⁰Man spricht gewöhnlich von getwisteten Randbedingungen, da man eine Drehung der Phase von w_i zulässt.

4.2.3 1-Instantonkonstituenten im $\mathbb{C}P^1$ -Modell

Wir wollen die explizite Form der topologischen Dichte $q(x)$ untersuchen. Dazu betrachten wir zunächst den Fall $N = 1$, sodass wir unsere Ergebnisse mit denen von Bruckmann [Bru08] vergleichen können. Das Betragsquadrat unserer getwisteten Lösung (4.74) ist in diesem Fall

$$|w|^2 = \lambda_2^2 e^{4\pi x_1/\beta} + 2\lambda_2 e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) + \lambda_1^2 e^{4\pi\omega_1 x_1/\beta} + 1. \quad (4.80)$$

Die topologische Dichte ist

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{4\pi} \partial_\mu^2 \ln |w|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{|w|^2 \partial_\mu^2 |w|^2 - (\partial_\mu |w|^2)^2}{|w|^4} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{|w|^2 (\partial_1^2 |w|^2 + \partial_2^2 |w|^2) - (\partial_1 |w|^2)^2 - (\partial_2 |w|^2)^2}{|w|^4}. \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst $\ln |w|^2$. Dies hat die Form

$$\ln |w|^2 = \ln \left(\sum_{k=0}^2 e^{p_k(x_1)} + 2 e^{\tilde{p}(x_1)} \cos(2\pi x_2/\beta) \right) \quad (4.81)$$

mit

$$\begin{aligned} p_0(x_1) &= 0, \\ p_1(x_1) &= 4\pi\omega_1 x_1/\beta + 2 \ln \lambda_1, \\ p_2(x_1) &= 4\pi x_1/\beta + 2 \ln \lambda_2, \\ \tilde{p}(x_1) &= 2\pi x_1/\beta + \ln \lambda_2. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Falls nun der Exponent $\tilde{p}(x_1)$ stets wesentlich kleiner als mindestens einer der Exponenten $p_k(x_1)$ ist, so kann \tilde{p} in der Summe in (4.81) vernachlässigt werden¹¹. An einer beliebigen Stelle x_1 wird dann der wesentliche Beitrag zu $\ln |w(x)|^2$ vom größten $p_k(x_1)$ geliefert, d. h. eine gute Näherung an dieser Stelle ist

$$\ln |w(x_1, x_2)|^2 \simeq \max_k \{p_k(x_1)\}. \quad (4.83)$$

Diese Näherung ist auch gültig, wenn wir Ableitungen von $\ln |w|^2$ betrachten, da die Ableitungen der einzelnen Summanden in (4.81) bis auf Vorfaktoren gleich den jeweiligen Summanden selber sind. $\ln |w|^2$ ist dann in x_1 -Richtung stückweise linear und in x_2 -Richtung konstant. Die Näherung gilt allerdings natürlich nicht mehr an Stellen, an denen das zweitgrößte p_k in der gleichen Größenordnung wie das größte p_k ist, also insbesondere an deren Schnittstellen. Dies ist in Abbildung 4.3 veranschaulicht. Seien $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ die Schnittstellen zwischen p_0 und p_1 bzw. zwischen p_1 und p_2 ,

$$a^{(1)} = -\beta \frac{\ln \lambda_1}{2\pi\omega_1}, \quad a^{(2)} = -\beta \frac{\ln(\lambda_2/\lambda_1)}{2\pi(1-\omega_1)}. \quad (4.84)$$

¹¹Da es sich bei \tilde{p} und den p_k 's um logarithmische Größen handelt, sagen wir, $p_k(x_1)$ sei wesentlich größer als $\tilde{p}(x_1)$, wenn lediglich $e^{p_k(x_1)} \gg e^{\tilde{p}(x_1)}$ gilt.

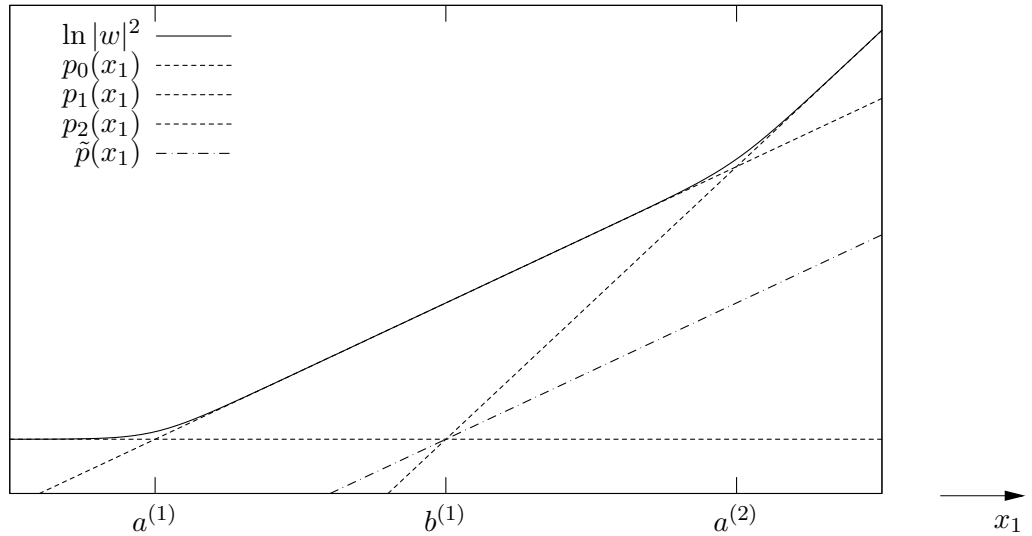


Abbildung 4.3: Logarithmus von $|w|^2$ mit den Exponenten p_k und \tilde{p} nach Gleichung (4.81), aufgetragen über x_1 . Die Anstiege m der Geraden p_k sind geordnet, $m(p_0) < m(p_1) < m(p_2)$. Die Geraden p_0 , p_2 und \tilde{p} schneiden sich in genau einem Punkt. Dies ist der einzig mögliche Punkt, an dem der \tilde{p} -Term beitragen könnte. In diesem Beispiel tut er dies nicht, da der Schnittpunkt hier unterhalb p_1 liegt. Damit gilt näherungsweise $\ln |w(x)|^2 \simeq \max_k \{p_k(x_1)\}$. Die Näherung ist allerdings nicht mehr gültig an Stellen, an denen größtes und zweitgrößtes $p_k(x_1)$ in der gleichen Größenordnung liegen, hier in der Umgebung der Schnittstellen $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$.

Für $\lambda_1 \gg \lambda_2^{\omega_1}$ liegt der Schnittpunkt $a^{(1)}$ bei sehr viel kleineren x_1 als der Schnittpunkt $a^{(2)}$. Der von x_2 abhängige Term $\lambda_2 e^{2\pi x_1} \cos(2\pi x_2/\beta)$ in (4.80) ist dann sehr klein gegen die Summe der anderen Terme, denn für $x_1 \leq a^{(1)}$ ist in diesem Fall

$$\lambda_2 e^{2\pi x_1} \leq \lambda_2 e^{-\ln \lambda_1/\omega_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1^{1/\omega_1}} \ll 1, \quad (4.85)$$

für $a^{(1)} \leq x_1 \leq a^{(2)}$ ist

$$\frac{\lambda_2 e^{2\pi x_1}}{\lambda_1^2 e^{4\pi \omega_1 x_1}} = e^{2\pi(1-2\omega_1)x_1 + \ln \lambda_2 - 2\ln \lambda_1} \leq \begin{cases} (\lambda_2^{\omega_1}/\lambda_1)^{1-\omega_1} \ll 1, & \text{falls } \omega_1 \leq \frac{1}{2}, \\ \lambda_2/\lambda_1^{1/\omega_1} \ll 1, & \text{falls } \omega_1 \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (4.86)$$

und für $a^{(2)} \leq x_1$ ist

$$\frac{\lambda_2 e^{2\pi x_1}}{\lambda_2^2 e^{4\pi x_1}} = e^{2\pi x_1 - \ln \lambda_2} = (\lambda_2^{\omega_1}/\lambda_1)^{1-\omega_1} \ll 1. \quad (4.87)$$

Die topologische Dichte $q(x)$ ist dann statisch, d. h. nicht mehr von der euklidischen Zeit x_2 abhängig, da

$$\partial_2 |w|^2 \ll \partial_1 |w|^2, \quad \partial_2^2 |w|^2 \ll \partial_1^2 |w|^2, \quad (4.88)$$

und damit

$$q \simeq \frac{1}{4\pi} \frac{|w|^2 \partial_1^2 |w|^2 - (\partial_1 |w|^2)^2}{|w|^4} = \frac{1}{4\pi} \partial_1^2 \ln |w|^2, \quad (4.89)$$

mit

$$|w|^2 \simeq \lambda_2^2 e^{4\pi x_1/\beta} + \lambda_1^2 e^{4\pi \omega_1 x_1/\beta} + 1. \quad (4.90)$$

Wir können dies auch anhand von Abbildung 4.3 verstehen: Die drei Geraden p_0 , \tilde{p} und p_2 schneiden sich alle in dem einem Punkt $(b^{(1)}, 0)$. Der zeitabhängige \tilde{p} -Term kann damit höchstens in der Umgebung dieses Schnittpunktes zur Summe in (4.81) beitragen, da für $x_1 < b^{(1)}$ der Term $e^{p_0(x_1)}$ wesentlich größer ist und für $x_1 > b^{(1)}$ der Term $e^{p_2(x_1)}$ dies tut. Falls nun aber der Schnittpunkt $a^{(1)}$ zwischen p_0 und p_1 wie in der Abbildung links vom Schnittpunkt $a^{(2)}$ zwischen p_1 und p_2 liegt, so ist $p_1(b^{(1)}) > \tilde{p}(b^{(1)})$. Der zeitabhängige Term trägt dann nicht bei, d. h. $|w|^2$ und damit auch die topologische Dichte $q(x)$ werden statisch.

Wir haben bereits diskutiert, dass $\ln |w|^2$ in x_1 -Richtung stückweise linear ist. Deshalb erwarten wir, dass die topologische Dichte $q(x)$ für $a^{(1)} < a^{(2)}$ nur in der Nähe von $a^{(1)}$ und von $a^{(2)}$ wesentlich von null verschieden ist, d. h. in zwei Konstituenten aufspaltet, die bei $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ lokalisiert sind. Um dies zu sehen, nähern wir $|w|^2$ für $x_1 \simeq a^{(1)}$ bzw. $x_1 \simeq a^{(2)}$. Für

$$x_1 = -\beta \frac{\ln \lambda_1}{2\pi \omega_1} + \delta x_1 \quad \text{mit} \quad \delta x_1 \ll a^{(2)} - a^{(1)} = \beta \frac{\ln \lambda_1 - \omega_1 \ln \lambda_2}{2\pi(1-\omega_1)\omega_1} \quad (4.91)$$

gilt für das Betragsquadrat unserer Lösung

$$\begin{aligned} |w|^2 &\simeq e^{2\ln \lambda_2 - 2\ln \lambda_1/\omega_1 + 4\pi \delta x_1/\beta} + e^{4\pi \omega_1 \delta x_1/\beta} + 1 \\ &\simeq e^{4\pi \omega_1 \delta x_1/\beta} + 1. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Wir erhalten damit ein exponentiell lokalisiertes Profil der topologischen Dichte,

$$\begin{aligned} q_{\text{const}}(x) &\simeq \frac{4\pi}{\beta^2} \frac{\omega_1^2 e^{4\pi \omega_1 \delta x_1/\beta}}{(e^{4\pi \omega_1 \delta x_1/\beta} + 1)^2} \\ &= \frac{\pi \omega_1^2}{\beta^2 \cosh^2\left(\frac{2\pi}{\beta} \omega_1 \delta x_1\right)}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Für

$$x_1 = -\beta \frac{\ln(\lambda_2/\lambda_1)}{2\pi(1-\omega_1)} + \delta x_1 \quad \text{mit} \quad \delta x_1 \gg -\left(a^{(2)} - a^{(1)}\right) = \beta \frac{\ln \lambda_1 - \omega_1 \ln \lambda_2}{2\pi(1-\omega_1)\omega_1} \quad (4.94)$$

erhalten wir analog

$$\begin{aligned} |w|^2 &\simeq e^{2\ln \lambda_2 - 2\ln(\lambda_2/\lambda_1)/(1-\omega_1) + 4\pi\delta x_1/\beta} + e^{2\ln \lambda_1 - 2\ln(\lambda_2/\lambda_1)\frac{\omega_1}{1-\omega_1} + 4\pi\omega_1\delta x_1/\beta} + 1 \\ &\sim e^{4\pi\delta x_1/\beta} + e^{4\pi\omega_1\delta x_1/\beta} + e^{-2(\ln \lambda_1 - \omega_1 \ln \lambda_2)/(1-\omega_1)} \\ &\simeq e^{4\pi\delta x_1/\beta} + e^{4\pi\omega_1\delta x_1/\beta}, \end{aligned} \quad (4.95)$$

wobei wir im vorletzten Schritt ausgenutzt haben, dass wir das Produkt von w mit einem von null verschiedenen Faktor mit w selbst identifizieren wollen. Damit ergibt sich ebenso

$$q_{\text{const}}(x) \simeq \frac{\pi(1-\omega_1)^2}{\beta^2 \cosh^2\left(\frac{2\pi}{\beta}(1-\omega_1)\delta x_1\right)}. \quad (4.96)$$

Die topologische Dichte $q(x)$ ist damit für beliebige $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times S_\beta^1$ in der Näherung $\lambda_1 \gg \lambda_2^{\omega_1}$

$$q(x) \simeq \frac{\pi\omega_1^2}{\beta^2 \cosh^2\left[\frac{2\pi}{\beta}\omega_1\left(x_1 + \beta\frac{\ln \lambda_1}{2\pi\omega_1}\right)\right]} + \frac{\pi(1-\omega_1)^2}{\beta^2 \cosh^2\left[\frac{2\pi}{\beta}(1-\omega_1)\left(x_1 + \beta\frac{\ln(\lambda_2/\lambda_1)}{2\pi(1-\omega_1)}\right)\right]}. \quad (4.97)$$

Wie erwartet, spaltet sie in zwei Konstituenten auf, die mit ω_1 und $1-\omega_1$ zur Gesamtladung $Q = 1$ beitragen. Dies entspricht den Ergebnissen, die Bruckmann im $O(3)$ -Modell erhalten hat [Bru08]. Die exakte topologische Dichte ist für verschiedene λ -Parameter und verschiedene Twists ω_1 in Abbildung 4.4 dargestellt.

4.2.4 1-Instantonkonstituenten im \mathbb{CP}^N -Modell

Wir wollen unsere Ergebnisse auf \mathbb{CP}^N -Modelle mit $N > 1$ verallgemeinern und insbesondere das Auftreten der Instantonkonstituenten untersuchen. Betrachten wir dazu unsere 1-Instanton-Lösung w mit

$$|w|^2 = \lambda_{N+1} e^{4\pi x_1/\beta} + 2\lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) + \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} + 1. \quad (4.98)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Twists ω_k geordnet sind¹²,

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N < 1. \quad (4.99)$$

Wir führen

$$\lambda_0 := 1, \quad \omega_0 := 0, \quad \omega_{N+1} := 1, \quad (4.100)$$

ein und können damit schreiben

$$|w|^2 = \sum_{k=0}^{N+1} \lambda_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} + 2\lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta). \quad (4.101)$$

¹²Falls dies nicht von vornherein bereits der Fall ist, können wir die Komponenten von w einfach umordnen.

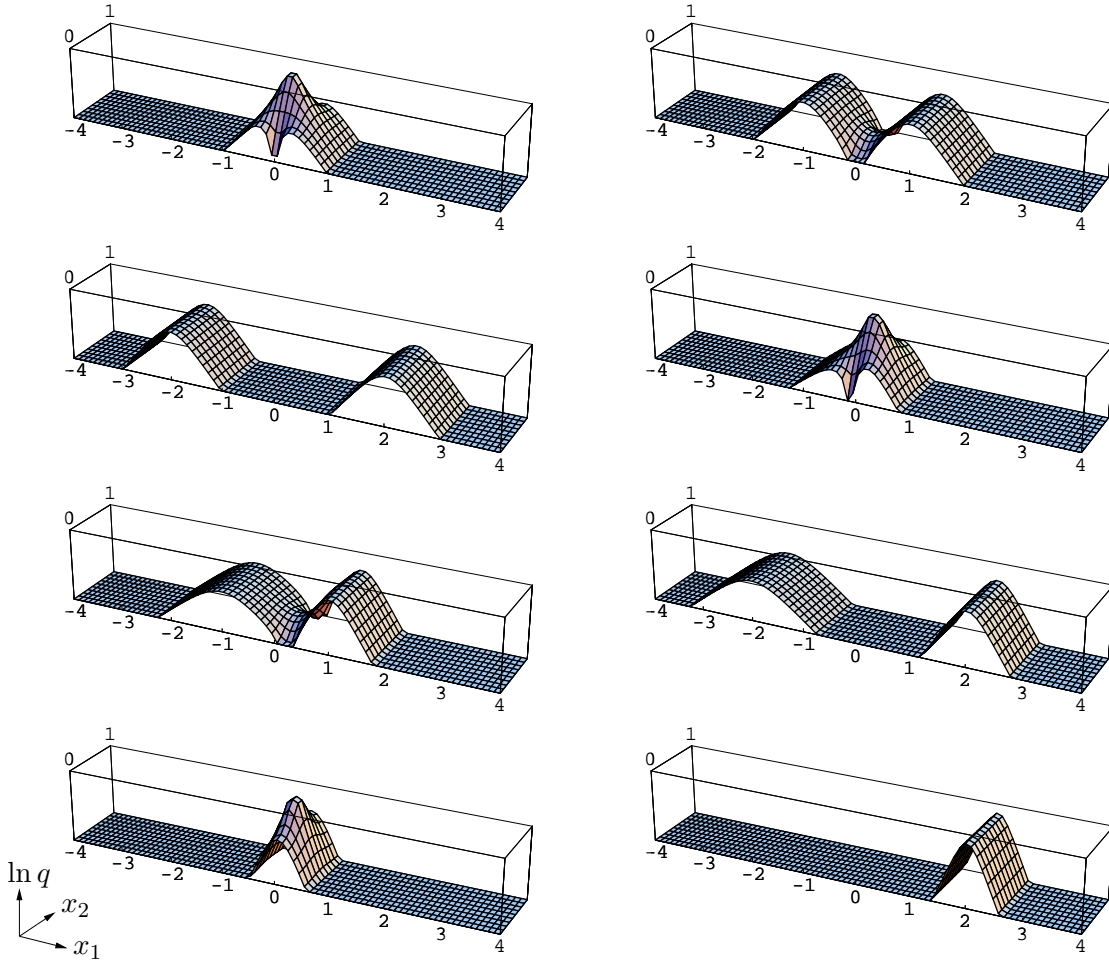


Abbildung 4.4: Logarithmus der exakten topologischen Dichte für die 1-Instantonlösung des \mathbb{CP}^1 -Modells, aufgetragen über (x_1, x_2) in Einheiten von β . Von oben nach unten und von links nach rechts mit $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1), (e^\pi, 1), (e^{2\pi}, 1), (1, 1), (e^{2\pi/3}, e^{-2\pi/3}), (e^{4\pi/3}, e^{-4\pi/3})$, in den ersten drei Abbildungen mit Twist $\omega_1 = 1/2$ (symmetrische Konstituenten) sowie in der vierten, fünften und sechsten Abbildung mit $\omega_1 = 1/3$. In der letzten Zeile ist zum Vergleich die topologische Dichte der periodischen Lösung aufgetragen, welche nicht in Konstituenten aufspaltet, mit $\omega_1 = 0, (\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1), (e^{4\pi}, 1)$.

Mit

$$\begin{aligned}\partial_1|w|^2 &= \sum_{k=0}^{N+1} \frac{4\pi}{\beta} \omega_k \lambda_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} + \frac{4\pi}{\beta} \lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta), \\ \partial_2|w|^2 &= -\frac{4\pi}{\beta} \lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \sin(2\pi x_2/\beta),\end{aligned}\tag{4.102}$$

gilt

$$\begin{aligned}(\partial_\mu|w|^2)^2 &= \frac{(4\pi)^2}{\beta^2} \left[\left(\sum_{k=0}^{N+1} \omega_k \lambda_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} \right)^2 + \lambda_{N+1}^2 e^{4\pi x_1/\beta} \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) \sum_{k=0}^{N+1} \omega_k \lambda_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} \right],\end{aligned}\tag{4.103}$$

und

$$\begin{aligned}(\partial_\mu^2|w|^2)|w|^2 &= \left(\sum_{k=0}^{N+1} \lambda_k^2 \left(\frac{4\pi\omega_k}{\beta} \right)^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{l=0}^{N+1} \lambda_l^2 e^{4\pi\omega_l x_1/\beta} + 2\lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) \right) \\ &= \left(\frac{4\pi}{\beta} \right)^2 \left[\sum_{l,k=0}^{N+1} \omega_k^2 \lambda_k^2 \lambda_l^2 e^{4\pi(\omega_k+\omega_l)x_1/\beta} \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) \sum_{k=0}^{N+1} \omega_k^2 \lambda_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} \right].\end{aligned}\tag{4.104}$$

Damit erhalten wir eine allgemeine, exakte Formel für die topologische Dichte der 1-Instantonlösung,

$$\begin{aligned}q(x_1, x_2) &= \frac{|w|^2 \partial_\mu^2 |w|^2 - (\partial_\mu |w|^2)^2}{4\pi |w|^4} \\ &= \frac{4\pi}{\beta^2 |w|^4} \left[\sum_{k<l}^{N+1} \lambda_k^2 \lambda_l^2 (\omega_k - \omega_l)^2 e^{4\pi(\omega_k+\omega_l)x_1/\beta} - \lambda_{N+1}^2 e^{4\pi x_1/\beta} \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) \sum_{k=0}^{N+1} \lambda_k^2 \omega_k (1 - \omega_k) e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} \right].\end{aligned}\tag{4.105}$$

Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen die topologische Dichte statisch wird. Dazu kürzen wir ab,

$$|w|^2 = \sum_{k=0}^{N+1} e^{p_k(x_1)} + 2 e^{\tilde{p}(x_1)} \cos(2\pi x_2/\beta),\tag{4.106}$$

mit

$$\begin{aligned}p_k(x_1) &:= 4\pi\omega_k x_1/\beta + 2 \ln \lambda_k, \\ \tilde{p}(x_1) &:= 2\pi x_1/\beta + \ln \lambda_{N+1}.\end{aligned}\tag{4.107}$$

Als lineare Funktionen in x_1 können die Exponenten p_k und \tilde{p} als Geraden interpretiert werden. Der Schnittpunkt zwischen p_{N+1} und \tilde{p} liegt auf der x_1 -Achse,

$$\tilde{p}(-\beta \ln \lambda_{N+1}/(2\pi)) = 0 = p_{N+1}(-\beta \ln \lambda_{N+1}/(2\pi)). \quad (4.108)$$

Zeitabhängigkeit von $\ln |w|^2$ (und damit auch der topologischen Dichte) kann also höchstens in der Umgebung dieser Schnittstelle auftreten, da für kleinere x_1 die Gerade p_0 wesentlich über \tilde{p} liegt und für größere x_1 die Gerade p_{N+1} dies tut. Wir erhalten Zeitabhängigkeit also genau dann, wenn alle anderen Geraden p_1, \dots, p_N an dieser Stelle kleiner oder ungefähr gleich null sind. Für kleinere x_1 ist in diesem Fall dann p_0 stets größer als alle diese anderen Exponenten, für größere x_1 ist dies p_{N+1} . Analog zur Diskussion in Abschnitt 4.2.3 (vergleiche Abbildung 4.3) ist $\ln |w|^2$ in x_1 -Richtung stückweise linear, außer an Stellen, an denen größtes und zweitgrößtes p_k in der gleichen Größenordnung liegen. Wir erwarten demnach, dass die topologische Dichte $q \propto \partial_\mu^2 \ln |w|^2$ in Konstituenten aufspaltet, die an diesen Stellen lokalisiert sind. Zeitabhängigkeit der topologischen Dichte tritt nur dann auf, wenn alle Konstituenten zum vollen Instanton zusammengesetzt werden.

Da die Anstiege m der Geraden p_k geordnet sind,

$$m(p_{k-1}) = \frac{4\pi}{\beta} \omega_{k-1} < \frac{4\pi}{\beta} \omega_k = m(p_k), \quad (4.109)$$

erhalten wir die maximale Anzahl an Konstituenten genau dann, wenn

$$a^{(1)} \ll a^{(2)} \ll \dots \ll a^{(N+1)} \quad (4.110)$$

ist¹³, wobei $a^{(k)}$ die Schnittstelle zwischen den Geraden p_{k-1} und p_k ist,

$$a^{(k)} = -\frac{\beta \ln(\lambda_k/\lambda_{k-1})}{2\pi(\omega_k - \omega_{k-1})}, \quad k = 1, \dots, N+1. \quad (4.111)$$

Wir erwarten damit also maximal $N+1$ Konstituenten, die an den Schnittstellen $a^{(k)}$ lokalisiert sind. Dies ist schematisch in Abbildung 4.5 verdeutlicht. Die Positionen der Konstituenten können dabei beliebig vorgegeben werden. Die entsprechenden λ -Parameter ergeben sich nämlich gerade über

$$\ln \lambda_k = -\frac{2\pi}{\beta} \sum_{j=1}^k (\omega_j - \omega_{j-1}) a^{(j)} \quad (4.112)$$

aus $a^{(k)}$ und ω_k .

Wir wollen die explizite Form der Konstituenten diskutieren. Für wohlseparierte Konstituenten ist

$$|w|^2 \simeq \sum_{k=0}^{N+1} \lambda_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta}. \quad (4.113)$$

Betrachten wir $|w|^2$ in der Umgebung einer Schnittstelle $a^{(l)}$, bei der sich die Geraden p_{l-1} und p_l schneiden. In diesem Bereich tragen dann nur p_{l-1} und p_l bei,

$$|w|^2 \simeq \lambda_{l-1}^2 e^{4\pi\omega_{l-1}x_1/\beta} + \lambda_l^2 e^{4\pi\omega_l x_1/\beta}, \quad \text{falls} \quad \frac{1}{2} \left(a^{(l-1)} + a^{(l)} \right) \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \left(a^{(l)} + a^{(l+1)} \right). \quad (4.114)$$

¹³Dabei wollen wir die Bedingung $a^{(k-1)} \ll a^{(k)}$ nicht allzu wortwörtlich nehmen: Es genügt, wenn $a^{(k-1)}$ nicht mehr in der Nähe von $a^{(k)}$ ist, wobei der notwendige Abstand durch die Anstiege von $p_k - p_{k-1}$ und von $p_{k-1} - p_{k-2}$ bestimmt wird.

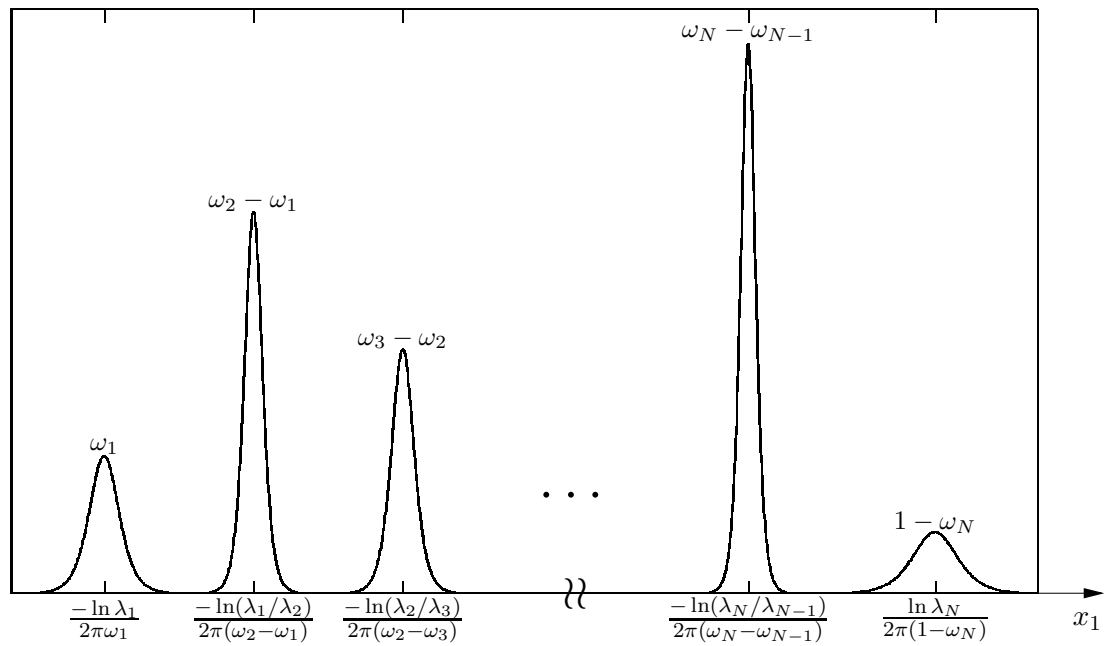


Abbildung 4.5: Schematische Darstellung der topologischen Dichte q über x_1 für die 1-Instantonlösung des $\mathbb{C}P^N$ -Modells mit getwisteten Randbedingungen. Bei geeigneter Wahl der Parameter hängt q nicht mehr von x_2 ab und es treten genau $N + 1$ Konstituenten auf. Sie tragen die Ladung $\omega_k - \omega_{k-1}$.

Für $l = 0$ ($l = N + 1$) verstehen wir dabei unter der linken (rechten) Begrenzung des x_1 -Intervalls $-\infty$ ($+\infty$). In der Umgebung von $a^{(l)}$ ist dann

$$\begin{aligned} |w(x)|^2 &\simeq \lambda_{l-1}^2 e^{4\pi\omega_{l-1}x_1/\beta} + \lambda_l^2 e^{4\pi\omega_l x_1/\beta} \\ &= e^{\frac{4\pi}{\beta}\omega_{l-1}(x_1-a^{(l)})+p_{l-1}(a^{(l)})} + e^{\frac{4\pi}{\beta}\omega_l(x_1-a^{(l)})+p_l(a^{(l)})} \\ &\sim e^{\frac{4\pi}{\beta}\omega_{l-1}(x_1-a^{(l)})} + e^{\frac{4\pi}{\beta}\omega_l(x_1-a^{(l)})}, \end{aligned} \quad (4.115)$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass w in \mathbb{CP}^N liegt. Wir erhalten damit einen bei $a^{(l)}$ exponentiell lokalisierten Konstituenten der topologischen Dichte,

$$\begin{aligned} q_{\text{const}}(x) &= \frac{1}{4\pi} \partial_\mu^2 \ln |w|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{|w|^2 \partial_1^2 |w|^2 - (\partial_1 |w|^2)^2}{|w|^4} \\ &\simeq \frac{4\pi (\omega_{l-1}^2 + \omega_l^2 - 2\omega_{l-1}\omega_l) e^{4\pi(\omega_{l-1}+\omega_l)(x_1-a^{(l)})/\beta}}{\beta^2 \left(e^{4\pi\omega_{l-1}(x_1-a^{(l)})/\beta} + e^{4\pi\omega_l(x_1-a^{(l)})/\beta} \right)^2} \\ &= \frac{\pi(\omega_l - \omega_{l-1})^2}{\beta^2 \cosh^2 \left[\frac{2\pi}{\beta}(\omega_l - \omega_{l-1})(x_1 - a^{(l)}) \right]}, \end{aligned} \quad (4.116)$$

der mit $Q_{\text{const}} = \omega_l - \omega_{l-1}$ zur topologischen Ladung beiträgt, denn mit $|w|^2$ aus (4.115) gilt

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \frac{\partial_1 |w|^2}{|w|^2} &= 0 \\ \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{\partial_1 |w|^2}{|w|^2} &= \frac{4\pi}{\beta}(\omega_l - \omega_{l-1}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_{\text{const}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\beta dx_2 \left[\frac{\partial_1 |w|^2}{|w|^2} \right]_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty} = \omega_l - \omega_{l-1}. \quad (4.117)$$

Da wir diese Näherung für alle $l = 1, \dots, N + 1$ machen können, erhalten wir damit für beliebige $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times S_\beta^1$ die topologische Dichte

$$q(x_1, x_2) \simeq \sum_{k=1}^{N+1} \frac{\pi(\omega_k - \omega_{k-1})^2}{\beta^2 \cosh^2 \left[\frac{2\pi}{\beta}(\omega_k - \omega_{k-1})(x_1 - a^{(k)}) \right]}, \quad (4.118)$$

in der Näherung

$$a^{(1)} \ll a^{(2)} \ll \dots \ll a^{(N+1)} \quad \text{mit} \quad a^{(k)} = -\beta \frac{\ln(\lambda_k/\lambda_{k-1})}{\omega_k - \omega_{k-1}}, \quad (4.119)$$

wobei wir angenommen haben, dass die Twists geordnet sind,

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N < 1. \quad (4.120)$$

Die topologische Dichte spaltet also wie erwartet in maximal $N + 1$ Konstituenten auf, wobei der k -te Konstituent bei $a^{(k)}$ exponentiell lokalisiert ist und die Ladung $\omega_k - \omega_{k-1}$ trägt. Beispiele für verschiedene Parameterkombinationen sind in Abbildung 4.6 anhand des \mathbb{CP}^2 -Modells dargestellt.

4 Instantonlösungen des bosonischen $\mathbb{C}P^N$ -Modells

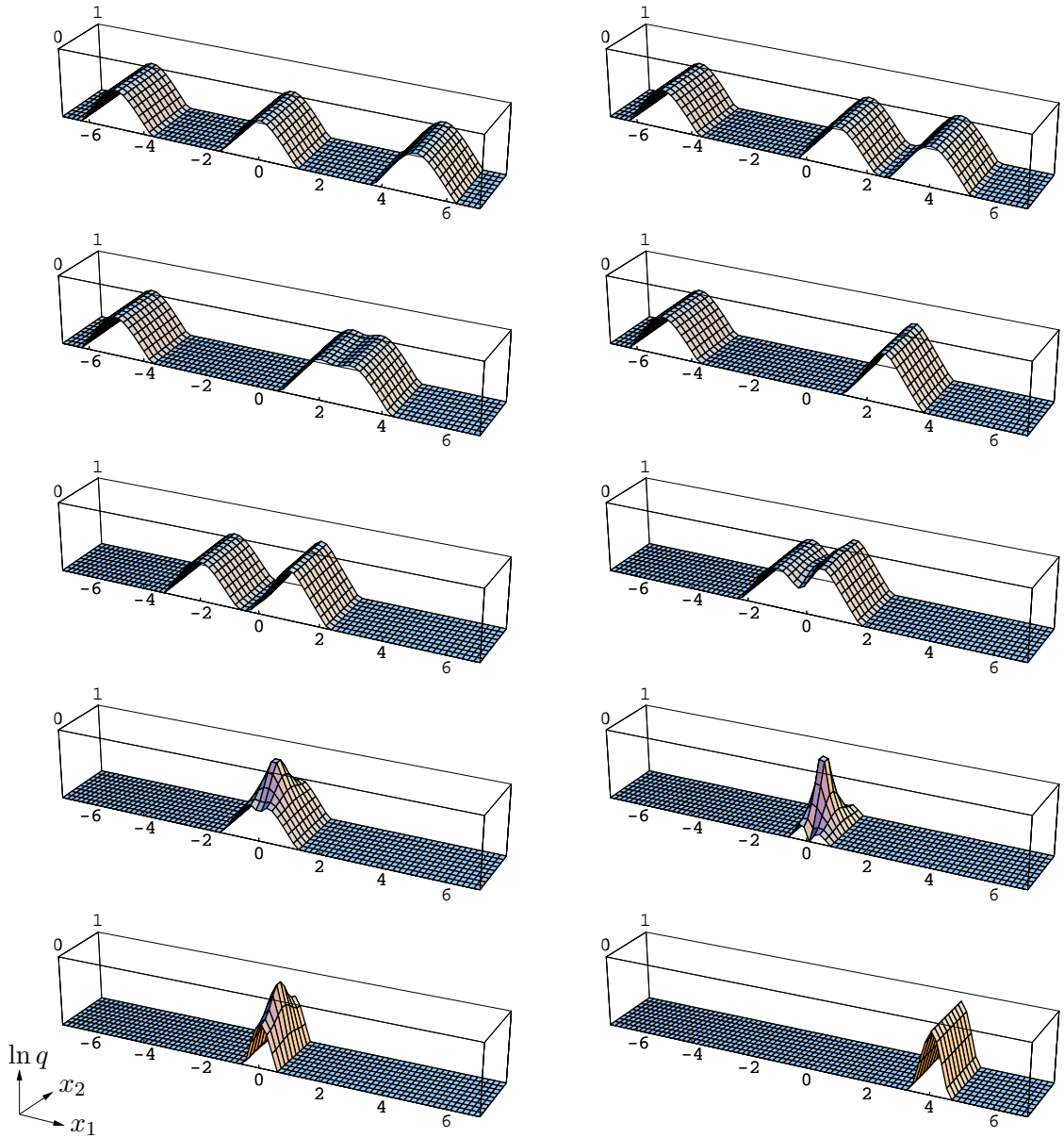


Abbildung 4.6: Logarithmus der exakten topologischen Dichte für die 1-Instantonlösung des $\mathbb{C}P^2$ -Modells mit symmetrischen Konstituenten, $\omega_1 = 1/3$, $\omega_2 = 2/3$, aufgetragen über (x_1, x_2) in Einheiten von β . Die λ -Parameter sind nach Gl. (4.112) derart gewählt, dass die Konstituenten von oben nach unten von links nach rechts bei $(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) = (-5, 0, 5)$, $(-5, 1, 4)$, $(-5, 2, 3)$, $(-5, 2.5, 2.5)$, $(-2, 1, 1)$, $(-1, 0.5, 0.5)$, $(0, 0, 0)$, $(1, -0.5, -0.5)$ lokalisiert sind. Für $a^{(2)} \simeq a^{(3)}$ fügen sich der zweite und dritte Konstituent zu einem gemeinsamen Konstituenten mit der Ladung $2/3$ zusammen. Erst wenn alle Konstituenten zum vollen Instanton zusammengesetzt werden, wird die topologische Dichte zeitabhängig. Insbesondere ist das dann der Fall, wenn $a^{(1)}$ größer als $a^{(2)}$ und $a^{(3)}$ ist. In der letzten Zeile ist zum Vergleich die topologische Dichte im periodischen Fall $\omega_1 = \omega_2 = 0$ mit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, 1)$, $(e^{8\pi}, 0, 1)$ aufgetragen.

4.2.5 2-Instantonkonstituenten im $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ -Modell

Wir wollen auch Instantonen mit höheren topologischen Ladungen diskutieren und untersuchen dazu insbesondere Lösungen mit Ladung $Q = 2$. Die allgemeine 2-Instantonlösung mit periodischen Randbedingungen ist

$$w = b^0 + b^1 e^{2\pi x_+/\beta} + b^2 e^{4\pi x_+/\beta}, \quad (4.121)$$

mit den komplexen $(N + 1)$ -Vektoren

$$b^0, b^1, b^2 \in \mathbb{C}^{N+1}. \quad (4.122)$$

Die Lösung kann auch in der vielleicht etwas anschaulicheren Form

$$\begin{aligned} w &= b^0 + \underbrace{\left(b^1 - \frac{b^{2\dagger} b^1}{|b^2|^2} b^2 \right)}_{=: d^1} e^{2\pi x_+/\beta} + \underbrace{\frac{b^{2\dagger} b^1}{|b^2|^2}}_{=: e^{2\pi(-a_+^2 + 2a_+^1)/\beta}} e^{2\pi x_+/\beta} + b^2 e^{4\pi x_+/\beta}, \\ &\sim \underbrace{\frac{b^0}{|b^0|}}_{=: u} + \underbrace{\frac{d^{1\dagger} b^0}{|d^{1\dagger} b^0|} \frac{d^1}{|d^1|}}_{=: v^1} e^{2\pi(x_+ - b_+)/\beta} + \underbrace{\frac{b^{2\dagger} b^0}{|b^{2\dagger} b^0|} \frac{b^2}{|b^2|}}_{=: v^2} \left(e^{4\pi(x_+ - a_+^1)/\beta} + e^{2\pi(x_+ - a_+^2)/\beta} \right) \\ &= u + v^1 e^{2\pi(x_+ - b_+)/\beta} + v^2 \left(e^{4\pi(x_+ - a_+^1)/\beta} + e^{2\pi(x_+ - a_+^2)/\beta} \right), \end{aligned} \quad (4.123)$$

mit

$$\begin{aligned} u^\dagger u &= 1, \\ (v^i)^\dagger v^j &= \delta^{ij}, \quad i, j = 1, 2, \\ \text{Im}(u^\dagger v^j) &= 0, \end{aligned} \quad (4.124)$$

geschrieben werden. Die 2-Instantonlösung wird also entsprechend unserer allgemeinen Formel durch $3N + 2$ komplexe Parameter beschrieben. Mithilfe der unitären Matrix $U \in U(N + 1)$ können wir die Orientierung von w derart drehen, dass

$$v_k^2 = \delta_{0k}, \quad k = 0, \dots, N \quad \Rightarrow \quad v_0^1 = 0, \quad u_0 \in \mathbb{R}. \quad (4.125)$$

Die topologische Dichte ist unter dieser Transformation invariant. Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u_0 \neq 0$ an¹⁴ und führen die neuen Parameter

$$\begin{aligned} \lambda_k &:= \frac{u_k}{u_0}, \\ \lambda_{N+1} &:= \frac{1}{u_0} e^{-2\pi a_+^2/\beta}, \\ \lambda_{N+1+k} &:= \frac{v_k^1}{u_0} e^{-2\pi b_+/\beta}, \\ \lambda_{2N+2} &:= \frac{1}{u_0} e^{-2\pi a_+^1/\beta}, \end{aligned} \quad (4.126)$$

¹⁴Ansonsten drehen wir v^2 in eine Richtung, in welcher u nicht verschwindet.

4 Instantonlösungen des bosonischen $\mathbb{C}P^N$ -Modells

mit $k = 1, \dots, N$ ein, so können wir äquivalent formulieren

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 + \lambda_{N+1} e^{2\pi x_+/\beta} + \lambda_{2N+2} e^{4\pi x_+/\beta}, \\ w_k &= \lambda_k + \lambda_{N+1+k} e^{2\pi x_+/\beta}. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Wie im 1-Instanton-Fall schränkt die spezielle Orientierung unserer Instantonlösung die topologische Dichte nicht ein. Um die Rechnungen übersichtlich zu halten, wollen wir wieder die λ -Parameter reell wählen. In den Ergebnissen ist diese Vereinfachung leicht wieder rückgängig machbar. Analog zum 1-Instanton-Fall lassen wir getwistete Randbedingungen zu, sodass w_k nur periodisch bis auf eine Phase $e^{2\pi i w_k}$ mit $\omega_k \in (0, 1)$ ist. Ein möglicher Twist von w_0 kann wieder durch die Twists in den w_k 's absorbiert werden. Die getwistete 2-Instantonlösung ist damit

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 + \lambda_{N+1} e^{2\pi x_+/\beta} + \lambda_{2N+2} e^{4\pi x_+/\beta}, \\ w_k &= \left(\lambda_k + \lambda_{N+1+k} e^{2\pi x_+/\beta} \right) e^{2\pi \omega_k x_+}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Wir berechnen das Betragsquadrat unserer Lösung,

$$\begin{aligned} |w|^2 &= 1 + \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 e^{4\pi \omega_k x_1/\beta} + \lambda_{N+1}^2 e^{4\pi x_1/\beta} + \sum_{k=1}^N \lambda_{N+1+k}^2 e^{4\pi(1+\omega_k)x_1/\beta} + \lambda_{2N+2}^2 e^{8\pi x_1/\beta} \\ &\quad + 2\lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) + \sum_{k=1}^N \lambda_k \lambda_{N+1+k} e^{2\pi(2\omega_k+1)x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) \\ &\quad + 2\lambda_{N+1} \lambda_{2N+2} e^{6\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) + 2\lambda_{2N+2} e^{4\pi x_1/\beta} \cos(4\pi x_2/\beta). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Mit

$$\lambda_0 := 1, \quad \omega_0 := 0, \quad \omega_{k+N+1} := 1 + \omega_k, \quad k = 0, \dots, N+1, \quad (4.130)$$

und

$$\begin{aligned} p_k(x_1) &:= 4\pi \omega_k x_1/\beta + 2 \ln \lambda_k, & k = 0, \dots, 2N+2, \\ \tilde{p}_k(x_1) &:= 2\pi(1+2\omega_k)x_1/\beta + \ln(\lambda_k \lambda_{N+1+k}), & k = 0, \dots, N+1, \\ \tilde{q}_0(x_1) &:= 4\pi x_1/\beta + \ln \lambda_{2N+2}, \end{aligned} \quad (4.131)$$

kann $|w|^2$ in der Form

$$|w|^2 = \sum_{k=0}^{2N+2} e^{p_k(x_1)} + 2 \sum_{k=0}^{N+1} e^{\tilde{p}_k(x_1)} \cos(2\pi x_2/\beta) + 2 e^{\tilde{q}_0(x_1)} \cos(4\pi x_2/\beta) \quad (4.132)$$

geschrieben werden. An einer beliebigen Stelle x_1 trägt nur jeweils der größte Exponent zur Summe in (4.132) bei, zumindest solange der zweitgrößte Exponent nicht in der gleichen Größenordnung liegt. $\ln |w|^2$ ist damit wieder stückweise linear und wir erwarten, dass die topologische Dichte nur in der Nähe von Schnittstellen zwischen dem jeweils größten und zweitgrößten Exponenten merklich von null verschieden ist. Die topologische Dichte spaltet also auch hier in Konstituenten auf. Wir nehmen wieder an, dass die Twists geordnet sind,

$$\omega_{k-1} < \omega_k, \quad k = 1, \dots, 2N+2, \quad (4.133)$$

und untersuchen wie oben die Geraden p_k , \tilde{p}_k und \tilde{q}_0 . Deren Anstiege m sind dann auch geordnet,

$$m(p_{k-1}) < m(p_k), \quad k = 1, \dots, 2N + 2. \quad (4.134)$$

Die Geraden \tilde{p}_k , p_k und p_{N+1+k} schneiden sich für alle $k = 0, \dots, N + 1$ in jeweils genau einem Punkt,

$$\tilde{p}_k \left[-\frac{\ln(\lambda_{N+1+k}/\lambda_k)}{2\pi} \right] = p_k \left[-\frac{\ln(\lambda_{N+1+k}/\lambda_k)}{2\pi} \right] = p_{N+1+k} \left[-\frac{\ln(\lambda_{N+1+k}/\lambda_k)}{2\pi} \right]. \quad (4.135)$$

Da für die Anstiege

$$m(p_k) < m(\tilde{p}_k) < m(p_{N+1+k}), \quad k = 0, \dots, N + 1, \quad (4.136)$$

gilt, kann der Exponent \tilde{p}_k höchstens bei $-\frac{1}{2\pi} \ln(\lambda_{N+1+k}/\lambda_k)$ zur Summe in (4.132) beitragen, und das auch nur dann, wenn alle anderen Exponenten an dieser Stelle kleiner oder ungefähr gleich \tilde{p}_k sind. In diesem Fall würden dann wegen

$$m(p_k) < m(p_{k+l}) < m(p_{N+1+k}), \quad l = 1, \dots, N, \quad (4.137)$$

die Exponenten p_{k+1}, \dots, p_{k+N} gar nicht mehr beitragen: Die entsprechenden $N + 1$ Konstituenten wären zu einem vollen Instanton mit der Ladung 1 zusammengesetzt. Auch \tilde{q}_0 schneidet sich mit p_0 und p_{2N+2} in genau einem Punkt,

$$\tilde{q}_0[-\ln \lambda_{2N+2}/(4\pi)] = p_0[-\ln \lambda_{2N+2}/(4\pi)] = p_{2N+2}[-\ln \lambda_{2N+2}/(4\pi)], \quad (4.138)$$

und es gilt

$$m(p_0) < m(\tilde{q}_0) < m(p_{2N+2}). \quad (4.139)$$

Damit trägt der \tilde{q}_0 -Term nur genau dann bei, wenn keiner der Exponenten p_1, \dots, p_{2N+1} wesentlich zur Summe in (4.132) beiträgt, d. h. nur genau dann, wenn alle Konstituenten zu einem vollen Instanton mit der Ladung 2 zusammengesetzt sind. Betrachten wir den Schnittpunkt $a^{(k)}$ zwischen p_{k-1} und p_k ,

$$a^{(k)} = -\frac{\ln(\lambda_k/\lambda_{k-1})}{2\pi(\omega_k - \omega_{k-1})}, \quad k = 1, \dots, 2N + 2. \quad (4.140)$$

Wegen der Ordnung der Anstiege $m(p_{k-1}) < m(p_k)$ tritt die maximale Anzahl an Konstituenten auf, wenn

$$a^{(1)} \ll a^{(2)} \ll \dots \ll a^{(2N+2)} \quad (4.141)$$

gilt. Die maximale Anzahl an Konstituenten ist damit $2(N + 1)$. Zeitabhängigkeit tritt genau dann auf, wenn mindestens $N + 1$ Konstituenten zusammengesetzt sind. Der zeitabhängige Term mit der doppelten Frequenz $e^{\tilde{q}_0(x_1)} \cos(4\pi x_2/\beta)$ trägt nur dann bei, wenn alle $2(N + 1)$ Konstituenten zum vollen 2-Instanton zusammengesetzt sind.

Untersuchen wir den Fall, dass die ersten $N + 1$ Konstituenten links von einer Zwischenstelle \hat{a} liegen und wohlsepariert von den zweiten $N + 1$ Konstituenten sind, die rechts von

\hat{a} liegen¹⁵. Untereinander müssen die Konstituenten jeweils nicht notwendigerweise wohlsepariert sein. Für $x_1 \leq \hat{a}$ gilt dann

$$\begin{aligned} |w|^2 &\simeq \sum_{k=0}^{N+1} e^{p_k(x_1)} + 2 e^{\tilde{p}_0(x_1)} \cos(2\pi x_2/\beta) \\ &= \sum_{k=0}^{N+1} \lambda_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} + 2\lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta). \end{aligned} \quad (4.142)$$

Damit erhalten wir in diesem Bereich gerade unsere 1-Instantonlösung aus Abschnitt 4.2.4 und können die dort erhaltenen Ergebnisse übernehmen. Für $x_1 \geq \hat{a}$ gilt

$$\begin{aligned} |w|^2 &\simeq \sum_{k=N+1}^{2N+2} e^{p_k(x_1)} + 2 e^{\tilde{p}_{N+1}(x_1)} \cos(2\pi x_2/\beta) \\ &= \sum_{k=0}^{N+1} \lambda_{k+N+1}^2 e^{4\pi(1+\omega_k)x_1/\beta} + 2\lambda_{N+1}\lambda_{2N+2} e^{6\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta), \end{aligned} \quad (4.143)$$

und damit

$$\begin{aligned} \partial_\mu^2 \ln |w|^2 &= \partial_\mu^2 \ln \left(\sum_{k=0}^{N+1} \lambda_{k+N+1}^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} + 2\lambda_{N+1}\lambda_{2N+2} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) \right) \\ &\quad + \partial_\mu^2 \ln \left(e^{4\pi x_1/\beta} \right) \\ &= \partial_\mu^2 \ln \left(\sum_{k=0}^{N+1} \lambda_{k+N+1}^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} + 2\lambda_{N+1}\lambda_{2N+2} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) \right), \end{aligned} \quad (4.144)$$

d. h. auch in diesem Bereich erhalten wir die topologische Dichte der 1-Instantonlösung. Falls diese genügend separiert sind, ist die topologische Dichte der 2-Instantonlösung also gerade die Summe der Dichten zweier 1-Instantonlösungen. Für wohlseparierte Konstituenten gilt dann

$$q(x_1, x_2) \simeq \sum_{k=1}^{2N+2} \frac{\pi(\omega_l - \omega_{k-1})^2}{\beta^2 \cosh^2 \left[\frac{2\pi}{\beta}(\omega_k - \omega_{k-1})(x_1 - a^{(k)}) \right]}, \quad (4.145)$$

wobei

$$\lambda_0 := 1, \quad \omega_0 := 0, \quad \omega_{N+1+k} := 1 + \omega_k, \quad k = 0, \dots, N+1, \quad (4.146)$$

und

$$a^{(k)} = -\beta \frac{\ln(\lambda_k/\lambda_{k-1})}{2\pi(\omega_k - \omega_{k-1})}, \quad k = 1, \dots, 2N+2. \quad (4.147)$$

Die exakte topologische Dichte der 2-Instantonlösung ist am Beispiel des \mathbb{CP}^2 -Modells für verschiedene Parameterkombinationen in Abbildung 4.7 für symmetrische Konstituenten und in Abbildung 4.8 für nichtsymmetrische Konstituenten dargestellt.

¹⁵Unter „links“ bzw. „rechts“ von \hat{a} verstehen wir, dass die Konstituenten an Orten $a^{(k)}$ mit $a^{(k)} < \hat{a}$ bzw. $a^{(k)} > \hat{a}$ lokalisiert sind.

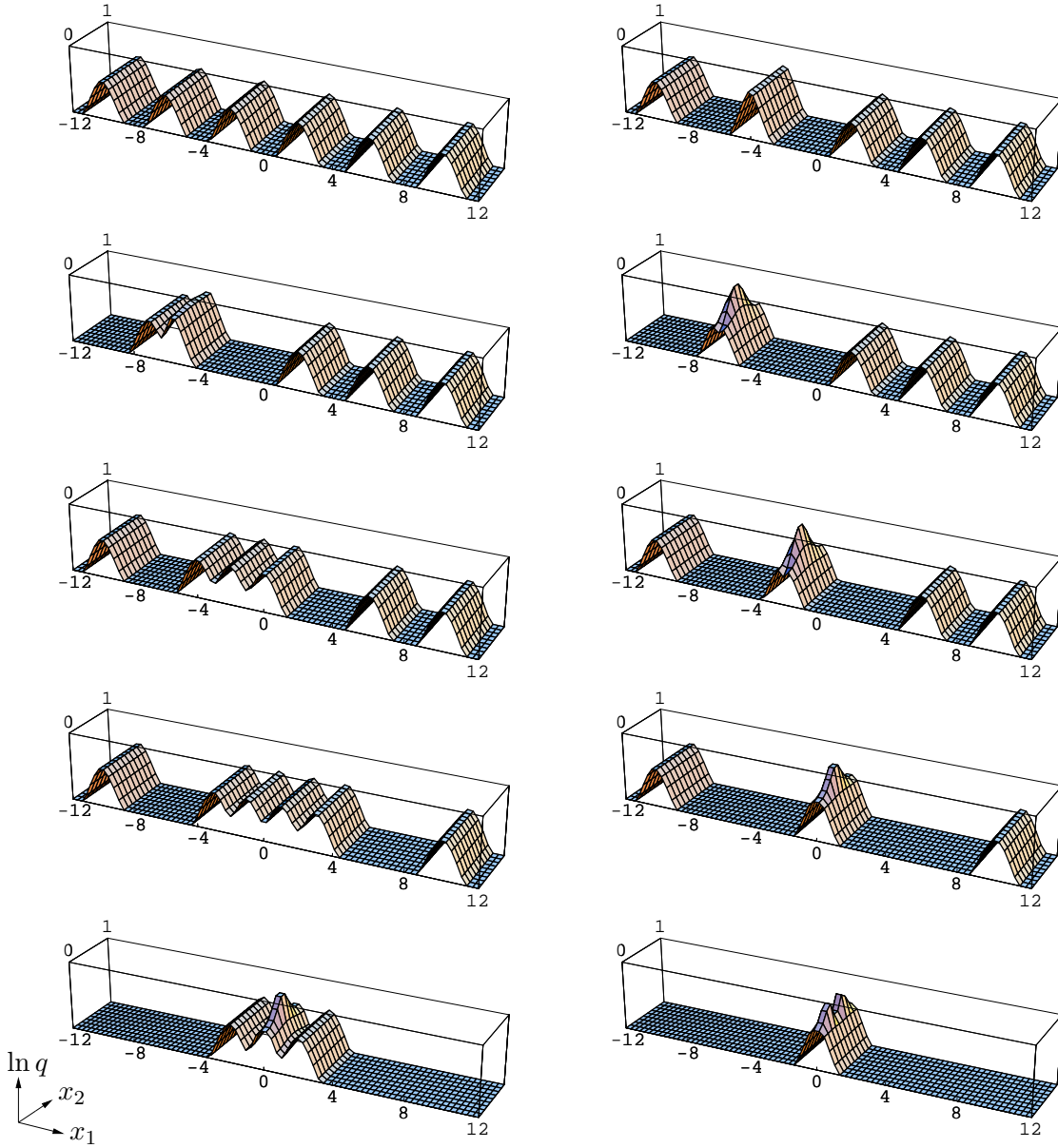


Abbildung 4.7: Logarithmus der exakten topologischen Dichte für die 2-Instantonlösung des CP^2 -Modells mit symmetrischen Konstituenten, $\omega_1 = 1/3$, $\omega_2 = 2/3$, aufgetragen über (x_1, x_2) in Einheiten von β . Die λ -Parameter sind derart gewählt, dass die sechs Konstituenten von oben nach unten von links nach rechts an den Stellen $(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}, a^{(5)}, a^{(6)}) = (-10, -6, -2, 2, 6, 10)$, $(-10, -4, -4, 2, 6, 10)$, $(-7, -5.5, -5.5, 2, 6, 10)$, $(-6, -6, -6, 2, 6, 10)$, $(-10, -4, -2, 0, 6, 10)$, $(-10, -2, -2, -2, 6, 10)$, $(-10, -3, -1, 1, 3, 10)$, $(-10, 0, 0, 0, 0, 10)$, $(-2, 0, 0, 0, 0, 2)$, $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ lokalisiert sind. Zeitabhängigkeit tritt erst dann auf, wenn mindestens drei Konstituenten zu einem vollen 1-Instanton zusammengefügt werden. Der \tilde{q}_0 -Term mit der doppelten Frequenz trägt erst dann bei, wenn alle sechs Konstituenten zum einem vollen 2-Instanton zusammengefügt werden.

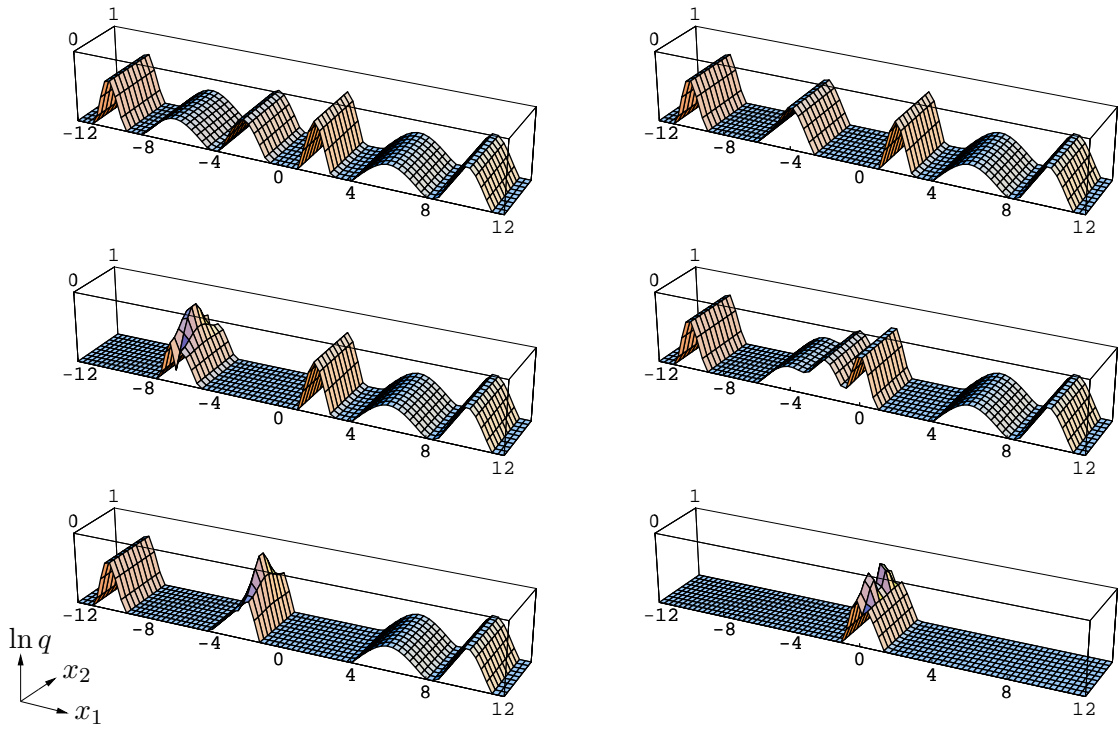


Abbildung 4.8: Logarithmus der exakten topologischen Dichte für die 2-Instantonlösung des \mathbb{CP}^2 -Modells mit nichtsymmetrischen Konstituenten mit den Ladungen $\omega_1 = 0.55$, $\omega_2 - \omega_1 = 0.15$, $1 - \omega_2 = 0.3$, aufgetragen über (x_1, x_2) in Einheiten von β . Die Konstituenten sind bei $(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}, a^{(5)}, a^{(6)}) = (-10, -6, -2, 2, 6, 10)$, $(-10, -4, -4, 2, 6, 10)$, $(-6, -6, -6, 2, 6, 10)$, $(-10, -4, -2, 0, 6, 10)$, $(-10, -2, -2, -2, 6, 10)$, $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ lokalisiert.

4.2.6 Höhere Instanton-Ladungen

Wir wollen noch ein paar Anmerkungen zum allgemeinen Fall beliebiger topologischer Ladung machen. Die allgemeine getwistete Instantonlösung mit der Ladung Q ist durch

$$w(x_+) = \begin{pmatrix} \lambda_0 e^{2\pi\omega_0 x_+/\beta} + \lambda_{N+1} e^{2\pi\omega_{N+1} x_+/\beta} + \dots + \lambda_{Q(N+1)} e^{2\pi\omega_{Q(N+1)} x_+/\beta} \\ \lambda_1 e^{2\pi\omega_1 x_+/\beta} + \lambda_{N+2} e^{2\pi\omega_{N+2} x_+/\beta} + \dots + \lambda_{(Q-1)(N+1)+1} e^{2\pi\omega_{(Q-1)(N+1)+1} x_+/\beta} \\ \vdots \\ \lambda_N e^{2\pi\omega_N x_+/\beta} + \lambda_{2N+1} e^{2\pi\omega_{2N+1} x_+/\beta} + \dots + \lambda_{Q(N+1)-1} e^{2\pi\omega_{Q(N+1)-1} x_+/\beta} \end{pmatrix} \quad (4.148)$$

gegeben, wobei wir

$$\omega_0 := 0, \quad \omega_{s(N+1)+k} := s + \omega_k, \quad (4.149)$$

für $s = 1, \dots, Q - 1$ und $k = 0, \dots, N + 1$ geschrieben haben. Nehmen wir wieder reelle λ -Parameter an, dann ist $|w|^2$ von der Form

$$\begin{aligned} |w|^2 &= \sum_{k=0}^{Q(N+1)} \lambda_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} + 2 \sum_{s=1}^Q \sum_{k=0}^{(Q-s)(N+1)} \lambda_k \lambda_{k+s(N+1)} e^{2\pi(2\omega_k+s)x_1/\beta} \cos(2\pi s x_2/\beta) \\ &=: \sum_{k=0}^{Q(N+1)} e^{p_k(x_1)} + 2 \sum_{s=1}^Q \sum_{k=0}^{(Q-s)(N+1)} e^{\tilde{p}_k^s(x_1)} \cos(2\pi s x_2/\beta). \end{aligned} \quad (4.150)$$

Die topologische Dichte $q(x)$ spaltet damit in maximal $Q(N + 1)$ Konstituenten auf. Für wohlseparierte Konstituenten trägt keiner der zeitabhängigen \tilde{p}_k^s -Terme bei. Diese Konstituenten sind dann statisch und die Lösung kann als Summe von Q Instantonlösungen mit Ladung 1 betrachtet werden. Der zeitabhängige \tilde{p}_k^s -Term trägt genau dann zur Summe in (4.150) bei, wenn der $(k + 1)$ -te bis $(k + s(N + 1))$ -te Konstituent zu einem vollen s -Instanton zusammengefügt werden. Zeitabhängigkeit tritt also erst auf, wenn mindestens $s(N + 1)$ ($s = 1, \dots, Q$) Konstituenten zusammengefügt werden. Die höchste beitragende Frequenz ist dann $2\pi s/\beta$. Erst wenn alle $Q(N + 1)$ zum vollen Q -Instanton zusammengefügt werden, trägt die maximale Frequenz $2\pi Q/\beta$ bei.

5 Fermionische Nullmoden im Instanton-Hintergrund

5.1 Minimal gekoppelte fermionische Nullmoden

Wir wollen unser bosonisches Modell um ein masseloses Dirac-Fermionenfeld ψ erweitern und die Nullmoden des Dirac-Operators im Hintergrund des getwisteten Instantonfeldes berechnen. Im ersten Schritt führen wir dies für ein minimal gekoppeltes Fermionenfeld durch. Die Lagrangedichte ist dann

$$\mathcal{L} = (D_\mu z)^\dagger D_\mu z + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi, \quad D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu, \quad (5.1)$$

wobei wir die chirale Darstellung der Dirac-Matrizen γ^μ wählen,

$$\gamma^1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = -\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_* = -i\gamma^1\gamma^2 = -\sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Wir bezeichnen die zwei Komponenten des Spinors ψ mit ψ_\pm ,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

ψ kann mit Hilfe von

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_*), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_*), \quad (5.4)$$

in die links- und rechtshändigen Komponenten ψ_L und ψ_R zerlegt werden,

$$\psi_L = P_L\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = P_R\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_+ \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Wir sind auf der Suche nach Eigenfunktionen des Dirac-Operators mit Eigenwert null¹, d. h. Funktionen ψ , die

$$\gamma^\mu D_\mu\psi = \gamma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu)\psi = 0 \quad (5.6)$$

erfüllen². Mit

$$\gamma^1\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \gamma^2\psi = \begin{pmatrix} i\psi_+ \\ -i\psi_- \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

¹Solche Eigenfunktionen heißen auch Nullmoden.

²Wir können uns die fermionische Größe ψ_\pm zusammengesetzt denken aus einer gewöhnlichen bosonischen Funktion und einem konstanten fermionischen Parameter, welcher in die Dirac-Gleichung nicht mehr eingeht. In diesem Sinne wollen wir in diesem Kapitel der Einfachheit halber ψ_\pm direkt als gewöhnliche bosonische Funktion interpretieren.

erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} (\partial_1 + i\partial_2)\psi_+ - i(A_1 + iA_2)\psi_+ &= 0 \\ (\partial_1 - i\partial_2)\psi_- - i(A_1 - iA_2)\psi_- &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\partial_{\pm} - iA_{\pm})\psi_{\mp} = 0, \quad (5.8)$$

wobei $\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_1 \mp i\partial_2)$ und $A_{\pm} = \frac{1}{2}(A_1 \mp iA_2)$. Für Instantonlösungen gilt

$$A_{\mu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\partial_{\nu}\ln|w|^2, \quad (5.9)$$

und damit

$$A_{\pm} = \pm\frac{1}{2i}\partial_{\pm}\ln|w|^2. \quad (5.10)$$

Die Dirac-Gleichung lautet somit

$$\left[\partial_{\pm} \mp \frac{1}{2}(\partial_{\pm}\ln|w|^2) \right] \psi_{\mp} = 0, \quad (5.11)$$

und die Nullmoden sind von der Form

$$\begin{aligned} \psi_- &= f(x_-)e^{\frac{1}{2}\ln|w|^2} = f(x_-)|w|, \\ \psi_+ &= g(x_+)e^{-\frac{1}{2}\ln|w|^2} = \frac{g(x_+)}{|w|}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

wobei $f(x_-)$ und $g(x_+)$ holomorphe Funktionen von x_- bzw. x_+ sind. ψ soll quasiperiodische Randbedingungen erfüllen,

$$\psi(x_1, x_2 + \beta) = e^{2\pi i\zeta}\psi(x_1, x_2), \quad \text{mit } 0 < \zeta < 1, \quad (5.13)$$

d. h.

$$\begin{aligned} f(x_- + i\beta) &= e^{2\pi i\zeta}f(x_-), \\ g(x_+ - i\beta) &= e^{2\pi i\zeta}g(x_+). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Damit sind f und g in eine Fourierreihe entwickelbar,

$$\begin{aligned} f(x_-) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi(k+\zeta)x_-/\beta}, \\ g(x_+) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{2\pi(k+\zeta)x_+/\beta}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

mit den komplexen Fourierkoeffizienten a_k und b_k . Wir verlangen, dass ψ normierbar ist,

$$\int d^2x |\psi_{\pm}(x)|^2 < \infty, \quad (5.16)$$

und werten diese Bedingung erst einmal für unsere 1-Instantonlösung aus Abschnitt 4.2.4 aus.

5.1.1 Nullmoden im 1-Instanton-Hintergrund

Die 1-Instantonlösung mit

$$|w|^2 = \sum_{k=0}^{N+1} \lambda_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} + 2\lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) \quad (5.17)$$

hat das asymptotische Verhalten

$$|w| = \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 \rightarrow -\infty, \\ \lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} & \text{für } x_1 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.18)$$

Für die Koeffizienten a_k und b_k der Fourierentwicklung muss deshalb gelten

$$a_k = 0, \quad b_k = A\delta_{k0}, \quad (5.19)$$

wobei A eine Normierungskonstante ist. Es existieren also keine normierbaren linkshändigen Nullmoden des Dirac-Operators³. Die rechtshändigen Nullmoden haben die Form

$$\psi_+(x) = \frac{A}{\sqrt{|w|^2}} e^{\frac{2\pi\zeta}{\beta} x_+}. \quad (5.20)$$

Für wohlseparierte Instantonkonstituenten mit

$$|w|^2 \simeq \sum_{k=0}^{N+1} e^{p_k(x_1)}, \quad p_k(x_1) = \frac{4\pi}{\beta} \omega_k x_1 + 2 \ln \lambda_k, \quad (5.21)$$

wobei

$$a^{(k-1)} \ll a^{(k)}, \quad \text{mit } a^{(k)} = -\frac{\beta \ln(\lambda_k/\lambda_{k-1})}{2\pi(\omega_k - \omega_{k-1})}, \quad \lambda_0 = 1, \quad (5.22)$$

und

$$\omega_{k-1} < \omega_k, \quad \text{mit } \omega_0 = 0, \quad \omega_{N+1} = 1, \quad (5.23)$$

ergibt sich

$$|\psi_+(x)|^2 \simeq |A|^2 \left(\sum_{k=0}^{N+1} e^{p_k(x_1) - \hat{p}^\zeta(x_1)} \right)^{-1}, \quad \text{mit } \hat{p}^\zeta(x_1) := \frac{4\pi\zeta}{\beta} x_1. \quad (5.24)$$

Betrachten wir als erstes den Spezialfall, dass für ein $k = 1, \dots, N+1$

$$\zeta = \frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k) \quad (5.25)$$

gilt. Wir wollen uns ein anschauliches Bild von den Größenordnungen der Exponenten p_j und \hat{p}^ζ verschaffen. In Abbildung 5.1 ist ein Beispiel veranschaulicht. Entscheidend für das Betragsquadrat $|\psi_+(x)|^2$ an einer Stelle x_1 ist der jeweils größte Exponent $\max_j \{p_j(x_1) -$

³Für $\zeta = 0$ (d. h. ψ periodisch) würden sogar auch keine normierbaren rechtshändigen Nullmoden existieren. Die Forderung der Normierbarkeit kann abgeschwächt werden, indem man lediglich Normierbarkeit bei Projektion auf die Sphäre fordert, sodass dann auch für periodische Randbedingungen normierbare Nullmoden existieren [DLDV78].

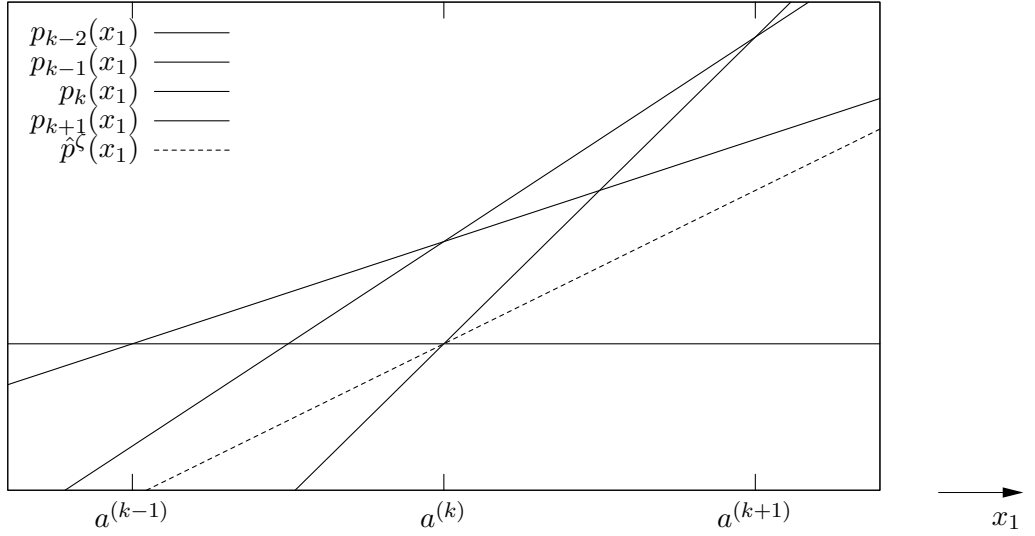


Abbildung 5.1: Exponenten p_j und \hat{p}^ζ für den Fall $\zeta = \frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k)$, aufgetragen über x_1 . Die Anstiege der Geraden sind geordnet, $m(p_{k-2}) < m(p_{k-1}) < m(p_k) < m(p_{k+1})$. Der Wert für $|\psi_+|^{-2}$ ergibt sich aus dem Abstand der jeweils obersten Gerade p_j (durchgezogene Linien) zur Gerade \hat{p}^ζ (gestrichelte Linie).

$\hat{p}^\zeta(x_1)$. Da dieser im Nenner auftritt, ist $|\psi_+|^2$ allerdings genau dann maximal, wenn die Differenz $\max_j \{p_j(x_1) - \hat{p}^\zeta(x_1)\}$ minimal wird. Für die Anstiege m der Geraden $p_j - \hat{p}^\zeta$ gilt in diesem Fall

$$m(p_0 - \hat{p}^\zeta) < m(p_1 - \hat{p}^\zeta) < \dots < m(p_{k-1} - \hat{p}^\zeta) < 0 < m(p_k - \hat{p}^\zeta) < \dots < m(p_{N+1} - \hat{p}^\zeta). \quad (5.26)$$

Das Minimum von $\max_j \{p_j(x_1) - \hat{p}^\zeta(x_1)\}$ liegt damit an der Schnittstelle $a^{(k)}$ zwischen p_{k-1} und p_k . $|\psi_+|^2$ ist also bei $a^{(k)}$ maximal. Für $x_1 < a^{(k-1)}$ oder $x_1 > a^{(k+1)}$ ist $\max_j \{p_j(x_1) - \hat{p}^\zeta(x_1)\}$ wesentlich größer als $\max_j \{p_j(a^{(j)}) - \hat{p}^\zeta(a^{(k)})\}$ und damit ist dann $|\psi_+(x)|^2 \simeq 0$. Eine gute Näherung ist deshalb

$$\begin{aligned} |\psi_+(x)|^2 &\simeq |A|^2 \left(e^{p_{k-1}(x_1) - \hat{p}^\zeta(x_1)} + e^{p_k(x_1) - \hat{p}^\zeta(x_1)} \right)^{-1} \\ &\propto \left(e^{-2\pi(\omega_k - \omega_{k-1})(x_1 - a^{(k)})/\beta + 2 \ln \lambda_{k-1} - 2\pi a^{(k)}(\omega_k - \omega_{k-1})/\beta} \right. \\ &\quad \left. + e^{2\pi(\omega_k - \omega_{k-1})(x_1 - a^{(k)})/\beta + 2 \ln \lambda_k + 2\pi a^{(k)}(\omega_k - \omega_{k-1})/\beta} \right)^{-1} \\ &\propto \frac{2(\omega_k - \omega_{k-1})}{\beta^2 \cosh \left[\frac{2\pi}{\beta}(\omega_k - \omega_{k-1})(x_1 - a^{(k)}) \right]}, \quad \text{für } \zeta = \frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k), \end{aligned} \quad (5.27)$$

wobei wir im letzten Schritt das Feld auf eins normiert haben. Im Spezialfall $\zeta = \frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k)$ erhalten wir also ein Fermionenfeld, welches symmetrisch um den k -ten Instantonkonstituenten lokalisiert ist und die Form $1/\cosh(x)$ hat.

Sei nun

$$\frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k) < \zeta < \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_{k+1}), \quad k = 1, \dots, N+1, \quad (5.28)$$

wobei wir für $k = 0$ ($k = N + 1$) unter der linken (rechten) Grenze null (eins) verstehen. Für die Anstiege m der Geraden $p_k - \hat{p}^\zeta$ gilt dann

$$\begin{aligned} m(p_0 - \hat{p}^\zeta) &< \cdots < m(p_{k-1} - \hat{p}^\zeta) < 0 < m(p_k - \hat{p}^\zeta) < \cdots < m(p_{N+1} - \hat{p}^\zeta), & \text{falls } \zeta < \omega_k, \\ m(p_0 - \hat{p}^\zeta) &< \cdots < m(p_{k-1} - \hat{p}^\zeta) < 0 = m(p_k - \hat{p}^\zeta) < \cdots < m(p_{N+1} - \hat{p}^\zeta), & \text{falls } \zeta = \omega_k, \\ m(p_0 - \hat{p}^\zeta) &< \cdots < m(p_{k-1} - \hat{p}^\zeta) < m(p_k - \hat{p}^\zeta) < 0 < \cdots < m(p_{N+1} - \hat{p}^\zeta), & \text{falls } \zeta > \omega_k. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Damit liegt das Maximum von $|\psi_+|^2$ (entspricht der Minimalstelle von $\max_j \{p_j(x_1) - \hat{p}^\zeta(x_1)\}$) bei

$$\begin{aligned} a^{(k)}, & \quad \text{falls } \zeta < \omega_k, \\ a^{(k+1)}, & \quad \text{falls } \zeta > \omega_k. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Falls für den Twist gerade $\zeta = \omega_k$ gilt, so ist $|\psi_+|^2$ im Bereich $(a^{(k)}, a^{(k+1)})$ näherungsweise konstant. Für $x_1 < a^{(k)}$ oder $x_1 > a^{(k+1)}$ steigt $\max_j \{p_j(x_1) - \hat{p}^\zeta(x_1)\}$ stark an, sodass $|\psi_+|^2$ gegen null geht. Anschaulich gesprochen erstreckt sich also das Fermionenfeld vom k -ten bis zum $(k + 1)$ -ten Instantonkonstituenten. Da in diesem Bereich nur für $k - 1 \leq j \leq k + 1$ wesentliche Beiträge zur Summe in $|\psi_+|^2$ geliefert werden, gilt die Näherung

$$|\psi_+(x)|^2 \simeq |A|^2 \left(\sum_{j=k-1}^{k+1} e^{p_j(x_1) - \hat{p}^\zeta(x_1)} \right)^{-1}, \quad \text{für } \frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k) < \zeta < \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_{k+1}). \quad (5.31)$$

Eine Bemerkung wollen wir noch zu dem Fall machen, in dem die Instantonkonstituenten nicht (wie in unserer Rechnung angenommen) wohlsepariert sind. Falls nur einige und nicht alle Konstituenten zusammengesetzt werden (und damit die topologische Dichte immer noch statisch ist), ist unsere Argumentation genauso gültig und wir erhalten ebenso wieder Nullmoden, die sich von einem Instantonkonstituenten zum Nächsten erstrecken, oder symmetrisch um einen Konstituenten lokalisiert sind. Werden alle Konstituenten zum vollen 1-Instanton zusammengesetzt, so wird auch unsere Nullmode zeitabhängig. Analog zu unserer Argumentation gilt dann, dass eine solche Nullmode bei der Instantonposition lokalisiert ist. Ein paar Beispiele für fermionische Nullmoden im Hintergrund von 1-Instantonkonstituenten sind in Abbildung 5.2 für das CP^2 -Modell dargestellt.

5.1.2 Nullmoden im 2-Instanton-Hintergrund

Wir wollen unser Ergebnis verallgemeinern, indem wir die Nullmoden im Hintergrund der 2-Instantonlösung betrachten. Falls die Konstituenten wohlsepariert sind, ist diese durch

$$|w|^2 \simeq \sum_{k=0}^{2N+2} e^{p_k(x_1)} \quad (5.32)$$

mit

$$p_k(x_1) = 4\pi\omega_k x_1 / \beta + 2 \ln \lambda_k, \quad k = 0, \dots, 2N + 2, \quad (5.33)$$

und

$$\lambda_0 = 1, \quad \omega_0 = 0, \quad \omega_{k+N+1} = 1 + \omega_k, \quad k = 0, \dots, N + 1, \quad (5.34)$$

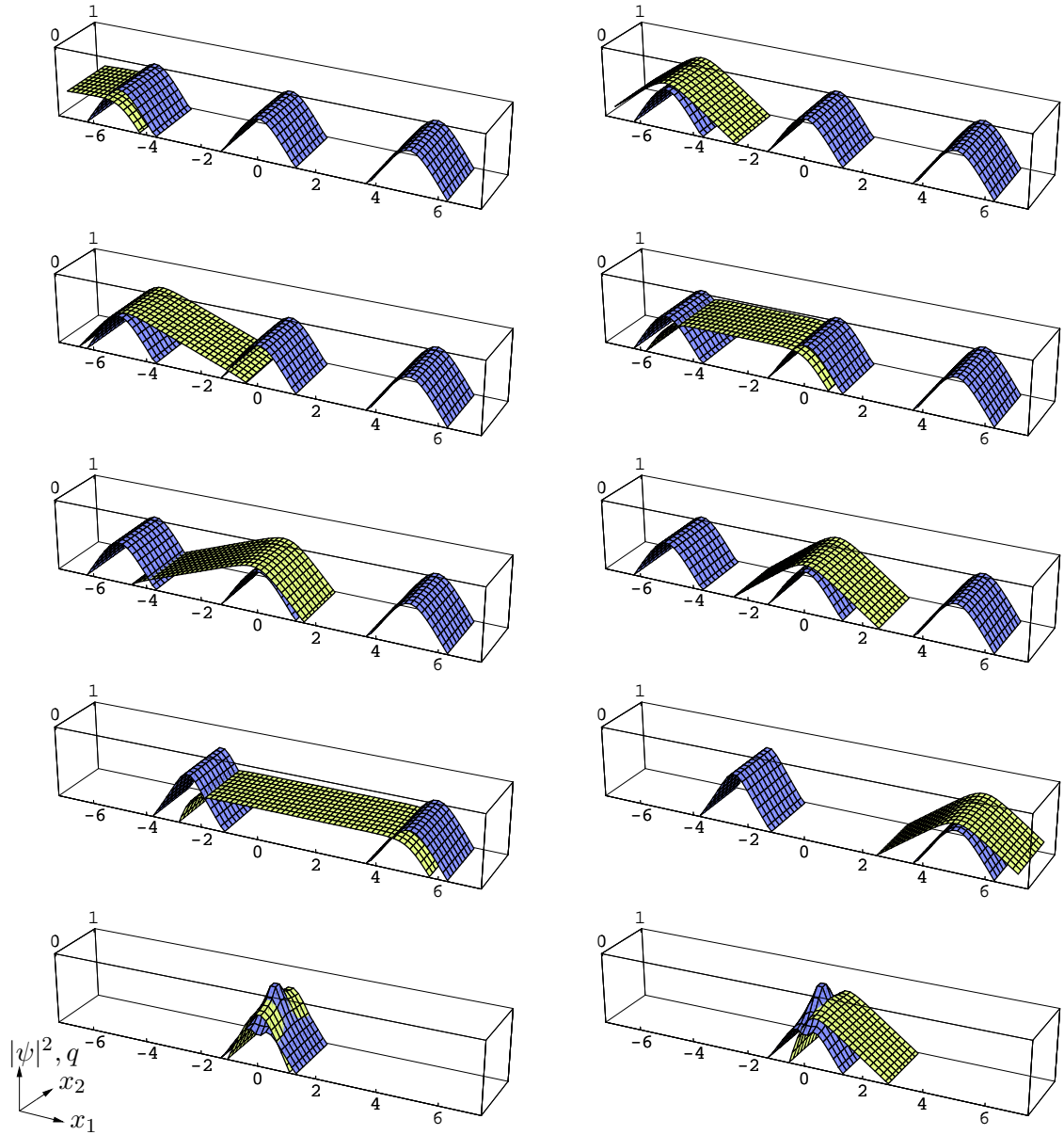


Abbildung 5.2: Fermionische Nullmoden (gelb) im Hintergrund von 1-Instantonkonstituenten (blau) am Beispiel des \mathbb{CP}^2 -Modells, in logarithmischer Darstellung über (x_1, x_2) in Einheiten von β aufgetragen. Die symmetrischen Konstituenten tragen in allen Fällen die Ladung $1/3$. In den ersten drei Zeilen sind sie bei $a^{(1)} = -5$, $a^{(2)} = 0$, $a^{(3)} = 5$ lokalisiert. Der fermionische Twist ist von oben nach unten von links nach rechts $\zeta = 0.01, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}$. In der vierten Zeile sind der erste und zweite Konstituent bei $a^{(1)} = a^{(2)} = -2.5$ zusammengefügt, wobei $\zeta = \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$. In der letzten Zeile sind alle Konstituenten zum vollen zeitabhängigen 1-Instanton zusammengesetzt, wobei $\zeta = \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$. Auch die Nullmode wird dann (leicht) zeitabhängig.

gegeben (vgl. Abschnitt 4.2.5). Sie hat das asymptotische Verhalten

$$|w| \simeq \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 \rightarrow -\infty, \\ \lambda_{2N+2} e^{4\pi x_1/\beta} & \text{für } x_1 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.35)$$

Für die Koeffizienten a_k und b_k der Fourierentwicklung (5.15) muss deshalb gelten

$$a_k = 0, \quad b_k = A\delta_{0k} + B\delta_{1k}, \quad (5.36)$$

wobei A und B Normierungskonstanten sind. Wie im 1-Instanton-Fall existieren keine linkshändigen Nullmoden. Dafür existieren in Übereinstimmung mit dem Index-Theorem⁴ nun zwei rechtshändige Nullmoden.

Betrachten wir zunächst die Mode mit $A \neq 0$, $B = 0$. Diese hat die Form

$$\begin{aligned} |\psi_+^A(x)|^2 &= \frac{|A|^2}{|w|^2} e^{\frac{4\pi\zeta}{\beta}x_1} \\ &\simeq |A|^2 \left(\sum_{k=0}^{2N+2} e^{p_k(x_1) - \hat{p}^\zeta(x_1)} \right)^{-1}, \quad \hat{p}^\zeta(x_1) := \frac{4\pi\zeta}{\beta}x_1. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Da für den Anstieg m der Geraden \hat{p}^ζ

$$m(\hat{p}^\zeta) < m(p_{N+1}) < \dots < m(p_{2N+2}) \quad (5.38)$$

gilt, kann $|\psi_+^A|^2$ für alle $\zeta \in (0, 1)$ nur im Bereich $x_1 \leq a^{(N+2)}$ wesentlich von null verschieden sein, d. h. näherungsweise gilt

$$|\psi_+^A(x)|^2 \simeq |A|^2 \left(\sum_{k=0}^{N+1} e^{p_k(x_1) - \hat{p}^\zeta(x_1)} \right)^{-1}. \quad (5.39)$$

Dies entspricht aber gerade der Nullmode im Hintergrund der 1-Instantonlösung, sodass wir die dort erhaltenen Ergebnisse übertragen können. Analoges gilt für die zweite Mode mit $A = 0$, $B \neq 0$. Für diese ist

$$|\psi_+^B(x)|^2 \simeq |B|^2 \left(\sum_{k=0}^{2N+2} e^{p_k(x_1) - \hat{p}^{\zeta+1}(x_1)} \right)^{-1}, \quad \hat{p}^{\zeta+1}(x_1) := \frac{4\pi(\zeta+1)}{\beta}x_1, \quad (5.40)$$

und wegen

$$m(\hat{p}^{\zeta+1}) > m(p_{N+1}) > \dots > m(p_0) \quad (5.41)$$

kann $|\psi_+^B|^2$ nur im Bereich $x_1 \geq a^{(N+1)}$ wesentlich von null verschieden sein, sodass

$$\begin{aligned} |\psi_+^B(x)|^2 &\simeq |B|^2 \left(\sum_{k=N+1}^{2N+2} \lambda_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta - 4\pi(\zeta+1)x_1/\beta} \right)^{-1} \\ &= |B|^2 \left(\sum_{k=0}^{N+1} \lambda_{k+N+1}^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta - 4\pi\zeta x_1/\beta} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

⁴Nach dem Atiyah-Singer-Index-Theorem [AS68, NS77] muss die Anzahl der rechtshändigen Nullmoden minus der Anzahl der linkshändigen Nullmoden gleich der topologischen Ladung sein.

d. h. auch die zweite Nullmode entspricht der Lösung im 1-Instanton-Hintergrund, sie ist jedoch im Bereich der zweiten $N + 1$ Instantonkonstituenten lokalisiert.

Wir fassen also zusammen: Im Hintergrund der 2-Instantonlösung erhalten wir zwei rechtshändige Nullmoden, wobei eine davon im Bereich der ersten $N + 1$ Instantonkonstituenten lokalisiert ist und die andere im Bereich der zweiten $N + 1$ Konstituenten. Für $\zeta = \frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k)$ ist die erste (zweite) Mode symmetrisch um den k -ten ($(k + N + 1)$ -ten) Konstituenten lokalisiert und hat die Form $1/\cosh[2\pi(\omega_k - \omega_{k-1})x_1/\beta]$. Für $\frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k) < \zeta < \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_{k+1})$ erstreckt sich die erste (zweite) Nullmode vom k -ten ($k + N + 1$ -ten) zum $(k + 1)$ -ten ($(k + N + 2)$ -ten) Konstituenten. Für $\zeta < \omega_k$ ist sie bei $a^{(k)}$ ($a^{(k+N+1)}$), für $\zeta > \omega_k$ ist sie bei $a^{(k+1)}$ ($a^{(k+N+2)}$) maximal. Für $\zeta = \omega_k$ ist sie zwischen diesen beiden Stellen näherungsweise konstant und fällt außerhalb dieses Bereiches auf null ab. Ein paar Beispiele sind in Abbildung 5.3 für das \mathbb{CP}^2 -Modell dargestellt. Für nicht mehr wohlseparierte Instantonkonstituenten gilt unsere Argumentation in Abschnitt 5.1.1 analog.

5.1.3 Nullmoden im Instanton-Hintergrund höherer Ladungen

Unsere Ergebnisse für die Nullmoden im Instanton-Hintergrund mit $Q = 1, 2$, können nun leicht auf den Fall höherer Ladungen $Q > 2$ übertragen werden. In Übereinstimmung mit dem Index-Theorem erhalten wir dann Q rechtshändige Nullmoden, wobei deren Positionen mithilfe des fermionischen Twists ζ eingestellt werden können. Sind alle $Q(N + 1)$ Konstituenten wohlsepariert, so ist die s -te Nullmode, $s = 1, 2, \dots, Q$, für $\zeta = \frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k)$ mit einem $k = 1, \dots, N + 1$ genau symmetrisch um den $(k + (s - 1)(N + 1))$ -ten Konstituenten lokalisiert. Für $\frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k) < \zeta < \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_{k+1})$ erstreckt sie sich gerade vom $(k + (s - 1)(N + 1))$ -ten zum $(k + 1 + (s - 1)(N + 1))$ -ten Konstituenten. Für $\zeta = \omega_k$ ist sie in diesem Bereich näherungsweise konstant.

5.2 Supersymmetrisch gekoppelte fermionische Nullmoden

Wir kommen nun wieder zurück zum Ausgangspunkt unserer Arbeit. In diesem letzten Abschnitt diskutieren wir die fermionischen Nullmoden des supersymmetrischen Dirac-Operators im Hintergrund der getwisteten Instantonlösungen. In Abschnitt 3.7 haben wir die euklidische Wirkung des supersymmetrischen \mathbb{CP}^N -Modells konstruiert,

$$S = \int d^2x \left\{ (D^\mu z)^\dagger (D_\mu z) + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi + \frac{1}{4} \left[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_*\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) \right] \right\}, \quad (5.43)$$

mit den Nebenbedingungen

$$z^\dagger z = 1, \quad z^\dagger \psi_\pm = \bar{\psi}_\pm z = 0, \quad (5.44)$$

und der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - z^\dagger \partial_\mu z. \quad (5.45)$$

Das Modell ist invariant unter den $(2, 2)$ -Supersymmetrietransformationen

$$\begin{aligned} \delta z &= \epsilon_+ \psi_- - \epsilon_- \psi_+, \\ \delta \psi_+ &= -2i\bar{\epsilon}_- D_+ z + \bar{\epsilon}_- (\bar{\psi}_+ \psi_+) z - \bar{\epsilon}_+ (\bar{\psi}_- \psi_+) z, \\ \delta \psi_- &= 2i\bar{\epsilon}_+ D_- z - \bar{\epsilon}_+ (\bar{\psi}_- \psi_-) z + \bar{\epsilon}_- (\bar{\psi}_+ \psi_-) z, \end{aligned} \quad (5.46)$$

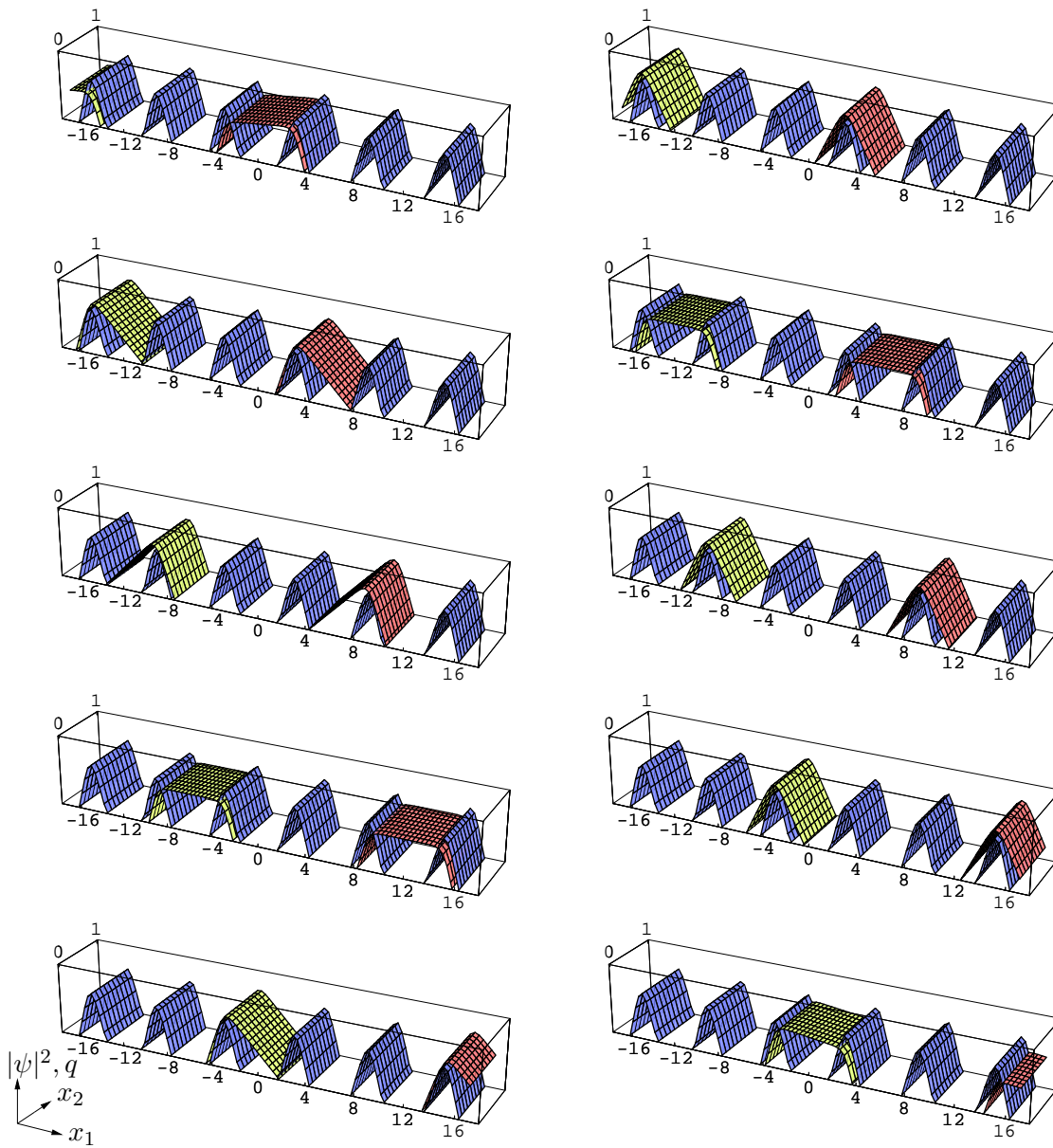


Abbildung 5.3: Fermionische Nullmoden (gelb und rot) im Hintergrund von 2-Instantonkonstituenten (blau) am Beispiel des \mathbb{CP}^2 -Modells, in logarithmischer Darstellung über (x_1, x_2) in Einheiten von β aufgetragen. Die symmetrischen Instantonkonstituenten sind jeweils bei $(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}, a^{(5)}, a^{(6)}) = (-15, -9, -3, 3, 9, 15)$ lokalisiert und tragen alle die Ladung $1/3$. In der ersten Zeile ist der fermionische Twist von links nach rechts $\zeta = 0.01, \frac{1}{6}$. Zweite Zeile: $\zeta = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$. Dritte Zeile: $\zeta = \frac{5}{12}, \frac{1}{2}$. Vierte Zeile: $\zeta = \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$. Fünfte Zeile: $\zeta = \frac{11}{12}, 0.99$.

mit

$$D_{\pm} = \partial_{\pm} - z^{\dagger} \partial_{\pm} z. \quad (5.47)$$

Wir variieren die Wirkung unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen nach $\bar{\psi}$ und vernachlässigen die 4-Fermi-Wechselwirkungen,

$$i\gamma^{\mu} D_{\mu} \psi + \lambda z = 0, \quad (5.48)$$

wobei wir den Lagrange'schen Multiplikator λ eingeführt haben. Nach Multiplikation mit z^{\dagger} von links erhalten wir

$$\lambda = -iz^{\dagger} \gamma^{\mu} D_{\mu} \psi. \quad (5.49)$$

Die linearisierte Dirac-Gleichung ist damit

$$\left(1 - zz^{\dagger}\right) \gamma^{\mu} D_{\mu} \psi = 0, \quad (5.50)$$

wobei die $N + 1$ Dirac-Fermionen ψ^i der Nebenbedingung

$$z^{\dagger} \psi = 0 \quad (5.51)$$

unterliegen⁵. Mit den links- und rechtshändigen Komponenten von ψ ,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{-} \\ \psi_{+} \end{pmatrix}, \quad (5.52)$$

können wir auch

$$(1 - zz^{\dagger}) D_{\pm} \psi_{\mp} = 0 \quad (5.53)$$

schreiben. Die getwistete Instantonlösung mit der topologischen Ladung Q ist

$$z_i = \frac{w_i}{|w|}, \quad w_i = w_i(x_+) = \sum_{j=0}^Q b_i^j e^{2\pi(j+\omega_i)x_+/\beta} \quad \text{mit} \quad b_i^Q = b_0^Q \delta_{i0}. \quad (5.54)$$

Für Instantonlösungen gilt (s. Abschnitt 4.1.4)

$$z^{\dagger} \partial_{\pm} z = \pm \partial_{\pm} \ln |w|, \quad (5.55)$$

sodass die Dirac-Gleichung damit von der Form

$$\left(1 - \frac{ww^{\dagger}}{|w|^2}\right) [\partial_{\pm} \mp (\partial_{\pm} \ln |w|)] \psi_{\mp} = 0 \quad (5.56)$$

ist. Mit der Substitution $\phi_{\pm} := \psi_{\pm} |w|^{\pm 1}$ erhalten wir die äquivalenten Eigenwertgleichungen mit den Eigenwerten λ_{\pm}

$$\left(1 - \frac{ww^{\dagger}}{|w|^2}\right) \partial_{\pm} \phi_{\mp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{\pm} \phi_{\mp} = \lambda_{\mp} w, \quad (5.57)$$

mit der Nebenbedingung

$$w^{\dagger} \phi_{\pm} = 0. \quad (5.58)$$

⁵Der Einfachheit halber wollen wir wieder soweit als möglich die Farbindizes $i = 0, \dots, N$ unterdrücken und z und ψ jeweils als $(N + 1)$ -Vektor im Farbraum betrachten.

5.2 Supersymmetrisch gekoppelte fermionische Nullmoden

Betrachten wir zuerst die linkshändige Lösung. Dazu multiplizieren wir Gleichung (5.57) mit w^\dagger von links und erhalten unter Verwendung der Nebenbedingung

$$\begin{aligned}\lambda_- &= \frac{w^\dagger \partial_+ \phi_-}{w^\dagger w} \\ &= -\frac{(\partial_- w)^\dagger \phi_-}{w^\dagger w} \\ &= 0,\end{aligned}\tag{5.59}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass w eine holomorphe Funktion von x_+ ist. Damit gilt

$$\partial_+ \phi_- = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_- = f(x_-),\tag{5.60}$$

wobei f ein beliebiger zu w senkrechter Vektor von holomorphen Funktionen von x_- ist. Die allgemeine linkshändige Lösung der Dirac-Gleichung ist also

$$\psi_-(x) = |w|f(x_-) \quad \text{mit} \quad f \perp w.\tag{5.61}$$

Da w nicht von x_- abhängt, muss für die rechtshändigen Nullmoden gelten

$$\phi_+(x) = \Lambda_+(x)w(x_+) + g(x_+), \quad \text{mit} \quad \partial_- \Lambda_+ = \lambda_+,\tag{5.62}$$

wobei g ein beliebiger Vektor von holomorphen Funktionen von x_+ ist. Wir multiplizieren wieder beide Seiten mit w^\dagger von links und erhalten unter Verwendung der Nebenbedingung

$$\Lambda_+ = -\frac{w^\dagger g}{w^\dagger w}.\tag{5.63}$$

Die allgemeine rechtshändige Lösung der Dirac-Gleichung ist damit

$$\psi_+(x) = \frac{1}{|w|} \left(1 - \frac{ww^\dagger}{|w|^2} \right) g(x_+).\tag{5.64}$$

Damit die Supersymmetrie erhalten bleibt, muss ψ dieselben getwisteten Randbedingungen wie w erfüllen, d. h.

$$\psi^i(x_1, x_2 + \beta) = e^{2\pi i \omega_i} \psi^i(x_1, x_2), \quad i = 0, \dots, N.\tag{5.65}$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn auch die Funktionen f und g diese Randbedingungen erfüllen,

$$\begin{aligned}f_i(x_1, x_2 + \beta) &= e^{2\pi i \omega_i} f_i(x_1, x_2), \\ g_i(x_1, x_2 + \beta) &= e^{2\pi i \omega_i} g_i(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{5.66}$$

Damit sind sie in eine Fourierreihe entwickelbar,

$$\begin{aligned}f_i(x_+) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_i^k e^{2\pi(k+\omega_i)x_+/\beta}, \\ g_i(x_-) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_i^k e^{2\pi(k+\omega_i)x_-/\beta},\end{aligned}\tag{5.67}$$

5 Fermionische Nullmoden im Instanton-Hintergrund

wobei die Vektoren c^k senkrecht auf w stehen. Wir verlangen, dass die Lösungen normierbar sind,

$$\int d^2x |\psi_{\pm}(x)|^2 < \infty. \quad (5.68)$$

Die allgemeine Instantonlösung mit der topologischen Ladung Q hat die Asymptotik

$$|w| \simeq \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 \rightarrow -\infty, \\ \lambda_{Q(N+1)} e^{2\pi Q x_1/\beta} & \text{für } x_1 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.69)$$

Somit muss für die Koeffizienten in der Fourierentwicklung

$$\begin{aligned} c^k &= 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}, \\ d_i^k &= \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \text{ oder } k > Q, \\ d_0^Q \delta_{i0} & \text{für } k = Q, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.70)$$

gelten. Damit existieren wie im Fall $T = 0$ [DLDV78] keine normierbaren linkshändigen Nullmoden und $Q(N + 1)$ normierbare rechtshändige Nullmoden.

5.2.1 Supersymmetrische Nullmoden im 1-Instanton-Hintergrund

Betrachten wir die Nullmoden im 1-Instanton-Hintergrund mit

$$w(x_+) = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_{N+1} e^{2\pi x_+/\beta} \\ \lambda_1 e^{2\pi \omega_1 x_+/\beta} \\ \vdots \\ \lambda_N e^{2\pi \omega_N x_+/\beta} \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

Damit die Lösungen normierbar sind und die geforderten Randbedingungen erfüllen, muss g die Form

$$g(x_+) = \begin{pmatrix} \mu_0 + \mu_{N+1} e^{2\pi x_+/\beta} \\ \mu_1 e^{2\pi \omega_1 x_+/\beta} \\ \vdots \\ \mu_N e^{2\pi \omega_N x_+/\beta} \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

mit den komplexen Koeffizienten μ_k annehmen. g ist also von der gleichen Form wie w . Wie bei w wollen wir auch die Koeffizienten von g der Einfachheit halber als reell annehmen. Dies stellt keine wesentliche Einschränkung dar, da in unseren Ergebnissen diese Annahme leicht wieder rückgängig machbar ist. Wir wollen das Betragsquadrat $|\psi_+|^2$ diskutieren. Unabhängig von der topologischen Ladung des Hintergrundes gilt

$$|\psi_+|^2 = \frac{|w|^2 |g|^2 - |g^\dagger w|^2}{|w|^4}. \quad (5.73)$$

Im Hintergrund der 1-Instantonlösung (5.71) erhalten wir

$$|g|^2 = \sum_{k=0}^{N+1} \mu_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} + 2\mu_0\mu_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta), \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} |g|^2 |w|^2 &= \sum_{k,l=0}^{N+1} \mu_k^2 \lambda_l^2 e^{4\pi(\omega_k + \omega_l)x_1/\beta} + 4\mu_0\mu_{N+1}\lambda_0\lambda_{N+1} e^{4\pi x_1/\beta} \cos^2(2\pi x_2/\beta) \\ &\quad + 2e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) \left(\mu_0\mu_{N+1} \sum_l \lambda_l^2 e^{4\pi\omega_l x_1/\beta} + \lambda_0\lambda_{N+1} \sum_k \mu_k^2 e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} \right), \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$g^\dagger w = \sum_{k=0}^{N+1} \mu_k \lambda_k e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} + \mu_{N+1}\lambda_0 e^{2\pi x_1/\beta} + \mu_0\lambda_{N+1} e^{2\pi x_1/\beta}, \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} |g^\dagger w|^2 &= \left(\sum_{k=0}^{N+1} \mu_k \lambda_k e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} \right)^2 + \mu_{N+1}^2 \lambda_0^2 e^{4\pi x_1/\beta} + \mu_0^2 \lambda_{N+1}^2 e^{4\pi x_1/\beta} \\ &\quad + 2(\mu_{N+1}\lambda_0 + \mu_0\lambda_{N+1}) e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) \sum_{k=0}^{N+1} \mu_k \lambda_k e^{4\pi\omega_k x_1/\beta} \\ &\quad + 2\mu_0\mu_{N+1}\lambda_0\lambda_{N+1} e^{4\pi x_1/\beta} \cos(4\pi x_2/\beta), \end{aligned} \quad (5.77)$$

sodass für den Zähler in $|\psi_+|^2$ gilt

$$\begin{aligned} |g|^2 |w|^2 - |g^\dagger w|^2 &= \sum_{k<l}^{N+1} (\mu_k \lambda_l - \mu_l \lambda_k)^2 e^{4\pi(\omega_k + \omega_l)x_1/\beta} - (\mu_0\lambda_{N+1} - \mu_{N+1}\lambda_0)^2 e^{4\pi x_1/\beta} \\ &\quad + 2e^{2\pi x_1/\beta} \cos(2\pi x_2/\beta) \sum_{k=1}^N (\mu_0\lambda_k - \mu_k\lambda_0)(\mu_{N+1}\lambda_k - \mu_k\lambda_{N+1}) e^{4\pi\omega_k x_1/\beta}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Wir erhalten damit die exakte Formel

$$|\psi_+|^2 = \frac{1}{|w|^4} \left(\sum_{k<l}^{N+1} e^{\hat{p}_{k,l}(x_1)} - e^{\hat{p}_{0,N+1}(x_1)} + 2 \cos(2\pi x_2/\beta) \sum_{k=1}^N e^{\hat{q}_k(x_1)} \right), \quad (5.79)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{p}_{k,l}(x_1) &:= \frac{4\pi}{\beta} (\omega_k + \omega_l)x_1 + \ln [(\mu_k \lambda_l - \mu_l \lambda_k)^2], \\ \hat{q}_k(x_1) &:= \frac{4\pi}{\beta} \left(\omega_k + \frac{1}{2} \right) x_1 + \ln [(\mu_0 \lambda_k - \mu_k \lambda_0)(\mu_{N+1} \lambda_k - \mu_k \lambda_{N+1})], \end{aligned} \quad (5.80)$$

und

$$|w|^2 = \sum_{k=0}^{N+1} e^{p_k(x_1)} + 2e^{\tilde{q}(x_1)} \cos(2\pi x_2/\beta), \quad (5.81)$$

mit

$$\begin{aligned} p_k(x_1) &= 4\pi\omega_k x_1/\beta + 2 \ln \lambda_k, \\ \tilde{q}(x_1) &= 2\pi x_1/\beta + \ln(\lambda_0 \lambda_{N+1}). \end{aligned} \quad (5.82)$$

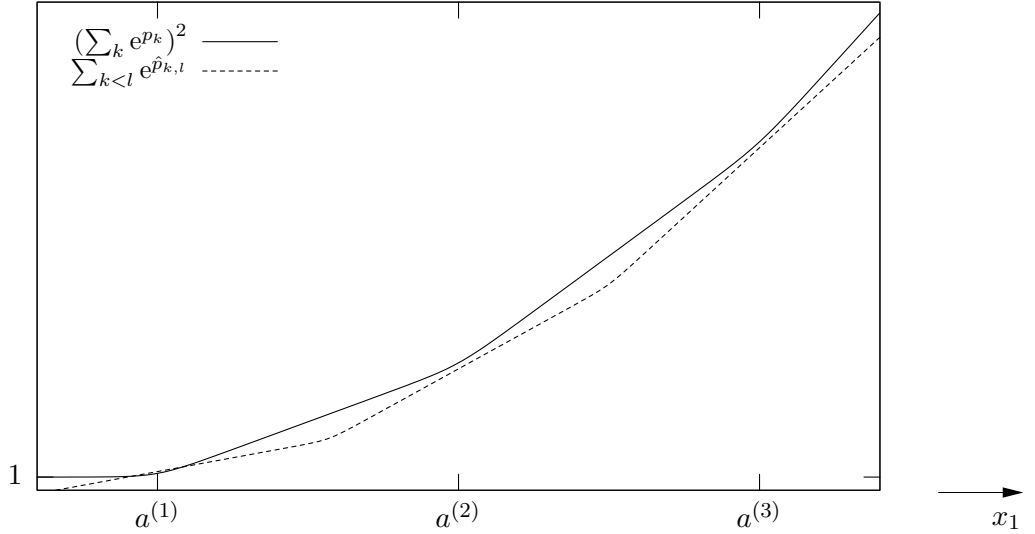


Abbildung 5.4: Zähler $\sum_{k<l}^{N+1} e^{\hat{p}_{k,l}}$ und Nenner $\sum_{k=1}^{N+1} e^{p_k} = |w|^4$ von $|\psi_+|^2$ nach Gleichung (5.79), in einfach logarithmischer Skala aufgetragen über x_1 , für $x_2 = \beta/4$. $|\psi_+|^2$ hat lokale Maxima genau an den Stellen, für die der Wert der durchgezogenen Linie (Nenner) minus der gestrichelte Linie (Zähler) minimal wird. Dies ist genau dort der Fall, wo der Nenner eine nichtverschwindende zweite Ableitung hat: An den Stellen $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ und $a^{(3)}$.

Wir diskutieren die Exponenten $\hat{p}_{k,l}$ und \hat{q}_k und können diese wieder als Geraden interpretieren. Die Geraden $\hat{p}_{0,k}$, $\hat{p}_{k,N+1}$ und \hat{q}_k schneiden sich für alle $k = 1, \dots, N$ in genau einem Punkt, und zwar bei

$$b^{(k)} := \frac{\beta}{2\pi} \ln \left(\frac{\mu_0 \lambda_k - \mu_k \lambda_0}{\mu_{N+1} \lambda_k - \mu_k \lambda_{N+1}} \right). \quad (5.83)$$

Für $x_1 < b^{(k)}$ ist damit $\hat{p}_{0,k}$ größer als \hat{q}_k , für $x_1 > b^{(k)}$ ist $\hat{p}_{k,N+1}$ größer als \hat{q}_k . Der zeitabhängige \hat{q}_k -Term kann also höchstens in der Nähe von $b^{(k)}$ zur Summe im Zähler von $|\psi_+|^2$ beitragen, und zwar auch nur dann, wenn die anderen $p_{k,l}$ -Terme an dieser Stelle nicht wesentlich über $\hat{q}_k(b^{(k)})$ liegen.

Nehmen wir nun erst einmal an, dass die zeitabhängigen Beiträge vernachlässigbar sind, bzw. diskutieren wir den Schnitt $x_2 = \beta/4$. Dann ist der Zähler von $|\psi_+|^2$ in logarithmischer Darstellung stückweise linear in x_1 -Richtung und streng monoton wachsend. Auch seine Steigung ist monoton wachsend, die Funktion wird also für größer werdende x_1 immer steiler. Der Nenner $|w|^4$ ist ebenfalls monoton wachsend und in logarithmischer Darstellung stückweise linear und hat nur in der Nähe der Schnittstellen $a^{(k)}$ von größtem und zweitgrößtem Exponenten in $|w|^2$ eine nichtverschwindende zweite Ableitung⁶. Auch für $|w|^4$ gilt, dass die erste Ableitung monoton steigend ist, d. h. auch $\ln |w|^4$ wird für größer werdende x_1 immer steiler. Der Wert für $\ln |\psi_+|^2$ entspricht der Differenz von $\ln(|g|^2 |w|^2 - |g^\dagger w|^2)$ und $\ln |w|^4$. Damit können lokale Maxima von $|\psi_+|^2$ nur dort auftreten, wo $\ln |w|^2$ eine nichtverschwindende zweite Ableitung hat. In Abbildung 5.4 ist dies veranschaulicht. Mögliche Maximalstellen

⁶Dieser Sachverhalt war gerade der Grund für das Auftreten der Instantonkonstituenten, wie wir in Abschnitt 4.2.4 diskutiert haben.

von $|\psi_+|^2$ sind also genau die Stellen, an denen die Instantonkonstituenten lokalisiert sind. Falls die zeitabhängigen Beiträge nicht vernachlässigbar sind, tritt an der entsprechenden Stelle eine leichte Verschiebung der Maxima auf. Das Betragsquadrat supersymmetrisch gekoppelter fermionischer Nullmoden im Hintergrund der 1-Instantonlösung spaltet also wie die topologische Dichte in Konstituenten auf, die genau dort lokalisiert sind, wo auch die Instantonkonstituenten liegen.

Der Funktionswert dieser Maxima kann mit den Parametern μ_k eingestellt werden. Nehmen wir dazu an, dass die Instantonkonstituenten wohlsepariert sind und an den Stellen

$$a^{(k)} = -\frac{\beta \ln(\lambda_k/\lambda_{k-1})}{2\pi(\omega_k - \omega_{k-1})} \quad (5.84)$$

lokalisiert sind (vergleiche Abschnitt 4.2.4). Falls die Geraden $\hat{p}_{k,l}$ so liegen, dass an den Stellen $a^{(k)}$ jeweils $\hat{p}_{k-1,k}$ den wesentlichen Beitrag liefert, dann ist $|\psi_+|^2$ an diesen Stellen, genau wie die Instantonkonstituenten, von der Form $\cosh^{-2} [2\pi(\omega_k - \omega_{k-1})(x_1 - a^{(k)})/\beta]$. Der Wert von $|\psi_+|^2$ an der Stelle $a^{(k)}$ ist dann

$$\begin{aligned} \left| \psi_+ \left(a^{(k)} \right) \right|^2 &= e^{(\hat{p}_{k-1,k} - 2(p_{k-1} + p_k))(a^{(k)})} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_{k-1}\lambda_k - \mu_k\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-1}\lambda_k} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Umgekehrt können wir für vorgegebene Werte $A^{(k)}$ eine Parameterkombination μ_k finden, sodass $|\psi_+|^2$ bei $a^{(k)}$ den Wert $A^{(k)}$ annimmt, nämlich

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0, \\ \mu_k &= \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \mu_{k-1} - 2\lambda_k \sqrt{A^{(k)}}, \quad k = 1, \dots, N+1. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Verschiedene Beispiele sind in Abbildung 5.5 veranschaulicht. Für $A^{(k)} = \pi(\omega_k - \omega_{k-1})^2$ ist der Wert von $|\psi_+|^2$ bei $a^{(k)}$ gleich dem Wert der topologischen Ladungsdichte q an dieser Stelle. Die μ -Parameter von ψ_+ können also derart geschickt gewählt werden, dass $|\psi_+|^2$ die topologische Dichte $q(x)$ imitiert. Wie sich herausstellen wird, gilt für die Wahl der μ -Parameter in der Tat sogar, dass $|\psi_+|^2$ exakt gleich q ist. Wir wollen dies direkt ganz allgemein für einen Instanton-Hintergrund mit beliebiger topologischer Ladung $Q \geq 1$ zeigen und betrachten dazu die Nullmoden in diesem Hintergrund.

5.2.2 Supersymmetrische Nullmoden im Instanton-Hintergrund höherer Ladungen

Die rechtshändigen Lösungen der Dirac-Gleichung im Instanton-Hintergrund mit der Ladung Q sind von der Form

$$\psi_+(x) = \frac{1}{|w|} \left(1 - \frac{ww^\dagger}{|w|^2} \right) g(x_+), \quad (5.87)$$

mit

$$g(x_+) = \begin{pmatrix} \mu_0 e^{2\pi\omega_0 x_+/\beta} + \mu_{N+1} e^{2\pi x_+/\beta} & + \dots + \mu_{Q(N+1)} e^{2\pi\omega_{Q(N+1)} x_+/\beta} \\ \mu_1 e^{2\pi\omega_1 x_+/\beta} + \mu_{N+2} e^{2\pi\omega_{N+2} x_+/\beta} & + \dots + \mu_{(Q-1)(N+1)+1} e^{2\pi\omega_{(Q-1)(N+1)+1} x_+/\beta} \\ \vdots & \\ \mu_N e^{2\pi\omega_N x_+/\beta} + \mu_{2N+1} e^{2\pi\omega_{2N+1} x_+/\beta} & + \dots + \mu_{Q(N+1)-1} e^{2\pi\omega_{Q(N+1)-1} x_+/\beta} \end{pmatrix}. \quad (5.88)$$

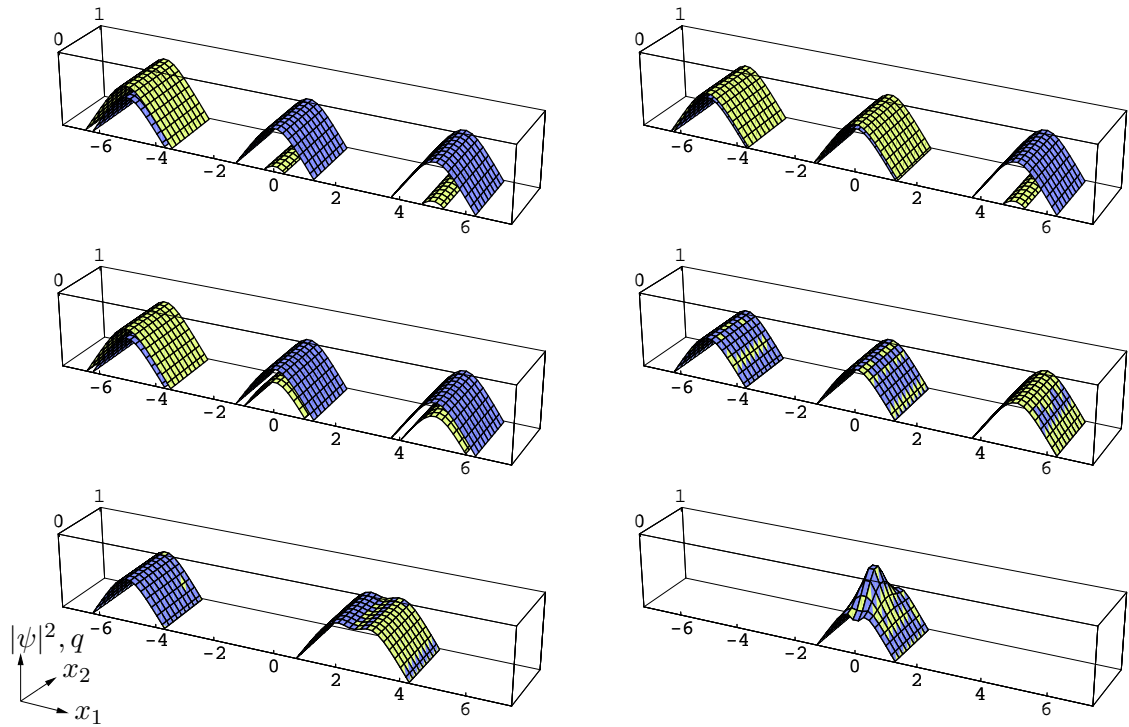


Abbildung 5.5: Betragsquadrat supersymmetrisch gekoppelter fermionischer Nullmoden (gelb) im Hintergrund von 1-Instantonkonstituenten (blau) am Beispiel des \mathbb{CP}^2 -Modells, in logarithmischer Darstellung über (x_1, x_2) in Einheiten von β aufgetragen. Die Instantonkonstituenten tragen in jedem der Fälle die Ladung $1/3$. Sie sind in den ersten beiden Zeilen bei $(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) = (-5, 0, 5)$ und in der letzten Zeile bei $(-5, 2, 3), (0, 0, 0)$ lokalisiert. Die fermionischen Parameter μ_k sind derart gewählt, dass die Integrale über die drei Nullmoden-Konstituenten von oben nach unten von links nach rechts in den ersten drei Beispielen gleich $(0.98, 0.01, 0.01)$, $(0.495, 0.495, 0.01)$, $(0.8, 0.1, 0.1)$ sind und im vierten bis sechsten Beispiel gleich dem Integral über die Instantonkonstituenten sind, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. In diesem Fall ist $|\psi_+|^2$ exakt gleich der topologischen Dichte $q(x)$. Dies gilt auch dann noch, wenn alle Konstituenten zum vollen zeitabhängigen 1-Instanton zusammengefügt werden.

Der Einfachheit halber nehmen wir wieder reelle Koeffizienten μ_k an. g ist von derselben Form wie die Instantonlösung w . Wir wollen untersuchen, ob es eine Parameterkombination gibt, bei der das Betragsquadrat

$$|\psi_+|^2 = \frac{|w|^2|g|^2 - |w^\dagger g|^2}{|w|^4} \quad (5.89)$$

mit der topologischen Dichte

$$q = \frac{1}{4\pi} \frac{|w|^2 \partial_\mu^2 |w|^2 - (\partial_\mu |w|^2)^2}{|w|^4} \quad (5.90)$$

übereinstimmt. Dazu schreiben wir q in einer zu $|\psi_+|^2$ analogen Form. Mit

$$\begin{aligned} \partial_\mu^2 |w|^2 &= 4\partial_+ \partial_- (w^\dagger w) \\ &= 4|\partial_+ w|^2, \\ (\partial_\mu |w|^2)^2 &= 4\partial_+ |w|^2 \partial_- |w|^2 \\ &= 4|w^\dagger \partial_+ w|^2, \end{aligned} \quad (5.91)$$

erhalten wir

$$q = \frac{1}{\pi} \frac{|w|^2 |\partial_+ w|^2 - |w^\dagger \partial_+ w|^2}{|w|^4}. \quad (5.92)$$

Wählen wir nun

$$\mu_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2\pi\omega_k}{\beta} \lambda_k, \quad k = 0, \dots, Q(N+1), \quad (5.93)$$

so gilt für die entsprechende Nullmode

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{\pi}|w|} \left(1 - \frac{ww^\dagger}{|w|^2} \right) \partial_+ w \quad (5.94)$$

die Relation

$$|\psi_+(x)|^2 = q(x). \quad (5.95)$$

Wir erhalten damit das folgende allgemeine Ergebnis: Für eine beliebige getwistete Instantonlösung w kann eine supersymmetrisch gekoppelte rechtshändige Nullmode ψ_+ angegeben werden, deren Betragsquadrat $|\psi_+|^2$ gleich der topologischen Dichte q der Instantonlösung ist. Dieses erstaunliche Resultat gilt vollkommen exakt für jeden Instanton-Hintergrund, da wir in unserer Rechnung von keiner Näherung ausgegangen sind. Insbesondere gilt unser Ergebnis z. B. auch für Lösungen, bei denen mehrere Instantonkonstituenten zu einem gemeinsamen Konstituenten zusammengefügt sind, oder für Lösungen mit zeitabhängiger topologischer Dichte.

5.2.3 Supersymmetrische Nullmoden und Half-BPS-Zustände

Die spezielle rechtshändige Nullmode ψ_+ , deren Betragsquadrat gleich der topologischen Dichte q ist, kann auch durch eine allgemeine Betrachtung, ohne die Dirac-Gleichung lösen

5 Fermionische Nullmoden im Instanton-Hintergrund

zu müssen, erhalten werden. Diese Nullmode wird nämlich gerade durch die gebrochene Supersymmetrie erzeugt. Betrachten wir die (2, 2)-Supersymmetrietransformationen

$$\begin{aligned}\delta z &= \epsilon_+ \psi_- - \epsilon_- \psi_+, \\ \delta \psi_+ &= -2i\bar{\epsilon}_- D_+ z + \bar{\epsilon}_- (\bar{\psi}_+ \psi_+) z - \bar{\epsilon}_+ (\bar{\psi}_- \psi_+) z, \\ \delta \psi_- &= 2i\bar{\epsilon}_+ D_- z - \bar{\epsilon}_+ (\bar{\psi}_- \psi_-) z + \bar{\epsilon}_- (\bar{\psi}_+ \psi_-) z.\end{aligned}\tag{5.96}$$

Transformiert man den Instantonzustand

$$\begin{aligned}z_{\text{inst}} &= \frac{w(x_+)}{|w(x_+)|}, \\ \psi_{\text{inst}} &= 0,\end{aligned}\tag{5.97}$$

so muss $\delta\psi_{\text{inst}}$ eine Nullmode des Dirac-Operators sein, da die Wirkung

$$S = 2\pi Q\tag{5.98}$$

und wegen $\psi_{\text{inst}} = 0$ auch das Feld z unter den Supersymmetrietransformationen (5.96) invariant sind. Da z die Selbstdualitätsgleichungen erfüllt,

$$D_\mu z = -i\varepsilon_{\mu\nu} D_\nu z \quad \Leftrightarrow \quad D_- z = 0,\tag{5.99}$$

verschwindet die linkshändige Komponente der so erzeugten Nullmode,

$$\delta\psi_-^{\text{inst}} = 0.\tag{5.100}$$

Mit

$$\begin{aligned}D_+ z &= \partial_+ z - (z^\dagger \partial_+ z) z \\ &= \frac{\partial_+ w}{|w|} - \frac{w^\dagger \partial_+ w}{|w|^2} \frac{w}{|w|} \\ &= \frac{1}{|w|} \left(1 - \frac{w w^\dagger}{|w|^2} \right) \partial_+ w\end{aligned}\tag{5.101}$$

erhalten wir aber für die rechtshändige Komponente

$$\begin{aligned}\delta\psi_+^{\text{inst}} &= -2i\bar{\epsilon}_- D_+ z \\ &= -2i\sqrt{\pi}\bar{\epsilon}_- \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}|w|} \left(1 - \frac{w w^\dagger}{|w|^2} \right) \partial_+ w \right].\end{aligned}\tag{5.102}$$

Bis auf Vorfaktoren entspricht die so erzeugte Nullmode damit gerade der von uns im vorigen Abschnitt erhaltenen speziellen Nullmode, deren Betragsquadrat gleich der topologischen Dichte $q(x)$ ist.

6 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit untersuchten wir Instantonlösungen des \mathbb{CP}^N -Modells sowie fermionische Nullmoden im Instanton-Hintergrund für den Fall minimaler und supersymmetrischer Kopplung. Wie in der vierdimensionalen $SU(N)$ -Yang-Mills-Theorie [KvB98] spaltet sich auch im \mathbb{CP}^N -Modell bei endlichen Temperaturen die topologische Ladungsdichte für Instantonen mit getwisteten Randbedingungen und der topologischen Ladung Q in maximal $Q(N+1)$ Konstituenten auf. Diese von Bruckmann bereits im \mathbb{CP}^1 -Modell gefundenen Lösungen der Selbstdualitätsgleichungen [Bru08] konnten nun für beliebige $N \geq 1$ und für beliebige $Q \geq 1$ in exakter analytischer Form berechnet werden. Falls die Instantonen periodisch bis auf die Phase $e^{2\pi i \omega_k}$ mit $\omega_k \in (0, 1)$ sind, so tragen die einzelnen Konstituenten gebrochene Ladungen, die durch die Differenzen jeweils zweier ω_k 's gegeben sind. Durch entsprechende Wahl der Moduli-Parameter können die Positionen der Konstituenten beliebig verschoben werden. Wie wir zeigen konnten, sind wohlseparierte Konstituenten stets statisch. Erst wenn man mindestens $s(N+1)$ Konstituenten, $s = 1, 2, \dots, Q$, zu einem vollen Instanton der Ladung s zusammenfügt, wird die topologische Dichte zeitabhängig. Gemessen in Einheiten der kleinstmöglichen Frequenz ist die zur Zeitabhängigkeit maximal beitragende Frequenz dann durch s gegeben.

Die Nullmoden des Dirac-Operators im Hintergrund der getwisteten Instantonlösungen können für beliebige Phasen in den fermionischen Randbedingungen explizit angegeben werden. Im Falle minimaler Kopplung existieren keine normierbaren linkshändigen Nullmoden und Q normierbare rechtshändige Nullmoden. Wie wir gesehen haben, sind sie an den gleichen Stellen wie die Instantonkonstituenten lokalisiert und können gewissermaßen von einem Konstituenten zum benachbarten Konstituenten springen, falls die fermionischen Randbedingungen entsprechend geändert werden. Dieses Verhalten ist analog zu den Nullmoden in der $SU(N)$ -Yang-Mills-Theorie [GPGAPvB99]. Einen feinen Unterschied sehen wir allerdings beim Springen der Nullmode von einem zum nächsten Instantonkonstituenten: Während die $SU(N)$ -Nullmode in diesem Fall zwischen den Konstituenten ein lokales Minimum hat, so erstreckt sich die \mathbb{CP}^N -Nullmode von einem zum anderen Konstituenten und ist in diesem Bereich ggf. sogar konstant.

Mithilfe des $\mathcal{N} = (2, 2)$ -Superraumformalismus konnten wir die supersymmetrische Erweiterung des \mathbb{CP}^N -Modells in Minkowski-Raumzeit und in euklidischer Raumzeit konstruieren. In diesem Formalismus ist die Invarianz des Modells unter Supersymmetrietransformationen und unter $U(1)$ -Eichtransformationen manifest, sodass wir insbesondere die Supersymmetrie nicht explizit nachweisen mussten. Zur Kontrolle haben wir aber die erhaltenen Ergebnisse mit Originalartikeln verglichen. Im Hintergrund der getwisteten Instantonlösungen konnten die Nullmoden des (linearisierten) supersymmetrischen Dirac-Operators in exakter analytischer Form berechnet werden. Es existieren keine normierbaren linkshändigen Lösungen und $Q(N+1)$ normierbare rechtshändige Lösungen der Dirac-Gleichung. Diese sind stets bei den Instantonkonstituenten lokalisiert und springen nicht mehr zwischen diesen, da der fermionische Twist durch die Supersymmetrietransformationen fixiert ist. Mit den verbleibenden freien Parametern kann die relative Größe der Nullmoden eingestellt werden. Für eine be-

stimmte Wahl erhalten wir eine spezielle Nullmode, deren Betragsquadrat exakt gleich der topologischen Dichte des Instanton-Hintergrundes ist. Wie wir zeigen konnten, wird diese spezielle Nullmode gerade durch die gebrochene Supersymmetrie erzeugt. Dass eine solche Nullmode auftritt, könnte mit einer zentralen Ladung in der Supersymmetriealgebra zusammenhängen. Im $(2 + 1)$ -dimensionalen \mathbb{CP}^N -Modell tritt z. B. gerade eine zentrale Ladung auf, die aus der topologischen Ladung und einem eichvarianten Term besteht [Aoy80, Rou80].

Das Aufspalten der Instantonen in Konstituenten sollte auch eine Relevanz für das Verständnis der physikalischen Mechanismen des \mathbb{CP}^N -Modells haben [Bru08]. Um dies zu untersuchen, müssten Quantenfluktuationen um die Instantonlösungen betrachtet werden. In analytischer Form wäre dies z. B. mithilfe der $1/N$ -Entwicklung möglich. In Ergänzung dazu wäre es interessant, das Modell auf dem Gitter zu simulieren. Insbesondere sollten dabei auch die Konstituenten beobachtet werden können, sodass die numerischen Ergebnisse insofern mit den hier erhaltenen analytischen Ergebnissen vergleichbar wären. Für die $SU(N)$ -Yang-Mills-Instantonen konnte ein entsprechender Vergleich mithilfe von „improved cooling“ angestellt werden [GPGAMvB99]. Für die \mathbb{CP}^N -Instantonen ist dies derzeit in Bearbeitung.

A Konventionen

A.1 Einheiten

Wir verwenden natürliche Einheiten

$$\hbar = c = 1. \quad (\text{A.1})$$

Damit können Energien, Impulse und Massen in der gleichen Einheit gemessen werden,

$$[E] = [p] = [m] = \text{GeV}. \quad (\text{A.2})$$

Zeiten und Längen haben inverse Massendimension,

$$[t] = [l] = [m^{-1}] = \text{GeV}^{-1}. \quad (\text{A.3})$$

Mithilfe der Umrechnungsformel

$$1 = \hbar c = 0.197 \text{ GeV fm} \quad (\text{A.4})$$

können physikalische Größen zwischen natürlichen Einheiten und SI-Einheiten umgerechnet werden.

A.2 Metrik und Dirac-Matrizen

Minkowski-Raumzeit. In Minkowski-Raumzeit benutzen wir die Metrik

$$(\eta^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

und die Dirac-Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_* = -\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Die Komponenten des Spinors ψ bezeichnen wir mit

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

und die des adjungierten Spinors $\bar{\psi}$ mit

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\bar{\psi}_+ \quad \bar{\psi}_-). \quad (\text{A.8})$$

Damit gilt

$$(\psi_\pm)^* = \bar{\psi}_\pm. \quad (\text{A.9})$$

Die Lichtkegelkoordinaten x^\pm sind

$$x^\pm = x^0 \pm x^1, \quad \partial_\pm = \frac{1}{2} (\partial_0 \pm \partial_1). \quad (\text{A.10})$$

Euklidische Raumzeit. In euklidischer Raumzeit mit der Metrik

$$(\delta^{\mu\nu}) = (\delta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

verwenden wir die Dirac-Matrizen

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_* = -i\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Die zwei Komponenten des Spinors ψ bezeichnen wir ebenso mit

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

und die Komponenten des adjugierten Spinors $\bar{\psi}$ mit

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger = (\bar{\psi}_+ \quad \bar{\psi}_-). \quad (\text{A.14})$$

Damit gilt im Gegensatz zur Minkowski-Raumzeit

$$(\psi_\pm)^* = \bar{\psi}_\mp. \quad (\text{A.15})$$

Die Koordinaten x^\pm sind hier

$$x^\pm = x^1 \pm ix^2, \quad \partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_1 \mp i\partial_2). \quad (\text{A.16})$$

A.3 Supersymmetriegeneratoren

Die $\mathcal{N} = (2, 2)$ -Supersymmetriegeneratoren sind

$$\begin{aligned} Q_\pm &= \frac{\partial}{\partial\theta^\pm} + i\bar{\theta}^\pm\partial_\pm, \\ \bar{Q}_\pm &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\pm} - i\theta^\pm\partial_\pm. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Sie erzeugen die Supersymmetrietransformationen in Minkowski-Raumzeit

$$\delta_{\text{Mink.}} = \epsilon_+ Q_- - \epsilon_- Q_+ - \bar{\epsilon}_+ \bar{Q}_- + \bar{\epsilon}_- \bar{Q}_+, \quad (\text{A.18})$$

bzw. in euklidischer Raumzeit

$$\delta_{\text{Eukl.}} = \epsilon_+ Q_- - \epsilon_- Q_+ + \bar{\epsilon}_+ \bar{Q}_- - \bar{\epsilon}_- \bar{Q}_+. \quad (\text{A.19})$$

B Vergleich der Ergebnisse mit der Originalliteratur

B.1 $O(N)$ -Modell in Minkowski-Raumzeit

Wir wollen unser Ergebnis für das supersymmetrische $O(N)$ -Modell in Minkowski-Raumzeit mit der Originalliteratur von Witten [Wit77] vergleichen. Dort werden die Gamma-Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

verwendet. Die Wirkung hat die Form

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \partial^\mu n^i \partial_\mu n^i + i \bar{\psi}^i \gamma^\mu \partial_\mu \psi^i + (F^i)^2 \right\} \quad (\text{B.2})$$

mit den reellen Felder n^i , ψ^i und F^i , $i = 1, \dots, N$. Sie müssen den Nebenbedingungen

$$n^i n^i = 1, \quad n^i \psi^i = 0, \quad n^i F^i = \frac{1}{2} \bar{\psi}^i \psi^i, \quad (\text{B.3})$$

genügen. Wir schreiben die Ausdrücke in den Komponenten von

$$\psi^i = \begin{pmatrix} \psi_1^i \\ \psi_2^i \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}^i = (\psi^i)^T \gamma^0 = (i\psi_2^i \quad -i\psi_1^i), \quad (\text{B.4})$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^i \psi^i &= 2i\psi_2^i \psi_1^i, \\ \bar{\psi}^i \gamma^\mu \partial_\mu \psi^i &= \psi_2^i (\partial_0 - \partial_1) \psi_2^i + \psi_1^i (\partial_0 + \partial_1) \psi_1^i. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Damit ist die Wirkung von der Form

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \partial^\mu n^i \partial_\mu n^i + 2i\psi_2^i \frac{1}{2} (\partial_0 - \partial_1) \psi_2^i + 2i\psi_1^i \frac{1}{2} (\partial_0 + \partial_1) \psi_1^i + (F^i)^2 \right\}, \quad (\text{B.6})$$

mit den Nebenbedingungen

$$n^i n^i = 1, \quad n^i \psi_\alpha^i = 0, \quad \psi_2^i \psi_1^i + i n^i F^i = 0. \quad (\text{B.7})$$

Das Modell ist invariant unter den Supersymmetrietransformationen

$$\begin{aligned} \delta n^i &= \bar{\epsilon} \psi^i, \\ \delta \psi^i &= \epsilon F^i - i \gamma^\mu \epsilon \partial_\mu n^i, \\ \delta F^i &= -i \bar{\epsilon} \gamma^\mu \partial_\mu \psi^i, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

wobei ϵ ein konstanter reeller Spinor ist¹. In Spinor-Komponenten geschrieben lautet die Transformation

$$\begin{aligned}\delta n^i &= -i\epsilon_1\psi_2^i + i\epsilon_2\psi_1^i, \\ \delta\psi_1^i &= \epsilon_1 F^i - 2\epsilon_2\partial_- n^i, \\ \delta\psi_2^i &= \epsilon_2 F^i + 2\epsilon_1\partial_+ n^i, \\ \delta F^i &= -2i\epsilon_1\partial_+\psi_1^i - 2i\epsilon_2\partial_-\psi_2^i.\end{aligned}\tag{B.9}$$

Identifizieren wir

$$\psi_1^i \rightsquigarrow \psi_-^i, \quad \psi_2^i \rightsquigarrow \psi_+^i, \quad \epsilon_1 \rightsquigarrow -\epsilon_-, \quad \epsilon_2 \rightsquigarrow -\epsilon_+, \tag{B.10}$$

so stimmen unsere Ergebnisse mit den Wittenschen Ergebnissen für die Wirkung (3.10), die Nebenbedingung (3.13) und die Supersymmetrietransformationen (3.14) überein.

B.2 $O(N)$ -Modell in euklidischer Raumzeit

Auch die Konstruktion des euklidischen $O(N)$ -Modells wird in der Literatur behandelt und wir wollen auch für dieses Modell unser Ergebnis vergleichen. Bei Di Vecchia und Ferrara [DVF77] werden die Gamma-Matrizen

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_* = \gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.11}$$

verwendet. Die dort erhaltene Wirkung ist²

$$S = -\frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \partial^\mu n^i \partial_\mu n^i - i\bar{\chi}^i \gamma^\mu \partial_\mu \chi^i - (F^i)^2 \right\}, \tag{B.12}$$

mit den Nebenbedingungen

$$n^i n^i = 1, \quad n^i \chi^i = 0, \quad -\frac{i}{2} \bar{\chi}^i \gamma_* \chi^i + n^i F^i = 0, \tag{B.13}$$

wobei für die Felder die Realitätsbedingungen

$$(n^i)^* = n^i, \quad \bar{\chi}^i = (\chi^i)^\dagger = (\chi^i)^T, \quad (F^i)^* = F^i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{B.14}$$

gelten. Das Modell ist invariant unter den Supersymmetrietransformationen

$$\begin{aligned}\delta n^i &= i\bar{\epsilon}\chi^i, \\ \delta\chi^i &= (\gamma^\mu \partial_\mu n^i + \gamma_* F^i) \epsilon, \\ \delta F^i &= i\bar{\epsilon}\gamma_* \gamma^\mu \partial_\mu \chi^i.\end{aligned}\tag{B.15}$$

¹In der Originalausgabe [Wit77] fehlt das Minuszeichen auf der rechten Seite von Gleichung (B.8c). Durch Nachrechnen stellt man schnell fest, dass es sich dabei offenbar um einen Druckfehler handelt.

²Dass diese Wirkung nicht nach unten beschränkt ist, sollte uns nicht zu sehr stören: Ein euklidisches Pfadintegral kann, sofern die Wirkung wenigstens nach oben beschränkt ist, trotzdem sinnvoll mit $-S$ über $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{S[\phi]}$ definiert werden.

Wir führen die Komponenten

$$\psi_{\pm}^i := \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_2^i \pm i\chi_1^i) \quad (\text{B.16})$$

ein, die $(\psi_{\pm})^* = \psi_{\mp}$ erfüllen. Die Umkehrtransformation ist

$$\begin{aligned} \chi_1^i &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_+^i - \psi_-^i), \\ \chi_2^i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+^i + \psi_-^i). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Damit erhalten wir für den kinetischen Term für die Fermionen

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \chi^i &= (\chi_1^i \quad \chi_2^i) \begin{pmatrix} \partial_1 \chi_1^i + \partial_2 \chi_2^i \\ -\partial_1 \chi_2^i + \partial_2 \chi_1^i \end{pmatrix} \\ &= \chi_1^i \partial_1 \chi_1^i + \chi_1^i \partial_2 \chi_2^i - \chi_2^i \partial_1 \chi_2^i + \chi_2^i \partial_2 \chi_1^i \\ &= -\frac{1}{2} [(\psi_+^i - \psi_-^i) \partial_1 (\psi_+^i - \psi_-^i) + i(\psi_+^i - \psi_-^i) \partial_2 (\psi_+^i + \psi_-^i) \\ &\quad + (\psi_+^i + \psi_-^i) \partial_1 (\psi_+^i + \psi_-^i) + i(\psi_+^i + \psi_-^i) \partial_2 (\psi_+^i - \psi_-^i)] \\ &= -(\psi_+^i \partial_1 \psi_+^i + \psi_-^i \partial_1 \psi_-^i + i\psi_+^i \partial_2 \psi_+^i - i\psi_-^i \partial_2 \psi_-^i) \\ &= -2(\psi_+^i \partial_- \psi_+^i + \psi_-^i \partial_+ \psi_-^i), \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

und für die Nebenbedingung

$$\frac{i}{2} \bar{\chi}^i \gamma_* \chi^i = i\chi_1^i \chi_2^i = \frac{1}{2} (\psi_+^i - \psi_-^i) (\psi_+^i + \psi_-^i) = \psi_+^i \psi_-^i. \quad (\text{B.19})$$

Somit hat die Wirkung die Form

$$S = -\frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \partial^{\mu} n^i \partial_{\mu} n^i + 2i\psi_+^i \partial_- \psi_+^i + 2i\psi_-^i \partial_+ \psi_-^i - (F^i)^2 \right\}, \quad (\text{B.20})$$

mit den Nebenbedingungen

$$n^i n^i = 1, \quad n^i \psi_{\pm}^i = 0, \quad -\psi_+^i \psi_-^i + n^i F^i = 0. \quad (\text{B.21})$$

Die Supersymmetrietransformationen können dann mit

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} \chi^i &= -\frac{1}{2} (\epsilon_+ - \epsilon_-) (\psi_+^i - \psi_-^i) + \frac{1}{2} (\epsilon_+ + \epsilon_-) (\psi_+^i + \psi_-^i) \\ &= \epsilon_+ \psi_-^i + \epsilon_- \psi_+^i, \\ \delta \psi_+^i - \delta \psi_-^i &= 2\epsilon_+ \partial_- n^i - 2\epsilon_- \partial_+ n^i + i(\epsilon_+ + \epsilon_-) F^i, \\ \delta \psi_+^i + \delta \psi_-^i &= -2\epsilon_+ \partial_- n^i - 2\epsilon_- \partial_+ n^i + i(\epsilon_+ - \epsilon_-) F^i, \\ \bar{\epsilon} \gamma_* \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \chi^i &= -\epsilon_1 \partial_1 \chi_2^i - \epsilon_2 \partial_1 \chi_1^i + \epsilon_1 \partial_2 \chi_1^i - \epsilon_2 \partial_2 \chi_2^i \\ &= 2i\epsilon_+ \partial_- \psi_+^i - 2i\epsilon_- \partial_+ \psi_-^i, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

in der Form

$$\begin{aligned} \delta n^i &= i\epsilon_+ \psi_-^i + i\epsilon_- \psi_+^i, \\ \delta \psi_{\pm}^i &= \pm i\epsilon_{\pm} F^i - 2\epsilon_{\mp} \partial_{\pm} n^i, \\ \delta F^i &= -2\epsilon_+ \partial_- \psi_+^i + 2\epsilon_- \partial_+ \psi_-^i, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

geschrieben werden. Machen wir die Umbenennung $F^i \rightsquigarrow -F^i$, so ergeben sich bis auf das Vorzeichen in der Wirkung genau die von uns erhaltenen Ergebnisse für die Wirkung (3.24) und die Nebenbedingungen (3.23) des euklidischen $O(N)$ -Modells.

B.3 \mathbb{CP}^N -Modell in euklidischer Raumzeit

Wir vergleichen unser Ergebnis für das \mathbb{CP}^N -Modell mit der Originalliteratur von D'Adda, Di Vecchia und Lüscher [DLDV79]. Mit den Gamma-Matrizen

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_* = \gamma^1 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.24})$$

erhält man dort die supersymmetrisch invariante Wirkung

$$S = \int d^2x \left\{ \partial^\mu \bar{z} \partial_\mu z - i \bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi + i (\bar{\chi} \gamma^\mu \chi) (\bar{z} \partial_\mu z) + (\bar{z} \partial^\mu z) (\bar{z} \partial_\mu z) + \frac{1}{4} \left[(\bar{\chi} \chi)^2 + (\bar{\chi} \gamma_* \chi)^2 - (\bar{\chi} \gamma^\mu \chi) (\bar{\chi} \gamma_\mu \chi) \right] \right\}, \quad (\text{B.25})$$

mit den Nebenbedingungen

$$\bar{z} z = 1, \quad \bar{z} \chi = \bar{\chi} z = 0. \quad (\text{B.26})$$

Die (1,1)-Supersymmetrietransformationen lauten

$$\begin{aligned} \delta z &= i \bar{\epsilon} \chi, \\ \delta \chi &= -\frac{1}{2} i \epsilon (\bar{\chi} \chi) z + \frac{1}{2} i \gamma_* \epsilon (\bar{\chi} \gamma_* \chi) z + \gamma^\mu \epsilon \left[D_\mu - \frac{1}{2} i (\bar{\chi} \gamma_\mu \chi) \right] z, \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

mit dem reellen Supersymmetrieparameter ϵ und der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - \bar{z} \partial_\mu z. \quad (\text{B.28})$$

Wie in Abschnitt B.2 führen wir wieder die Felder ψ_\pm und $\bar{\psi}_\pm$ ein,

$$\psi_\pm := \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_2 \pm i \chi_1), \quad (\text{B.29})$$

und damit

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (\psi_+ - \psi_-), \\ \chi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_+ + \psi_-). \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Diese erfüllen $(\psi_\pm)^* = \bar{\psi}_\mp$, wobei $(\chi_\alpha)^* = \bar{\chi}_\alpha$ gilt. Die einzelnen Terme in der Wirkung sind dann

$$-i \bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi = 2i (\bar{\psi}_+ \partial_- \psi_+ + \bar{\psi}_- \partial_+ \psi_-), \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} \bar{\chi} \gamma^1 \chi &= \bar{\chi}_1 \chi_1 - \bar{\chi}_2 \chi_2 \\ &= -\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \bar{\chi} \gamma^2 \chi &= \bar{\chi}_1 \chi_2 + \bar{\chi}_2 \chi_1 \\ &= -i \bar{\psi}_+ \psi_+ + i \bar{\psi}_- \psi_-, \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$i (\bar{\chi} \gamma^\mu \chi) (\bar{z} \partial_\mu z) = -2i (\bar{\psi}_+ \psi_+) (\bar{z} \partial_- z) - 2i (\bar{\psi}_- \psi_-) (\bar{z} \partial_+ z), \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned}
 (\bar{\chi}\chi)^2 &= (\bar{\chi}_1\chi_1 + \bar{\chi}_2\chi_2)^2 \\
 &= (\bar{\psi}_-\psi_+ + \bar{\psi}_+\psi_-)^2, \\
 &= (\bar{\psi}_-\psi_+)^2 + (\bar{\psi}_+\psi_-)^2 + 2(\bar{\psi}_-\psi_+)(\bar{\psi}_+\psi_-), \tag{B.35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\bar{\chi}\gamma_*\chi)^2 &= (\bar{\chi}_1\chi_2 - \bar{\chi}_2\chi_1)^2 \\
 &= (i\bar{\psi}_-\psi_+ - i\bar{\psi}_+\psi_-)^2, \\
 &= -(\bar{\psi}_-\psi_+)^2 - (\bar{\psi}_+\psi_-)^2 + 2(\bar{\psi}_-\psi_+)(\bar{\psi}_+\psi_-), \tag{B.36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -(\bar{\chi}\gamma^\mu\chi)(\bar{\chi}\gamma_\mu\chi) &= -(\bar{\chi}\gamma^1\chi)^2 - (\bar{\chi}\gamma^2\chi)^2 \\
 &= -4(\bar{\psi}_+\psi_+)(\bar{\psi}_-\psi_-). \tag{B.37}
 \end{aligned}$$

Damit ist die Wirkung von der Form

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^2x \{ \partial^\mu \bar{z} \partial_\mu z + 2i\bar{\psi}_+ \partial_- \psi_+ + 2i\bar{\psi}_- \partial_+ \psi_- + (\bar{z} \partial^\mu z)(\bar{z} \partial_\mu z) - 2i(\bar{z} \partial_+ z)(\bar{\psi}_- \psi_-) \\
 &\quad - 2i(\bar{z} \partial_- z)(\bar{\psi}_+ \psi_+) - (\bar{\psi}_+ \psi_+)(\bar{\psi}_- \psi_-) + (\bar{\psi}_- \psi_+)(\bar{\psi}_+ \psi_-) \}, \tag{B.38}
 \end{aligned}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\bar{z}z = 1, \quad \bar{z}\psi_\pm = \bar{\psi}_\pm z = 0. \tag{B.39}$$

Die dazugehörigen $(1, 1)$ -Supersymmetrietransformationen ergeben sich mit

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(\epsilon_+ - \epsilon_-), \\
 \epsilon_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_+ + \epsilon_-), \tag{B.40}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \delta\chi_1 &= -\frac{1}{2}i\epsilon_1(\bar{\chi}\chi)z + \frac{1}{2}i\epsilon_2(\bar{\chi}\gamma_*\chi)z + \epsilon_1 \left[D_1 - \frac{1}{2}i(\bar{\chi}\gamma^1\chi) \right] z + \epsilon_2 \left[D_2 - \frac{1}{2}i(\bar{\chi}\gamma^2\chi) \right] z, \\
 \delta\chi_2 &= -\frac{1}{2}i\epsilon_2(\bar{\chi}\chi)z - \frac{1}{2}i\epsilon_1(\bar{\chi}\gamma_*\chi)z - \epsilon_2 \left[D_1 - \frac{1}{2}i(\bar{\chi}\gamma^1\chi) \right] z + \epsilon_1 \left[D_2 - \frac{1}{2}i(\bar{\chi}\gamma^2\chi) \right] z, \tag{B.41}
 \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned}
 \delta z &= i\epsilon_- \psi_+ + i\epsilon_+ \psi_-, \\
 \delta\psi_+ &= -i\epsilon_+(\bar{\psi}_-\psi_+)z - i\epsilon_-(\bar{\psi}_+\psi_+)z - 2\epsilon_- D_+^z z, \\
 \delta\psi_- &= -i\epsilon_-(\bar{\psi}_+\psi_-)z - i\epsilon_+(\bar{\psi}_-\psi_-)z - 2\epsilon_+ D_-^z z, \tag{B.42}
 \end{aligned}$$

wobei

$$D_\pm^z = \frac{1}{2}(D_1 \mp iD_2) = \partial_\pm - \bar{z}\partial_\pm z. \tag{B.43}$$

In dieser Form stimmen Wirkung, Nebenbedingungen und Supersymmetrietransformationen genau mit unseren Ergebnissen aus Abschnitt 3.4 überein.

B Vergleich der Ergebnisse mit der Originalliteratur

C Quantentheorie bei endlichen Temperaturen

Wir wollen noch begründen, weshalb man in euklidischen Modellen mit periodischer Zeitrichtung von endlichen Temperaturen spricht. In der Quantenmechanik wird die Zeitentwicklung eines Zustandes $|\psi(t)\rangle$ durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben,

$$i\partial_t|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle. \quad (\text{C.1})$$

Sie lässt sich (unter der Annahme, dass H nicht zeitabhängig ist) formal lösen durch

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle, \quad (\text{C.2})$$

bzw. in Ortsdarstellung

$$\begin{aligned} \langle q'|\psi(t)\rangle &= \int dq \langle q'|e^{-iHt}|q\rangle \langle q|\psi(0)\rangle \\ &= \int dq K(t, q', q)\psi(0, q). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Dabei haben wir den Zeitentwicklungskern K eingeführt. $K(t, q', q)$ gibt die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Propagation von q zur Zeit 0 nach q' zur Zeit t an,

$$K(t, q', q) = \langle q'|e^{-iHt}|q\rangle. \quad (\text{C.4})$$

Man kann zeigen [Wip07], dass sich $K(t, q', q)$ als ein Pfadintegral schreiben lässt,

$$K(t, q, q') = \int_{q(0)=q}^{q(t)=q'} \mathcal{D}q e^{iS[q]}. \quad (\text{C.5})$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Propagation eines Teilchens von q nach q' als Summe der Wahrscheinlichkeitsamplituden *aller* Wege von q nach q' geschrieben werden kann. Ein quantenmechanisches Teilchen läuft demnach gewissermaßen nicht auf *einem* Weg von A nach B, sondern auf allen Wegen gleichzeitig. Dies ist in Abbildung C.1 veranschaulicht.

Betrachten wir nun z. B. ein pVT -System¹, das mit seiner Umgebung im thermodynamischen Gleichgewicht ist und die Umgebungstemperatur T annimmt. Die Teilchenzahl N im System sei fest. Alle thermodynamischen Größen eines solchen Systems lassen sich aus der freien Energie $F = F(T, V, N)$ als Potential berechnen, wobei

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (\text{C.6})$$

¹Dieses System wollen wir mithilfe der Quantenstatistik beschreiben.

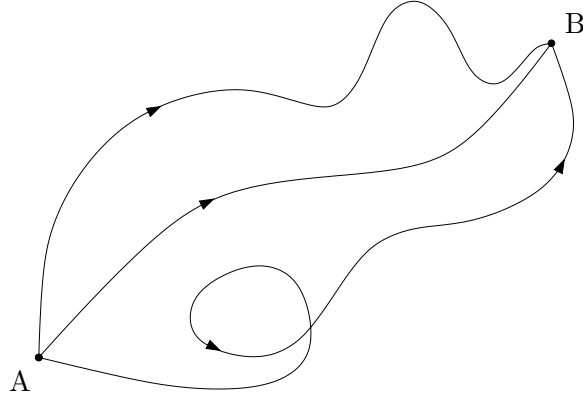


Abbildung C.1: Drei der Wege, die zur Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Propagation eines Teilchens vom Punkt A nach B beitragen.

mit der Boltzmann-Konstanten $k_B = 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$ und der kanonischen Zustandsumme

$$Z = \text{tr} \left(e^{-\beta H} \right), \quad (\text{C.7})$$

und dem Hamiltonoperator H . Benutzen wir die Ortsraum-Darstellung der Spur,

$$Z = \int dq \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle, \quad (\text{C.8})$$

und vergleichen mit unserem quantenmechanischen Zeitentwicklungskern $K(t, q', q)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} Z &= \int dq K(-i\beta, q, q) \\ &= \oint \mathcal{D}q e^{-S_E[q]} \quad \text{mit} \quad q(\tau = \beta) = q(0), \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

d. h. das Pfadintegral für imaginäre Zeiten $t \rightarrow -i\tau$. Diese formale Ersetzung entspricht einem Übergang von der Minkowski-Raumzeit in die euklidische Raumzeit². Man kann (z. B. durch Diskretisierung der Raumzeit) zeigen, dass dabei die Minkowski-Wirkung S nach iS_E übergeht, wobei S_E die euklidische Wirkung ist. Da im auftretenden Kern $q = q'$ ist, wird in dessen Pfadintegraldarstellung über die periodischen Wege von q nach q integriert. Wegen der anschließenden Integration über q ergibt sich dann das Pfadintegral über alle periodischen Wege [Wip07].

Schränkt man die Zeitrichtung in einer Quantenmechanik (mit imaginären Zeiten) auf ein endliches Intervall $[0, \beta]$ ein und identifiziert man $\tau \sim \tau + \beta$ (d. h. man fordert periodische Randbedingungen), so spricht man deshalb auch von einer Quantenmechanik bei endlicher Temperatur, wobei die Temperatur der Theorie mit der inversen Zeitperiode identifiziert wird, $k_B T = 1/\beta$. Analog spricht man auch bei (euklidischen) Quantenfeldtheorien mit endlichen Zeitintervallen und periodischen Randbedingungen von endlichen Temperaturen.

²Man spricht auch von einer Wick-Rotation.

D Mathematica-Notebook zur Darstellung der Nullmoden

Die Abbildungen zu den Instantonkonstituenten und den Nullmoden wurden mit der Software Mathematica erstellt. Dazu wurde, beispielsweise für die Erstellung von Abbildung 5.2, folgendes Notebook verwendet:

```

n := 2      (* model: CP(n) *)

a1 := -5    (* location of constituents *)
a2 := 0
a3 := 5

Ω1 := 1/3   (* size of constituents *)
Ω2 := 1/3
Ω3 := 1/3

ζ := 1/2    (* fermionic twist *)

λ[k_] := 1 /; k == 0
λ[k_] := Exp[-2π(a1Ω1)] /; k == 1
λ[k_] := Exp[-2π(a1Ω1 + a2Ω2)] /; k == 2
λ[k_] := Exp[-2π(a1Ω1 + a2Ω2 + a3Ω3)] /; k == 3

ω[k_] := 0 /; k == 0
ω[k_] := Ω1 /; k == 1
ω[k_] := Ω1 + Ω2 /; k == 2
ω[k_] := Ω1 + Ω2 + Ω3 /; k == 3

AbsW2[x_, y_] := Sum[λ[k]^2 Exp[4πω[k]x], {k, 0, n + 1}] + 2λ[n + 1] Exp[2πx] Cos[2πy]
q[x_, y_] := (D[Log[AbsW2[ξ, η]], {ξ, 2}] + D[Log[AbsW2[ξ, η]], {η, 2}]) / (4π)
           /. ξ → x /. η → y
ψ2[x_, y_] := Exp[4πζx] / AbsW2[x, y]
normψ2 := NIntegrate[ψ2[ξ, η], {ξ, -6, 6}, {η, 0, 1}]
logq[x_, y_] := Log[Max[q[x, y], Exp[-5.1]]]

p1 := Plot3D[logq[x, y], {x, -7, 7}, {y, 0, 1}, PlotRange → {-5, 2}, BoxRatios → {6, 1, 1},
  PlotPoints → {80, 10}, ViewPoint → {1.354, -2.758, 1.418},
  Ticks → {{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, {0, 1}, {}}, ColorFunction → (Hue[.65, .5, 1]&)]
p2 := Plot3D[Re[Log[ψ2[x, y] / normψ2]], {x, -7, 7}, {y, 0, 1}, PlotRange → {-5, 2},
  BoxRatios → {6, 1, 1}, PlotPoints → {80, 10}, ViewPoint → {1.354, -2.758, 1.418},
  Ticks → {{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, {0, 1}, {}}, ColorFunction → (Hue[.2, .5, 1]&)]
Show[{p1, p2}]

Export[\zeromodes_cp2_33_33_33_5_0_5_50.eps\, %]

```


Literaturverzeichnis

- [A⁺94] F. Abe et al. Evidence for Top Quark Production in $\bar{p}p$ Collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV. *Phys. Rev. Lett.*, 73:225–231, 1994.
- [Act85] A. Actor. Temperature Dependence of the CP^{N-1} Model and the Analogy with Quantum Chromodynamics. *Fortsch. Phys.*, 33:333–374, 1985.
- [Aff80a] I. Affleck. Testing the Instanton Method. *Phys. Lett.*, B92:149, 1980.
- [Aff80b] I. Affleck. The Role of Instantons in Scale Invariant Gauge Theories. *Nucl. Phys.*, B162:461, 1980.
- [Aff80c] I. Affleck. The Role of Instantons in Scale Invariant Gauge Theories (II). The Short-Distance Limit. *Nucl. Phys.*, B171:420–444, 1980.
- [Aoy80] S. Aoyama. The (2+1)-Dimensional Supersymmetric CP^{N-1} Model and the Central Charge. *Nucl. Phys.*, B168:354, 1980.
- [AS68] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The Index of Elliptic Operators. *Annals Math.*, 87:484–604, 1968.
- [Ber66] F. A. Berezin. *The Method of Second Quantization*. Academic Press, London, 1966.
- [BPST75] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Y. S. Tyupkin. Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations. *Phys. Lett.*, B59:85–87, 1975.
- [Bru07] F. Bruckmann. Topological Objects in QCD. *Eur. Phys. J. ST*, 152:61–88, 2007.
- [Bru08] F. Bruckmann. Instanton Constituents in the $O(3)$ Model at Finite Temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 100:051602, 2008.
- [Cha32] J. Chadwick. Possible Existence of a Neutron. *Nature*, 129:312, 1932.
- [CM67] S. R. Coleman and J. Mandula. All Possible Symmetries of the S-Matrix. *Phys. Rev.*, 159:1251–1256, 1967.
- [CS78] E. Cremmer and J. Scherk. The Supersymmetric Nonlinear Sigma Model in Four Dimensions and Its Coupling to Supergravity. *Phys. Lett.*, B74:341, 1978.
- [DLDV78] A. D’Adda, M. Lüscher, and P. Di Vecchia. A $1/n$ Expandable Series of Nonlinear Sigma Models with Instantons. *Nucl. Phys.*, B146:63–76, 1978.

- [DLDV79] A. D’Adda, M. Lüscher, and P. Di Vecchia. Confinement and Chiral Symmetry Breaking in CP^{n-1} Models with Quarks. *Nucl. Phys.*, B152:125–144, 1979.
- [DVF77] P. Di Vecchia and S. Ferrara. Classical Solutions in Two-Dimensional Supersymmetric Field Theories. *Nucl. Phys.*, B130:93, 1977.
- [DZ80] A. M. Din and W. J. Zakrzewski. General Classical Solutions in the CP^{n-1} Model. *Nucl. Phys.*, B174:397–406, 1980.
- [Eic78] H. Eichenherr. $SU(N)$ Invariant Nonlinear Sigma Models. *Nucl. Phys.*, B146:215–223, 1978.
- [Ein05] A. Einstein. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Ann. d. Phys.*, 322:132–148, 1905.
- [Ell07] J. R. Ellis. Beyond the Standard Model with the LHC. *Nature*, 448:297–301, 2007.
- [Fer34] E. Fermi. Versuch einer Theorie der β -Strahlen. *Zeitschr. f. Phys.*, A88:161–177, 1934.
- [Fey49] R. P. Feynman. Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, 76:769–789, 1949.
- [FGML73] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler. Advantages of the Color Octet Gluon Picture. *Phys. Lett.*, B47:365–368, 1973.
- [FIZ74] S. Ferrara, J. Iliopoulos, and B. Zumino. Supergauge Invariance and the Gell-Mann - Low Eigenvalue. *Nucl. Phys.*, B77:413, 1974.
- [FT81] D. Z. Freedman and P. K. Townsend. Antisymmetric Tensor Gauge Theories and Nonlinear Sigma Models. *Nucl. Phys.*, B177:282, 1981.
- [GJO80] E. Gava, R. Jengo, and C. Omero. Finite Temperature Approach to Confinement. *Nucl. Phys.*, B170:445, 1980.
- [GJO82] E. Gava, R. Jengo, and C. Omero. On the Instanton Effect in the Finite Temperature Yang-Mills Theory and in the Nonlinear Sigma Model. *Nucl. Phys.*, B200:107, 1982.
- [Gla61] S. L. Glashow. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588, 1961.
- [GP78] V. L. Golo and A.M. Perelomov. Solution of the Duality Equations for the Two-Dimensional $SU(N)$ Invariant Chiral Model. *Phys. Lett.*, B79:112, 1978.
- [GPGAMvB99] M. Garcia Perez, A. Gonzalez-Arroyo, A. Montero, and P. van Baal. Calorons on the Lattice: A New Perspective. *JHEP*, 06:001, 1999.
- [GPGAPvB99] M. Garcia Perez, A. Gonzalez-Arroyo, C. Pena, and P. van Baal. Weyl-Dirac Zero-Mode for Calorons. *Phys. Rev.*, D60:031901, 1999.

- [Gre03] J. Greensite. The Confinement Problem in Lattice Gauge Theory. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 51:1, 2003.
- [H⁺03] K. Hori et al. *Mirror Symmetry*. American Mathematical Society, 2003.
- [Hei25] W. Heisenberg. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschr. f. Phys.*, 33:879–893, 1925.
- [HLS75] R. Haag, J. T. Łopuszański, and M. Sohnius. All Possible Generators of Supersymmetries of the S-Matrix. *Nucl. Phys.*, B88:257, 1975.
- [KvB98] T. C. Kraan and P. van Baal. Monopole Constituents inside SU(n) Calorons. *Phys. Lett.*, B435:389–395, 1998.
- [Laz79] G. Lazarides. The Effect of Statistical Fluctuations on Confinement and on the Vacuum Structure of the CPⁿ⁻¹ Models. *Nucl. Phys.*, B156:29, 1979.
- [Nil84] H. P. Nilles. Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics. *Phys. Rept.*, 110:1–162, 1984.
- [NS77] N. K. Nielsen and B. Schroer. Axial Anomaly and Atiyah-Singer Theorem. *Nucl. Phys.*, B127:493, 1977.
- [Pla01] M. Planck. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. *Ann. d. Phys.*, 4:553–563, 1901.
- [Pol75] A. M. Polyakov. Compact Gauge Fields and the Infrared Catastrophe. *Phys. Lett.*, B59:82–84, 1975.
- [Pol77] A. M. Polyakov. Quark Confinement and Topology of Gauge Groups. *Nucl. Phys.*, B120:429–458, 1977.
- [Raj82] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons. An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [Rou80] S. Rouhani. The Central Charge in the Supersymmetric CP^{N-1} Model. *Nucl. Phys.*, B169:430, 1980.
- [Sch26] E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Ann. d. Phys.*, 384:361–376, 1926.
- [Sch48] J. S. Schwinger. On Quantum Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron. *Phys. Rev.*, 73:416–417, 1948.
- [SW64] A. Salam and J. C. Ward. Electromagnetic and Weak Interactions. *Phys. Lett.*, 13:168–171, 1964.
- [Uhl07] S. Uhlmann. Supersymmetrie II. Vorlesung an der Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2007.
- [WB92] J. Wess and J. Bagger. *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton University Press, 1992.

- [Wei67] S. Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.
- [Wip00] A. Wipf. Introduction to Supersymmetry. Vorlesung an der Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2000.
- [Wip07] A. Wipf. Quantenfeldtheorie II. Vorlesung an der Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2007.
- [Wit77] E. Witten. A Supersymmetric Form of the Nonlinear Sigma Model in Two Dimensions. *Phys. Rev.*, D16:2991, 1977.
- [Wit79] E. Witten. Instantons, the Quark Model, and the $1/n$ Expansion. *Nucl. Phys.*, B149:285, 1979.
- [Wit81] Edward Witten. Mass Hierarchies in Supersymmetric Theories. *Phys. Lett.*, B105:267, 1981.
- [Woo77] G. Woo. The Topology of Euclidean Higgs Fields. *J. Math. Phys.*, 18:1756, 1977.
- [WZ74] J. Wess and B. Zumino. A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations. *Phys. Lett.*, B49:52, 1974.
- [YM54] C.-N. Yang and R. L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, 1954.
- [ZM78] V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov. Relativistically Invariant Two-Dimensional Models in Field Theory Integrable by the Inverse Problem Technique. (In Russian). *Sov. Phys. JETP*, 47:1017–1027, 1978.
- [Zum79] B. Zumino. Supersymmetry and Kähler Manifolds. *Phys. Lett.*, B87:203, 1979.

Danksagung

Für die ausgezeichnete Betreuung möchte ich mich bei Prof. Dr. A. Wipf herzlich bedanken. Zum Gelingen dieser Arbeit haben seine nützlichen Anregungen, das geduldige Beantworten all meiner Fragen, sein stetes Interesse, und auch seine Offenheit gegenüber meinen eigenen Vorschlägen wesentlich beigetragen. Für die fruchtbringenden Ideen und hilfreichen Diskussionen, insbesondere im letzten Teil der Arbeit, bin ich auch Herrn Dr. Ulrich Theis dankbar.

Außerdem möchte ich der ganzen Arbeitsgruppe für die sehr angenehme und motivierende Atmosphäre danken. Insbesondere gilt dieser Dank Ulrich Harst: Die gemeinsame Bewältigung des Studiums, der Gedankenaustausch über Vorlesungen und Übungsaufgaben, aber auch die Diskurse über ganz alltägliche Dinge aus physikalisch-mathematischer Sicht haben mir viel Freude bereitet.

Es gibt eine Person, die diese Arbeit (fast) genauso gut kennt wie ich selbst. Für ihre ständige liebevolle Geduld, meine schier endlosen Erklärungen über Teilchen und Superteilchen, Instanton-Klumpen und die (uns beide) überraschende Erkenntnis, dass das fermionische Betragsquadrat gleich der bosonischen Dichte ist, zu ertragen, bin ich meiner Freundin Maria sehr dankbar.

Ganz besonders möchte ich meinen lieben Eltern danken. Ihre Unterstützung, die weit über das Finanzielle hinausgeht, ihre Anteilnahme und besonders ihr beständiges Beten für mich, waren die Grundlage für den erfolgreichen Abschluss meines Studiums.

Während der Anfertigung dieser Arbeit wurde ich von der Studienstiftung des deutschen Volkes gefördert.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die Arbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, 6. November 2008

Lukas Janssen

