

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut



seit 1558

Untersuchungen zu dimensional kompaktifizierten Super-Yang-Mills-Theorien

Diplomarbeit

zur Erlangung des
akademischen Grades eines
Diplom-Physikers (Dipl.-Phys.)

vorgelegt von Johannes Hartung,
geboren am 28.06.1983 in Mühlhausen/Thüringen

Jena, 15. Januar 2009

1. Gutachter: Prof. Dr. phil. habil. Andreas Wipf

2. Gutachter: Dr. rer. nat. habil. Thomas Heinzl

Tag der Verleihung des Diploms: 13.02.2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	11
2	Mathematische Grundlagen	15
2.1	Lie-Gruppen und Lie-Algebren	15
2.1.1	Lie-Gruppe	15
2.1.2	Lie-Algebra	16
2.1.3	Exponentialabbildung	17
2.1.4	Strukturkonstanten	17
2.1.5	Darstellungen von Gruppen	18
2.1.6	Darstellungen von Lie-Algebren	18
2.1.7	Killing-Form	19
2.1.8	Leiteroperatoren und Cartan-Generatoren	20
2.1.9	Haarmaß	21
2.1.10	Eigenschaften der Gruppe $SU(N_c)$	21
2.2	Spinoren in höheren Dimensionen	24
2.2.1	Clifford-Algebren	24
2.2.2	Irreduzible Spinoren	26
2.2.3	Fierz-Identität und bilineare Bildungen mit Majorana-Spinoren	27
3	Physikalische Vorbetrachtungen	29
3.1	$SU(N_c)$ -Yang-Mills-Theorien	29
3.2	$SU(N_c)$ -Super-Yang-Mills-Theorie	31
3.2.1	Vierdimensionale Theorie	31
3.2.2	Kaluza-Klein-Kompaktifizierung	33
3.3	Quantisierung und Pfadintegralformulierung	35
3.4	't Hooft-Limes und Phasenübergänge	36
4	Numerische Vorbetrachtungen	39
4.1	Monte-Carlo-Methoden	39
4.2	Algorithmen	42
4.2.1	Metropolis-Algorithmus	42
4.2.2	Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus	43
4.3	Wickrotation	44
4.4	Gittertheorie	46
4.4.1	Begriffe, Definitionen und Gitterstruktur	46
4.4.2	Gitterformulierung der Wirkungen	47
4.4.3	Ausintegration der Fermionen und effektive Wirkung	49
4.4.4	Bemerkungen zur Supersymmetrie auf dem Gitter	49
4.5	Auswertungsalgorithmen	50
4.5.1	Massenextraktion	50

4.5.2	Berechnung der Pfaffschen Determinante	53
4.6	Kontinuumslimes, 't Hooft-Limes und geeignete Simulationsparameter	54
5	Analytische Ergebnisse	57
5.1	Bosonischer Teil	57
5.1.1	Eichinvarianz von Observablen	57
5.1.2	Adjungierte Darstellung einer diagonalen $SU(N_c)$ -Matrix	58
5.1.3	Wirkungserwartungswerte der freien bosonischen Theorie	61
5.1.4	Ein-Schleifen-Näherung der bosonischen Theorie mit Eichfeld	64
5.1.5	Ableitung der bosonischen Wirkung für die HMC-Integration	66
5.2	Fermionischer Teil	67
5.2.1	Majorana-Fermionen in euklidischer, vierdimensionaler Raumzeit	67
5.2.2	Fermionische Zweipunktsfunktionen	73
5.2.3	Spektrum des freien, diskretisierten Dirac-Operators	75
5.2.4	Ein-Schleifen-Näherung der vollen Theorie mit Fermionen	78
5.2.5	Ableitung der fermionischen Wirkung für die HMC-Integration	79
5.3	Supersymmetrie	80
5.3.1	Majorana-Spinoren und Fierz-Identität in vier Dimensionen	81
5.3.2	Invarianz unter Supersymmetrie-Transformationen in vier Dimensionen	82
6	Numerische Ergebnisse	85
6.1	Performance-Analyse zur Berechnung der Pfaffschen Determinante	85
6.2	Bosonischer Sektor	86
6.2.1	Wirkungserwartungswerte	86
6.2.2	Extrahierte Massen der freien Theorie ohne Eichfeld	88
6.2.3	Extrahierte Massen der freien Theorie mit Eichfeld	91
6.2.4	Propagatoren der vollen bosonischen Theorie ohne Eichfeld	91
6.2.5	Kontinuumslimes für eine $SU(2)$ -Theorie mit $\beta = 8$	92
6.2.6	't Hooft-Limes der vollen bosonischen Theorie für $0,2 \leq \beta \leq 2$	94
6.3	Fermionischer Sektor	98
6.3.1	Extrahierte Fermionenmassen der freien Theorie	98
6.3.2	Analyse der Instabilitäten	99
6.3.3	Vergleich bosonische und volle $SU(4)$ -Theorie mit Fermionen	106
6.4	Supersymmetrie einer $SU(2)$ -Theorie	107
7	Zusammenfassung und Ausblick	111
7.1	Zusammenfassung	111
7.2	Ausblick	112
A	Konventionen	115
A.1	Bezeichnungen	115
A.2	Verschiedenes	115
B	Numerische Tests	117
B.1	Energieerhaltung Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus	117
B.1.1	Energieerhaltungsverletzung für die freie bosonische Theorie mit künstlicher Masse für die Bosonen	117

B.1.2	Energieerhaltungsverletzung für die Theorie mit Φ^4 -Wechselwirkung ohne künstliche Bosonenmasse	118
B.1.3	Energieerhaltungsverletzung für die Theorie mit Φ^4 -Wechselwirkung und Fermionen mit Yukawa-Kopplung	119
B.1.4	Vergleich der eichfixierten Theorie ohne Fermionen mit der eichfixierten Theorie mit Fermionen für $N_c = 3$, $N_c = 4$ und $N_c = 5$	120
B.2	Zeitreversibilität Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus	121
B.3	Haarmaßverteilung für freien Eichfeld-Metropolis-Algorithmus	122
B.3.1	$SU(2)$	122
B.3.2	$SU(3)$	125
B.4	Spektrum des freien, diskretisierten Dirac-Operators	127
C	Ein-Schleifen-Rechnungen der bosonischen Theorie	129
C.1	Semiklassische Entwicklung	129
C.2	Eichfixierung und Faddeev-Popov-Determinante	132
C.3	Ausintegration der Fluktuationen	134
C.4	Regularisierung	138
C.4.1	Regularisierung nach [Wei05b, Seite 71ff]	138
C.4.2	Zetafunktions-Regularisierung	139

Abbildungsverzeichnis

4.1	Darstellung des Gitters der auf eine Dimension kompaktifizierten Theorie . . .	46
5.1	Effektive, regularisierte Ein-Schleifen-Wirkung der wechselwirkenden, bosonischen Theorie	66
5.2	Effektive, regularisierte Ein-Schleifen-Wirkung der vollen $SU(2)$ -Theorie . . .	79
6.1	Performance-Analyse	86
6.2	Wirkungserwartungswert der freien, bosonischen Theorie ohne Eichfeld und ohne Masse über Gittervolumen	87
6.3	Nullmodenzahl der freien, bosonischen Theorie mit Eichfeld ohne Masse . . .	88
6.4	Bosonische Zweipunktsfunktion der freien Theorie mit Masse ohne Eichfeld .	89
6.5	Vergleich der bosonischen Kreuzkorrelatoren und Selbstkorrelatoren in der freien Theorie mit Masse ohne Eichfeld	91
6.6	Vergleich der skalierten bosonischen Massen ohne Eichfeld und mit Eichfeld mit den analytischen Resultaten	92
6.7	Vergleich bosonischer Kreuzkorrelatoren und Selbstkorrelatoren für wechselwirkende Theorie ohne Eichfeld	93
6.8	Kontinuumsliches der vollen bosonischen Theorie mit $SU(2)$ -Eichgruppe. . . .	93
6.9	β -Abhängigkeit der Bosonenmasse, skaliert mit der Gittergröße.	94
6.10	't Hooft-Limes $2 \leq N_c \leq 10$ für den bosonischen Wirkungserwartungswert $\langle s_B \rangle$	95
6.11	't Hooft-Limes für $2 \leq N_c \leq 10$ für den Erwartungswert des Betrags der Spur des <i>Polyakov-Loops</i> $\langle p \rangle$	96
6.12	't Hooft-Limes für $2 \leq N_c \leq 10$ für die mit N_c^2 skalierte Suszeptibilität des <i>Polyakov-Loops</i> $N_c^2 \Sigma_p = N_c^2 (\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2) = \langle \text{tr } \mathcal{P} ^2 \rangle - \langle \text{tr } \mathcal{P} \rangle^2$	97
6.13	Vergleich der fermionischen Kreuzkorrelatoren und Selbstkorrelatoren für die freie Theorie ohne Eichfeld	98
6.14	Vergleich der fermionischen Massen mit und ohne Eichfeld mit den analytischen Resultaten	99
6.15	Wirkungsanteile in der Umgebung einer Instabilität über der Monte-Carlo-Zeit aufgetragen	100
6.16	Vergleich der Spektren des Dirac-Operators in einem stabilen (Konfigurationen 3500-4000) und einem instabilen Bereich (Konfigurationen 2500-3000) der Monte-Carlo-Simulation	101
6.17	Vergleich der Imaginärteile des Spektrums in einem stabilen und einem instabilen Bereich der Monte-Carlo-Simulation über der Monte-Carlo-Zeit aufgetragen	102
6.18	Vergleich der Realteile des Spektrums in der Nähe der Null in einem stabilen und einem instabilen Bereich der Monte-Carlo-Simulation über der Monte-Carlo-Zeit aufgetragen	103
6.19	Inversionsverletzung und Konditionszahl über Monte-Carlo-Zeit	104

6.20	Akzeptanzraten für Eichfeld und Skalarfeld aufgetragen über der Monte-Carlo-Zeit	105
6.21	Vergleich der effektiven Wirkung der als „instabil“ markierten Simulationen für verschiedene β über der Monte-Carlo-Zeit aufgetragen	107
6.22	Vergleich von $\langle p \rangle$ der bosonischen und der Yukawa-gekoppelten Theorie für verschiedene β	107
6.23	Bosonische und fermionische Gittermassen beim Übergang ins Kontinuum für $SU(2)$ -Eichtheorie (10^4 Konfigurationen davon 10^3 Thermalisierung).	108
6.24	Dokumentation der Massenverhältnisse und bosonischen subtrahierten Wirkungserwartungswerte im Kontinuumsimes für $SU(2)$ -Eichtheorie (10^4 Konfigurationen davon 10^3 Thermalisierung).	109
B.1	Vergleich der Energieerhaltungsverletzungen für die freie Theorie mit künstlicher bosonischer Masse.	118
B.2	Vergleich der Energieerhaltungsverletzungen für die Theorie mit Φ^4 -Kopplung und ohne künstliche bosonische Masse.	119
B.3	Vergleich der Energieerhaltungsverletzungen für die Theorie mit Φ^4 - und Yukawa-Kopplung.	120
B.4	Vergleich der systematischen Fehler der Theorien mit Φ^4 -Wechselwirkung der rein bosonischen Theorie und mit Yukawa-gekoppelten Fermionen bei eichfixiertem Eichfeld bei verschiedenen N_c	121
B.5	$SU(2)$ -Histogramm	124
B.6	$SU(3)$ -Histogramm	126
B.7	Eigenwertstruktur des diskretisierten, freien Dirac-Operators	128

Tabellenverzeichnis

2.1	Irreduzible Spinoren in verschiedenen Raumzeiten	27
6.1	Instabilitäten der vollen $SU(4)$ -Theorie für verschiedene β	106
B.1	<i>Fit</i> -Daten für die freie Theorie mit Masse	118
B.2	<i>Fit</i> -Daten für die Φ^4 -Theorie ohne Masse	119
B.3	<i>Fit</i> -Daten für die Φ^4 -Theorie ohne Masse	120
B.4	<i>Fit</i> -Daten für die Φ^4 -Theorie ohne Masse mit Fermionen und ohne Fermionen, eichfixiert	121
B.5	Momentenberechnung für $SU(2)$	125
B.6	Momentenberechnung für $SU(3)$	127

1 Einleitung

Seit jeher versuchen Menschen, die Natur zu verstehen und neue Erkenntnisse über ihre grundsätzlichen Gesetzmäßigkeiten zu gewinnen. Im Rahmen dieses Prozesses wird in der Physik versucht, alle bekannten Wechselwirkungen in einer fundamentaleren Theorie zu vereinigen.

Die erste Vereinigung zweier bis dahin als unabhängig angenommener Phänomene ist die Vereinigung von elektrischen und magnetischen Vorgängen im Elektromagnetismus durch James Clerk Maxwell in seinen maxwellschen Feldgleichungen, die er 1864 erstmals publizierte [Max65]. Dabei faßte er den amperschen Durchflutungssatz, das faradaysche Induktionsgesetz und das gaußsche Gesetz zusammen und fügte den nach ihm benannten maxwellschen Verschiebungsstrom hinzu. Erst später stellte sich heraus, daß die maxwellschen Feldgleichungen auch lorentzkovariant sind und ihre Gestalt nicht ändern, wenn man einen Bezugssystemwechsel zwischen gleichförmig bewegten Bezugssystemen durchführt. Die Maxwelltheorie war die erste Feldtheorie der Physik.

Max Plancks Arbeit im Jahre 1901, in der er seine Lichtquantenhypothese im Rahmen der Untersuchung zur Schwarzkörperstrahlung vorstellte [Pla01], und die Arbeit Albert Einsteins über den äußeren lichtelektrischen Effekt im Jahre 1905 [Ein05] bildeten die „Geburtsstunde“ der Quantenmechanik. Selbige wurde dann durch bedeutende Physiker wie etwa Max Born, Pascual Jordan und Werner Heisenberg durch ihre sogenannte Matrizenmechanik in der 1926 publizierten berühmten „Drei-Männer-Arbeit“ [BHJ25] auf ein theoretisches Fundament gestellt. Auch Erwin Schrödinger, der die nach ihm benannte weltbekannte Gleichung 1926 als Zeitentwicklungsgleichung eines Quantenzustands herleitete und später die Äquivalenz der durch die Schrödingergleichung beschriebenen Quantenmechanik zur heisenbergschen Matrizenmechanik zeigte [Sch26a, Sch26b], hatte großen Einfluß auf die Quantenmechanik in ihrer Anfangszeit. Wolfgang Pauli und Paul A. M. Dirac trieben ihre Anwendung in der Atom- und Molekülphysik voran. Pauli behandelte das Wasserstoffatom und trug damit zur Akzeptanz der Quantenmechanik bei. Außerdem formulierte er das nach ihm benannte Ausschließungsprinzip [Pau26]. Zusätzlich machte er sich in der Diskussion um die Interpretation der Quantenmechanik sehr verdient. Dirac formulierte eine relativistische Verallgemeinerung der Schrödingergleichung für das Elektron, die nach ihm benannte Dirac-Gleichung [Dir28a, Dir28b].

Unter anderem durch diese Entwicklungen wurde die Quantenmechanik weiter ausgebaut und gipfelte etwa in den Vierzigerjahren des zwanzigsten Jahrhunderts schließlich in ihrer relativistischen Verallgemeinerung auf Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden, genannt Quantenfeldtheorie [Ryd06, Wei05a].

Um 1950 wurde die Quantenelektrodynamik, d.h. die Quantenfeldtheorie der Elektrodynamik, in ihrer heute¹ üblichen Form formuliert, die es beispielsweise gestattete, mit Hilfe einer Störungsrechnung das anomale magnetische Moment des Elektrons bis auf vier Dezimalstellen in Übereinstimmung mit dem Experiment zu berechnen [Sch48]. Der Wert des

¹heute heißt Ende 2008

anomalen magnetischen Moments des Elektrons ist in jüngerer Zeit bis auf acht Dezimalstellen in Übereinstimmung mit dem Experiment berechnet worden, was einen der genauesten Tests der Quantenelektrodynamik darstellt [PS95].

Durch Chen Ning Yang und Robert L. Mills wurde die Quantenelektrodynamik auf nicht-abelsche Eichtheorien verallgemeinert, als sie eine $SU(2)$ -Theorie des Isospins formulierten [YM54]. Dies bildete den Grundstein für das heute bekannte Standardmodell der Teilchenphysik, denn alle im Standardmodell behandelten Wechselwirkungen werden durch Eichbosonen vermittelt und damit durch (nicht-)abelsche Eichtheorien beschrieben. Zu Ehren von Yang und Mills werden nichtabelsche Eichtheorien ohne Materie heute als Yang-Mills-Theorien bezeichnet.

Die Quantenelektrodynamik, eine abelsche $U(1)$ -Theorie, und die schwache Wechselwirkung, eine nichtabelsche $SU(2)$ -Theorie, wurden von 1961 bis 1967 durch Sheldon Glashow, Abdus Salam und Steven Weinberg im Rahmen verschiedener Arbeiten zur Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung vereinigt [Nov00].

Murray Gell-Mann klassifizierte durch eine näherungsweise $SU(3)$ -*Flavour*-Symmetrie die verschiedenen Hadronen [GM61]. Im folgenden wurde die Theorie der starken Wechselwirkung (auch Quantenchromodynamik genannt) über die Dynamik von $SU(3)$ -farbgeladenen Teilchen in ihrer heutigen Form Anfang der siebziger Jahre durch ihn, Heinrich Leutwyler und Harald Fritzsch entwickelt [FGML73]. Insbesondere prägte Gell-Mann schon vor der Entwicklung der Quantenchromodynamik den Begriff „Quark“ für den Materieinhalt dieser Theorie. Die heute gebräuchlichen Generatormatrizen der $SU(3)$ -Gruppe wurden nach ihm benannt.

Bis auf die Gravitation, welche die Geometrie der Raumzeit selbst beschreibt [Ein16], sind durch die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung und die Theorie der starken Wechselwirkung alle heute bekannten Wechselwirkungen in der Elementarteilchentheorie beschrieben. Die Gravitation nimmt in dem Sinne eine Sonderstellung ein, als daß sie bei den heute verfügbaren Energien keine Rolle für die Elementarteilchenphysik spielt.

Im Rahmen einer weiteren Vereinheitlichung wurde versucht, Teilchen mit verschiedenen Spins durch exakte Symmetrien miteinander in Beziehung zu setzen. Von Sidney Coleman und Jeffrey Mandula [CM67] ist gezeigt worden, daß die einzig mögliche Lie-Algebra von Symmetriengeneratoren der S-Matrix aus P_μ , $J_{\mu\nu}$ (Generatoren der Poincaré-Gruppe) und internen Symmetriengeneratoren, welche mit P_μ und $J_{\mu\nu}$ vertauschen, aufgespannt wird. Diese wirkt auf physikalische Zustände nur durch spin- und impulsunabhängige Matrizen. Somit war es nicht möglich, durch innere Symmetrien Multipletts aus verschiedenen Spins zu erzeugen [Wei05c]. Später zeigten Julius Wess und Bruno Zumino [WZ74], daß es auch fermionische Generatoren von Lie-Algebren geben kann. Mit Hilfe dieser Untersuchungen klassifizierten Rudolf Haag, Martin Sohnius und Jan Łopuszański die Super-Lie-Algebren, in welchen zu den Kommutationsrelationen auch Antikommutationsrelationen hinzutreten. Dies bildete die Grundlagen der sogenannten Supersymmetrie.

Die Supersymmetrie setzt Teilchen unterschiedlicher Spins (also Bosonen und Fermionen) zueinander in Beziehung und ist ein weiterer Schritt in Richtung einer großen Vereinheitlichung. Eine wesentliche Eigenschaft jeder supersymmetrischen Theorie ist, daß sich die Schleifenbeiträge von supersymmetrischen Partnerteilchen zu messbaren Observablen, wie etwa Massen, aufheben [IZ74, FIZ74]. Bis heute ist allerdings noch keine experimentelle Verifikation der Supersymmetrie gelungen.

Eine spezielle Form supersymmetrischer Theorien, die Super-Yang-Mills-Theorien, sind supersymmetrische Erweiterungen von Yang-Mills-Theorien und werden somit zum Beispiel

in ihrer vierdimensionalen Form möglicherweise bei der supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik auch in Zukunft eine Rolle spielen.

Die Motivation zur Behandlung dimensional kompaktifizierter Super-Yang-Mills-Theorien ergibt sich daraus, daß sie zum Beispiel die Dynamik einer niederenergetischen Version der nichtkompaktifizierten Theorie besitzen [AIK⁺98]. Auch in der Formulierung der sogenannten M-Theorie spielen diese Theorien eine Rolle [Tay01].

Da es sehr aufwendig ist, die nichtkompaktifizierte Theorie numerisch und analytisch zu behandeln, hofft man, durch die einfacher zu realisierende numerische Simulation der kompaktifizierten Theorie qualitative Aussagen über die nichtkompaktifizierte Theorie zu gewinnen. Mit den heute zur Verfügung stehenden Mitteln ist es schwierig, numerische Aussagen über den Limes $N_c \rightarrow \infty$ in einer nichtkompaktifizierten $SU(N_c)$ -Super-Yang-Mills-Theorie zu erhalten, da die Anzahl der zu simulierenden Freiheitsgrade quadratisch mit N_c steigt und die Berücksichtigung dynamischer Fermionen die mögliche Anzahl der zu simulierenden Freiheitsgrade beschränkt.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung einer dimensional kompaktifizierten vierdimensionalen $SU(N_c)$ -Super-Yang-Mills-Theorie.

Im zweiten Kapitel werden die wichtigsten mathematischen Grundlagen der Lie-Gruppen und Lie-Algebren dargestellt. Desweiteren wird kurz auf die Struktur von Clifford-Algebren in Raumzeiten mit beliebiger Signatur eingegangen.

Das dritte Kapitel geht auf die zum Verständnis der Yang-Mills-Theorie benötigten physikalischen Grundlagen und ihre supersymmetrische Verallgemeinerung, die Super-Yang-Mills-Theorie, ein. Dann wird der Kompaktifizierungsprozeß kurz umrissen und die Theorie vorgestellt, die in dieser Arbeit behandelt wird. Auch auf den Begriff des Pfadintegrals, welches die Grundlage der Monte-Carlo-Simulation bildet, wird kurz eingegangen. Danach wird der 't Hooft-Limes definiert und die Phasenstruktur niederdimensionaler Yang-Mills-Theorien erläutert.

Im vierten Kapitel wird auf grundlegende Konzepte der Simulation einer Quantentheorie mit Hilfe der Monte-Carlo-Methoden eingegangen und beschrieben, wie man von einer in der Minkowski-Raumzeit formulierten Quantentheorie zu einer Theorie kommt, die man durch Monte-Carlo-Methoden simulieren kann. Danach wird der Übergang von einer Kontinuums-theorie zu einer Gittertheorie erklärt. Auch die in dieser Arbeit zur Anwendung gekommenen Simulations- und Auswertungs-Algorithmen werden beschrieben. Schließlich wird noch ein Parameter vorgestellt, der es gestattet, die Gitterartefakte auf eine definierte Art und Weise über einen Kontinuums-limes zu beseitigen.

Im Mittelpunkt des fünften Kapitels stehen analytische Rechnungen, die man als Test für numerische Rechnungen heranziehen kann. Zuerst wird die Eichinvarianz von Observablen behandelt und geklärt, wieviele Eichfreiheiten man zur Vereinfachung der Simulation ausnutzen kann. Dann werden diverse Erwartungswerte in der freien Theorie berechnet, um sie mit numerischen Ergebnissen zu vergleichen. Zusätzlich dazu wird für den bosonischen Sektor eine semiklassische Näherung durchgeführt und die effektive Wirkung analysiert. Für den fermionischen Sektor wird der Gitteroperator angegeben und diskutiert, wie man Majorana-Fermionen in einer vierdimensionalen und euklidischen Raumzeit aufzufassen hat. Es wird zusätzlich auf die analytische Form der Zweipunktsfunktionen, die zur Massenextraktion benötigt werden, eingegangen, und schließlich noch das Spektrum des freien Dirac-Operators in dieser Theorie hergeleitet. Im letzten Unterabschnitt geht es um die Invarianz der nichtkompaktifizierten Super-Yang-Mills-Theorie unter Supersymmetrie-Transformationen.

Das sechste Kapitel zeigt die numerischen Ergebnisse der Arbeit und trennt diese wie-

derum nach bosonischem, fermionischem und Supersymmetrie-Sektor auf. Es werden sowohl auf dem bosonischen als auch auf dem fermionischen Sektor numerische Tests der freien Theorie durchgeführt. Weiterhin wird gezeigt, wie sich die Massen in beiden Sektoren verhalten, wenn man das Eichfeld hinzunimmt. Auch Kontinuumslimites werden durchgeführt und gezeigt, daß der im vierten Kapitel eingeführte Parameter dazu geeignet ist, den Kontinuumslimites durchzuführen. Zusätzlich werden diverse Zweipunktsfunktionen dargestellt und gezeigt, wie der Massenextraktionsprozeß funktioniert. Auf dem bosonischen Sektor wird der 't Hooft-Limes bis $N_c = 10$ durchgeführt. Im supersymmetrischen Sektor wird versucht, die Supersymmetrie für eine Theorie mit $SU(2)$ -Eichgruppe zu zeigen.

Im siebten Kapitel werden die Ergebnisse zusammengefaßt und ein kurzer Ausblick gegeben, wie die Arbeit weiter geführt werden kann, bzw. welches die nächsten Ziele im Hinblick auf die aktuelle Forschung sind.

Der Anhang schließlich wird genutzt, um alle verwendeten Konventionen aufzulisten und um Konsistenztests der verwendeten Algorithmen zu präsentieren.

2 Mathematische Grundlagen

Zum Verständnis der vorliegenden Arbeit werden in diesem Kapitel wichtige mathematische Grundlagen vermittelt.

Der erste Teil beschäftigt sich mit den Grundlagen der Lie-Gruppen und Lie-Algebren und definiert mathematische Begriffe, die innerhalb der Arbeit immer wieder verwendet werden. Dabei wird besonderes Augenmerk auf Darstellungen der Gruppe $SU(N_c)$ und ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{su}(N_c)$ auch im Hinblick auf die numerische Implementierung gelegt.

Im zweiten Teil dieses Kapitels geht es um Spinoren in Raumzeiten beliebiger Dimension und Signatur. Hierbei wird zuerst der Begriff der Clifford-Algebra eingeführt und dann die Eigenschaften verschiedener Matrizen, wie z.B. der Ladungskonjugationsmatrix behandelt. Danach werden irreduzible Spinoren eingeführt und darauf eingegangen, welche irreduziblen Spinoren in welchen Raumzeiten existieren, um später darauf zu verweisen.

2.1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Da es sich bei einer Super-Yang-Mills-Theorie um eine Theorie handelt, deren Felder liealgebrawertig sind und deren Paralleltransporter Elemente der Eichgruppe, also einer Lie-Gruppe, sind, werden in diesem Abschnitt die wichtigsten mathematischen Definitionen noch einmal zusammengefaßt. Zuerst sollen die wichtigen Begriffe der Lie-Gruppe und Lie-Algebra definiert und auf ein mathematisches Fundament gestellt werden.

Gruppe Eine Gruppe (G, \circ) ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$; $(g, h) \mapsto g \circ h \equiv gh$ die abgeschlossen in G ist und zusätzlich folgende Kriterien erfüllt:

- $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$ für alle $g_1, g_2, g_3 \in G$ (Assoziativgesetz)
- Es existiert $e \in G$ mit $ge = eg = g$ für alle $g \in G$ (Existenz eines Neutralelementes)
- Für alle $g \in G$ existiert $g^{-1} \in G$, so daß $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ (Existenz eines Inversen)

2.1.1 Lie-Gruppe

Eine **Lie-Gruppe** \mathcal{G} der (reellen) Dimension n ist eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer Gruppenverknüpfung, so daß die Gruppenverknüpfung und Inversenbildung glatt¹ sind [Pop06].

Der Begriff „glatte Gruppenverknüpfung“ bedeutet, daß die Koordinaten des Produktes von $g'' = gg'$ zweier Gruppenelemente glatte Funktionen der Koordinaten der Elemente g und g' sind. Unter „glatter Inversenbildung“ versteht man, daß die Koordinaten von g^{-1} \mathcal{C}^∞ -differenzierbare Funktionen der Koordinaten von g sind, wenn beide in derselben Kartenumgebung liegen.

¹glatt bedeutet hier aus der Klasse \mathcal{C}^∞

Um den Begriff der Lie-Algebra zu definieren, müssen vorher einige andere Begriffe eingeführt werden. Sei \mathcal{G} eine Lie-Gruppe, dann existieren Abbildungen $L_a : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ und $R_a : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, genannt **Links-** und **Rechtstranslation**, mit $L_a : g \mapsto ag$ und $R_a : g \mapsto ga$ die per Definition Diffeomorphismen von \mathcal{G} in \mathcal{G} sind. Diese induzieren Abbildungen zwischen den entsprechenden Tangentialräumen $L_{a*} : T_g\mathcal{G} \rightarrow T_{ag}\mathcal{G}$ bzw. $R_{a*} : T_g\mathcal{G} \rightarrow T_{ga}\mathcal{G}$. Für einen Diffeomorphismus f zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten \mathcal{M} und \mathcal{N} gilt, daß die Abbildung $f_* : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}$ die Eigenschaft

$$f_* [X, Y] = [f_* X, f_* Y] \tag{2.1}$$

für $X, Y \in \chi(\mathcal{M})$ besitzt. Dabei wird $(f_* V)[g]|_{f(p)} \equiv V[g \circ f]|_p$ definiert, wobei $g \in \mathcal{F}(\mathcal{N}), f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}, V \in T_p\mathcal{M}$ und damit $g \circ f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})^2$. Die Funktionen in eckigen Klammern sind als Verkettungen mit den jeweiligen Karten auf Umgebungen der Mannigfaltigkeiten zu verstehen.

2.1.2 Lie-Algebra

Der folgende Abschnitt orientiert sich an [Nak03].

Ein **linksinvariantes Vektorfeld** ist ein Vektorfeld X auf der Lie-Gruppe \mathcal{G} welches $L_{a*}X|_g = X|_{ag}$ erfüllt. Ein Vektor $V \in T_e\mathcal{G}$ definiert ein eindeutiges linksinvariantes Vektorfeld X_V durch $X_V|_g = L_{g*}V$ (Beweis in [Nak03]). Andersherum definiert ein linksinvariantes Vektorfeld X einen eindeutigen Vektor $V = X|_e \in T_e\mathcal{G}$ (Beweis in [Nak03]). Bezeichnet \mathfrak{g} die Menge der linksinvarianten Vektorfelder auf \mathcal{G} so ist die Abbildung $T_e\mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Isomorphismus und es folgt daraus, daß \mathfrak{g} ein Vektorraum isomorph zu $T_e\mathcal{G}$ ist. Insbesondere gilt $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e\mathcal{G}$.

Da \mathfrak{g} eine Teilmenge der Vektorfelder auf \mathcal{G} , $\chi(\mathcal{G})$, ist, ist die Lie-Klammer auch auf \mathfrak{g} definiert. Nun muß gezeigt werden, daß sie abgeschlossen ist. Sei $X, Y \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned} L_{a*} [X, Y]|_g &\stackrel{(2.1)}{=} [L_{a*}X|_g, L_{a*}Y|_g] \\ &\stackrel{X, Y \in \mathfrak{g}}{=} [X|_{ag}, Y|_{ag}] = [X, Y]|_{ag} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Damit folgt aus $X, Y \in \mathfrak{g}$, daß auch $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ ist. Nun, da gezeigt worden ist, daß \mathfrak{g} abgeschlossen unter der Lie-Klammer ist, ist die folgende Definition sinnvoll.

Die **Lie-Algebra** der Lie-Gruppe \mathcal{G} ist die Menge \mathfrak{g} der linksinvarianten Vektorfelder mit einer Lie-Klammer $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Weiterhin ist die Lie-Algebra \mathfrak{g} isomorph zum Tangentialraum am Einheitsselement der Gruppe, $T_e\mathcal{G}$. Die Lie-Klammer muß dabei die Eigenschaften

- $[\alpha X + Y, Z] = \alpha [X, Z] + [Y, Z]; [Z, \alpha X + Y] = \alpha [Z, X] + [Z, Y];$ (Bilinearität)
- $[X, X] = 0$
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi-Identität)

erfüllen. Aus den ersten beiden Eigenschaften folgt vermöge $[X + Y, X + Y] = 0 = [X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y] = [X, Y] + [Y, X]$ die Antisymmetrie der Lie-Klammer.

² $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ ist die Menge der C^∞ -differenzierbaren, reellen Funktionen auf \mathcal{M} für welche die Verkettung mit einer Karte beliebig oft differenzierbar ist

2.1.3 Exponentialabbildung

Zur Vermittlung zwischen Lie-Algebra und Lie-Gruppe wird in der Nähe des Einselementes die sogenannte Exponentialabbildung herangezogen. Sei \mathcal{G} Lie-Gruppe und $V \in T_e\mathcal{G}$. Dann ist die **Exponentialabbildung** $\exp : T_e\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ durch

$$\exp V \equiv \phi_V(1) \quad (2.3)$$

definiert, wobei ϕ_V die Einparameter-Untergruppe von \mathcal{G} ist, die durch das linksinvariante Vektorfeld $X_V|_g = L_{g*}V$ erzeugt wird. Weiterhin gilt für $t \in \mathbb{R}$, daß

$$\exp(tV) = \phi_V(t) \quad (2.4)$$

ist. Für Matrizengruppen wie $\mathcal{G} = GL(V)$, wobei V ein Vektorraum ist, ist

$$\phi_A(t) = \exp(tA) = 1 + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots \quad (2.5)$$

Hier sieht man, daß $[\phi_A(t)]^{-1} = \phi_A(-t)$ existiert und somit auch $\phi_A(t) \in GL(V)$ ist. Für eine Matrizengruppe ist die Tangentialabbildung der Linkstranslation einfach durch

$$L_{g*}A = X_A|_g = gA \quad (2.6)$$

gegeben, wobei gA als Matrizenmultiplikation aufzufassen ist.

2.1.4 Strukturkonstanten

Sei $\{V_\mu\}$ die n -dimensionale Basis von $T_e\mathcal{G}$ wobei $\dim \mathcal{G} = n$ ist. Dann definiert diese Basis eine Menge von n linear unabhängigen linksinvarianten Vektorfeldern X_μ durch $X_\mu|_g = L_{g*}V_\mu$. Sowohl die X_μ als auch die V_μ werden als **Generatoren** bezeichnet. Da der Kommutator $[X_\mu, X_\nu]|_g \in \mathfrak{g}$ ist, kann er durch die $X_\mu|_g \in \mathfrak{g}$ ausgedrückt werden.

$$[X_\mu, X_\nu] = c_{\mu\nu}{}^\rho X_\rho \quad (2.7)$$

Die $c_{\mu\nu}{}^\rho$ werden **Strukturkonstanten** der Gruppe \mathcal{G} genannt. Diese sind im Sinne der g -Unabhängigkeit konstant. Seien $c_{\mu\nu}{}^\rho(e)$ die Strukturkonstanten an der Einheit, dann gilt

$$[X_\mu, X_\nu]|_e = c_{\mu\nu}{}^\rho(e)X_\rho|_e. \quad (2.8)$$

Wendet man nun die Tangentialabbildung der Linkstranslation, L_{g*} , auf die Lie-Klammer auf der linken Seite und das Vektorfeld auf der rechten Seite an, erhält man

$$[X_\mu, X_\nu]|_g = c_{\mu\nu}{}^\rho(e)X_\rho|_g. \quad (2.9)$$

Dies zeigt, daß die Strukturkonstanten unabhängig von g sind. Aus den Eigenschaften der Lie-Klammer folgen die Eigenschaften der Strukturkonstanten

$$\bullet \quad c_{\mu\nu}{}^\rho = -c_{\nu\mu}{}^\rho \quad (\text{Antisymmetrie})$$

$$\bullet \quad c_{\mu\nu}{}^\tau c_{\tau\rho}{}^\lambda + c_{\nu\rho}{}^\tau c_{\tau\mu}{}^\lambda + c_{\rho\mu}{}^\tau c_{\tau\nu}{}^\lambda = 0 \quad (\text{Jacobi-Identität})$$

2.1.5 Darstellungen von Gruppen

Wenn man numerische Untersuchungen anstellt, muß man die Gruppe in geeigneter Form für den Computer darstellen. Dies geschieht ausnahmslos in Form von Matrizen. Diese Matrizen werden Darstellungen der Gruppe genannt. Die folgenden Definitionen sind [Wip06, Kapitel 8] entnommen.

Eine Abbildung $\rho : \mathcal{G} \rightarrow GL(V)$ mit $g \mapsto \rho(g)$ heißt, falls $\dim V = n$ ist, n -dimensionale **Darstellung** der Gruppe \mathcal{G} , wenn sie

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \quad (2.10)$$

$$\rho(e) = \mathbf{1} \quad (2.11)$$

für alle $g, h \in \mathcal{G}$ erfüllt, also einen Gruppenhomomorphismus bildet.

Eine Darstellung heißt **trivial**, wenn sie alle Gruppenelemente auf die Einheitsmatrix abbildet. Sie heißt **treu**, wenn ρ ein Gruppenisomorphismus ist, also wenn $\ker \rho = e \in \mathcal{G}$. Zeichnet man eine Basis in V aus, so werden die $\rho(g)$ zu Matrizen.

Die Darstellung heißt **irreduzibel** falls V keinen echten Teilraum hat, der unter den $\rho(g)$ invariant bleibt. Weiterhin heißt eine Darstellung **vollreduzibel**, falls sie entweder irreduzibel ist, oder vollständig in irreduzible Darstellungen zerfällt.

2.1.6 Darstellungen von Lie-Algebren

Eine Abbildung $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{K})$ mit $A \mapsto \rho(A)$ heißt n -dimensionale **Darstellung** der Lie-Algebra \mathfrak{g} , wenn sie die Lie-Algebra-Struktur respektiert. Das heißt

$$\rho(\alpha A + \beta B) = \alpha \rho(A) + \beta \rho(B) \quad (2.12)$$

$$\text{und } \rho([A, B]) = [\rho(A), \rho(B)], \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}. \quad (2.13)$$

Hierbei sind α, β aus dem \mathfrak{g} zugrundeliegenden Skalkörper \mathbb{K} . Hier kann \mathbb{K} sowohl \mathbb{R} als auch \mathbb{C} sein, denn man erhält für die reelle Lie-Algebra \mathfrak{g} einer reellen Lie-Gruppe durch Komplexifizierung

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \quad (2.14)$$

die zugehörige komplexe Lie-Algebra [FS97].

Eine besonders wichtige Darstellung ist die sogenannte **adjungierte Darstellung** „ad“.

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \quad (2.15)$$

$$X \mapsto [X, \cdot] \quad (2.16)$$

ist eine Abbildung, die von der Lie-Algebra in die linearen Abbildungen über dieser Lie-Algebra abbildet. Es wird also mit Hilfe von „ad“ jedem Vektor eine Matrix in einer gewissen ausgezeichneten Basis zugeordnet. Es stellt sich heraus, daß wegen

$$(\text{ad } X)_{\nu}^{\rho} b_{\rho} = [X, b_{\nu}]^{\rho} b_{\rho} = X^{\mu} [b_{\mu}, b_{\nu}]^{\rho} b_{\rho} = X^{\mu} c_{\mu\nu}^{\rho} b_{\rho} \quad (2.17)$$

ist und wenn man für den Vektor X einen Basisvektor einsetzt diese Matrix

$$(\text{ad } b_\mu)_\nu^\rho = c_{\mu\nu}{}^\rho \quad (2.18)$$

genau mit den Strukturkonstanten übereinstimmt. Die Darstellungseigenschaft von „ad“ zeigt man über die Jacobi-Identität durch

$$\begin{aligned} \text{ad}[X,Y] &= [[X,Y],\cdot] \\ &= -[[Y,\cdot],X] - [[\cdot,X],Y] \\ &= [X,[Y,\cdot]] - [Y,[X,\cdot]] \\ &= \text{ad } X \circ \text{ad } Y - \text{ad } Y \circ \text{ad } X \\ &=: [\text{ad } X \circ \text{ad } Y]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dabei ist „ad“ durch die Eigenschaften der Lie-Klammer offensichtlich linear.³

2.1.7 Killing-Form

Um weiterverfahren zu können, ist es sinnvoll, eine Bilinearform auf der Lie-Algebra einzuführen. Diese wird als **Killing-Form** bezeichnet und ist durch

$$(X,Y) := \text{tr}_{\text{ad}}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y) \quad (2.20)$$

definiert. Dabei ist \circ hier als Hintereinanderausführung $\text{ad } X \circ \text{ad } Y = [X,[Y,\cdot]] \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ zu verstehen. Die Spurbildung ist als Spurbildung über diejenige Matrix aufzufassen, die entsteht, wenn man in die Hintereinanderausführung der „ad“ einen Basisvektor der Lie-Algebra einsetzt und das Resultat nach Basisvektoren entwickelt. Sind $X = X^\mu b_\mu$ und $Y = Y^\nu b_\nu$ wobei b_μ eine Basis der Lie-Algebra und $[b_\mu, b_\nu] = c_{\mu\nu}{}^\rho b_\rho$ ist, dann folgt daraus

$$\begin{aligned} [X,[Y,b_\rho]] &= X^\mu Y^\nu [b_\mu, [b_\nu, b_\rho]] \\ &= X^\mu Y^\nu [b_\mu, c_{\nu\rho}{}^\lambda b_\lambda] \\ &= X^\mu Y^\nu c_{\nu\rho}{}^\lambda c_{\mu\lambda}{}^\sigma b_\sigma \\ &= \mathcal{A}_\rho^\sigma(X,Y) b_\sigma. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die Spurbildung ist dann über die Matrix \mathcal{A} , gemäß

$$(X,Y) = \mathcal{A}_\rho^\rho(X,Y) = X^\mu Y^\nu c_{\nu\rho}{}^\lambda c_{\mu\lambda}{}^\rho =: X^\mu Y^\nu g_{\mu\nu} \quad (2.22)$$

aufzufassen. Dabei nennt man $g_{\mu\nu} = c_{\nu\rho}{}^\lambda c_{\mu\lambda}{}^\rho$ die **Cartan-Killing-Metrik**.

Ist die Lie-Algebra nicht halbeinfach, besitzt also abelsche Ideale, so ist die Cartan-Killing-Metrik entartet und nicht invertierbar. Die Cartan-Killing-Metrik ist in beliebigen Darstellungen nicht notwendigerweise positiv definit, womit die Killing-Form nicht unbedingt ein Skalarprodukt darstellt. Ist die Lie-Algebra halbeinfach, kann man durch die Cartan-Killing-Metrik eine Verbindung zwischen Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} und ihrem Dualraum \mathfrak{h}^* herstellen. Da (\cdot, \cdot) bilinear ist, ist die Frage nach der Signatur der Cartan-Killing-Metrik nur sinnvoll, wenn man reelle Lie-Algebren betrachtet.

³im folgenden wird oft nicht mehr streng zwischen Lie-Gruppen (oder Lie-Algebren) und ihren Darstellungen unterschieden

Für jede endlichdimensionale komplexe Lie-Algebra \mathfrak{g} gibt es bis auf Isomorphie genau eine **kompakte reelle Form** in der eine Basis derart gewählt werden kann, daß die Cartan-Killing-Metrik $(b_\mu, b_\nu) = -\delta_{\mu\nu}$ ist [FS97].

Wie jede andere Metrik kann man die Cartan-Killing-Metrik dazu nutzen, Indizes zu heben oder zu senken. Dadurch kann man Strukturkonstanten mit ausschließlich oberen oder unteren Indizes gemäß

$$c_{\mu\nu\rho} := c_{\mu\nu}{}^\sigma g_{\sigma\rho} \quad (2.23)$$

eingeführen, die vollständig antisymmetrisch in den drei Indizes sind. Man sieht, daß tr_{ad} wegen

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\text{ad}}(\text{ad } X \circ \text{ad}[Y, Z]) &= \text{tr}_{\text{add}}(\text{ad } X \circ [\text{ad } Y \circ \text{ad } Z]) \\ &= \text{tr}_{\text{add}}(\text{ad } Y \circ [\text{ad } Z \circ \text{ad } X]) \\ &= \text{tr}_{\text{add}}(\text{ad } Z \circ [\text{ad } X \circ \text{ad } Y]) \end{aligned} \quad (2.24)$$

zyklisch ist. Wenn man zusätzlich

$$\begin{aligned} c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\nu}{}^\sigma g_{\rho\sigma} = \text{tr}_{\text{ad}}(\text{ad } b_\rho \circ [\text{ad } b_\mu \circ \text{ad } b_\nu]) &= -\text{tr}_{\text{ad}}(\text{ad } b_\rho \circ [\text{ad } b_\nu \circ \text{ad } b_\mu]) \\ &= -\text{tr}_{\text{ad}}(\text{ad } b_\nu \circ [\text{ad } b_\mu \circ \text{ad } b_\rho]) \\ &= -c_{\mu\rho\nu} \end{aligned} \quad (2.25)$$

verwendet, erhält man aus der Zyklizität der Spur und der Antisymmetrie des Kommutators die totale Antisymmetrie der Strukturkonstanten mit unteren Indizes.

2.1.8 Leiteroperatoren und Cartan-Generatoren

Hat man eine Basis $\{X_\mu\} \subset \mathfrak{g}$ (oder gleichbedeutend $\{V_\mu\} \subset T_e\mathcal{G}$) in einer komplexen Lie-Algebra ausgezeichnet, kann man gemäß [Pop06] einen Basiswechsel zur sogenannten **Cartan-Weyl-Basis** durchführen, die zur strukturellen Untersuchung der Lie-Algebra besser geeignet ist. Diese setzt sich aus folgenden Elementen zusammen.

1. Eine maximale Menge m untereinander kommutierender, hermitescher Generatoren welche gleichzeitig diagonalisiert werden können. Diese werden als $H_a, a = 1, \dots, m$ bezeichnet und Generatoren der **Cartan-Unteralgebra** oder kurz **Cartan-Generatoren** genannt.
2. Die übrigen Basiselemente werden in **Aufsteiger** und **Absteiger** oder **Leiteroperatoren** unterteilt, die als $E_{\vec{\alpha}}$ bezeichnet werden, wobei $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ein m -komponentiger Vektorindex für diesen Generator ist, welcher die Eigenwerte aus (2.27) annehmen kann.

Wenn die Generatoren in dieser Art unterteilt worden sind, haben die Kommutationsrelationen zwischen diesen Generatoren folgende Struktur

$$[H_a, H_b] = 0, \quad (2.26)$$

$$[H_a, E_{\vec{\alpha}}] = \alpha_a E_{\vec{\alpha}}, \quad (2.27)$$

$$[E_{\vec{\alpha}}, E_{\vec{\beta}}] = N_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} E_{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}, \quad \vec{\alpha} \neq -\vec{\beta}, \quad (2.28)$$

$$[E_{\vec{\alpha}}, E_{-\vec{\alpha}}] = \sum_a \alpha_a H_a \quad (2.29)$$

wobei $N_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}$ eine Normierungskonstante ist.

2.1.9 Haarmaß

Um später Pfadintegrale in Eichtheorien oder Zustandssummen in Eichtheorien auf dem Gitter auszurechnen, benötigt man ein invariantes Integrationsmaß. Hierzu wird ein Integrationsmaß, das links- und rechtsinvariante **Haarmaß** $d\mu(U)$, herangezogen. Es ist bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmt und besitzt die Eigenschaften

- $d\mu(U) = d\mu(UV) = d\mu(VU)$ für alle $V \in \mathcal{G}$ (Links- und Rechtsinvarianz)
- $\int_{\mathcal{G}} d\mu(U) = 1$ (Normierung)

Für Klassenfunktionen $f(U) = f(VUV^{-1})$ wird das Haarmaß zum **reduzierten Haarmaß**.

2.1.10 Eigenschaften der Gruppe $SU(N_c)$

2.1.10.1 Generatoren

Eine Matrix $M \in \mathfrak{M}(N_c \times N_c, \mathbb{C})$ ist aus $SU(N_c)$, genau dann wenn

$$MM^\dagger = \mathbf{1} \quad (2.30)$$

$$\det M = 1 \quad (2.31)$$

ist. Aus folgt (2.30) die Antihermitizität der Generatoren und aus (2.31) folgt die Spurlosigkeit der Generatoren. In der vorliegenden Arbeit werden die Generatoren noch mit i multipliziert, sind also hermitesch.

2.1.10.2 Leiteroperatoren, Cartan-Generatoren und adjungierte Darstellung

Zur numerischen Behandlung einer $SU(N_c)$ -Eichtheorie muß man eine konkrete Matrizendarstellung der Generatoren der $SU(N_c)$ angeben. Hier wird der Weg beschritten, daß vorher die Cartan- und Leiteroperatoren als Matrizen festgelegt werden. Daraus ergeben sich durch komplexe Linearkombinationen die Generatoren, welche in der numerischen Simulation benutzt werden. Für $SU(2)$ fallen diese mit den Pauli-Matrizen zusammen, für $SU(3)$ hingegen mit den Gell-Mann-Matrizen. Für $SU(N_c)$ wird in dieser Arbeit der Terminus **verallgemeinerte Gell-Mann-Matrizen** verwendet, wenn auf die Gesamtheit dieser Matrizen verwiesen wird.

Der Rang der $SU(N_c)$ ist $N_c - 1$, was der Anzahl der Cartan-Generatoren entspricht. Da sich $\mathfrak{su}(N_c)$ aus spurlosen Matrizen zusammensetzt und die H_a alle miteinander kommutieren

müssen, wird hier

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\
 H_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\
 &\vdots \\
 H_k &= \sqrt{\frac{2}{k(k+1)}} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -k & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\
 &\vdots \\
 H_{N_c-1} &= \sqrt{\frac{2}{N_c(N_c-1)}} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -N_c+1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

gesetzt, wobei die Cartan-Generatoren so normiert sind, daß

$$\text{tr}(H_a H_b) = 2\delta_{ab} \tag{2.33}$$

ist. Desweiteren kann man die Matrixdarstellung der Leiteroperatoren über

$$(E_{\vec{\alpha}})_{mn} = (E_{ij})_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn}, \quad i < j \tag{2.34}$$

eingeführen. Dann sind die zugehörigen Generatoren

$$T_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}(E_{ij} + E_{ji}) \tag{2.35}$$

$$T_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2i}(E_{ij} - E_{ji}), \quad i < j \tag{2.36}$$

wobei i und j $N_c(N_c - 1)/2$ unterschiedliche Kombinationen durchlaufen können. Da es zu jeder Kombination zwei Generatoren gibt, erhält man somit $N_c(N_c - 1)$ Generatoren, die man aus den Leiteroperatoren bilden kann. Zusätzlich hat man noch die $N_c - 1$ Cartan-Generatoren, womit sich insgesamt eine Anzahl von $N_c^2 - 1$ ergibt, was genau der Dimension der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(N_c)$ entspricht. Die verallgemeinerten Gell-Mann-Matrizen werden durch

$$\lambda_{ij}^{(1)} = 2T_{ij}^{(1)} \tag{2.37}$$

$$\lambda_{ij}^{(2)} = 2T_{ij}^{(2)} \tag{2.38}$$

gebildet. Die reellen Strukturkonstanten der λ_a werden durch

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c \equiv i\tilde{f}_{abc}\lambda_c \quad (2.39)$$

definiert, wobei f_{abc} die von der Kommutationsrelation der Generatoren T_a eingeführten Strukturkonstanten sind. Die in dieser Arbeit verwendete adjungierte Darstellung einer $SU(N_c)$ -Matrix U ist durch

$$R_{ab}(U) := \frac{1}{2}\text{tr}\left(U\lambda_a U^\dagger \lambda_b\right) \quad (2.40)$$

definiert.

2.1.10.3 Das reduzierte Haarmaß

Hat man ein Gruppenintegral $\int d\mu(U)f(U)$ über eine Klassenfunktion

$$\begin{aligned} f : SU(N_c) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \text{mit } f(U) &= f(VUV^{-1}), \quad \forall V \in SU(N_c), \end{aligned} \quad (2.41)$$

so reicht es aus, statt dem vollen Haarmaß das reduzierte Haarmaß $d\mu_{\text{red}}(U)$ zu betrachten. Da die fundamentalen Charaktere eine Basis der Klassenfunktionen bilden, müssen auch nur diese bei der Integration berücksichtigt werden. Demzufolge kann man

$$d\mu_{\text{red}}(U) = \prod_{i=1}^{N_c-1} d\chi_i(U) \quad (2.42)$$

schreiben, wobei χ_i die fundamentalen Charaktere sind. Aufgrund der Eigenschaft der Klassenfunktionen ist es ausreichend, diagonale U zu betrachten, da man durch eine Transformation $U \rightarrow VUV^{-1}$ immer zu einem diagonalen Repräsentanten der jeweiligen Konjugationsklasse gelangt. Als Folge davon kann man von den fundamentalen Charakteren als Integrationsvariablen zu den Eigenwerten, oder im Falle einer $SU(N_c)$ -Matrix zu den Winkel der Phasen übergehen. Aus den Transformationsvorschriften für Integrale ergibt sich für diagonale Gruppenelemente

$$U(\phi_1, \dots, \phi_{N-1}) = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{i\phi_{N_c-2}} & & & \\ & & & e^{i\phi_{N_c-1}} & & \\ & & & & e^{-i(\sum_{i=1}^{N_c-1} \phi_i)} & \\ & & & & & \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

daß reduzierte Haarmaß zu

$$d\mu_{\text{red}}(\phi_1, \dots, \phi_{N_c-1}) = \left| \det \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial \phi_j} \right) \right| \prod_{j=1}^{N_c-1} d\phi_j. \quad (2.44)$$

Hieraus ergibt sich (siehe z.B. [AHNT08, Gleichung (2)])

$$d\mu_{\text{red}}(\phi_1, \dots, \phi_{N_c-1}) \sim \prod_{i < j} \sin^2 \left(\frac{\phi_i - \phi_j}{2} \right) \prod_i d\phi_i, \quad (2.45)$$

wobei die Normierungskonstante so gewählt wird, daß $\int_{\mathcal{G}} d\mu_{\text{red}}(U) = 1$ ist. Für eine Parametrisierung des vollen Haarmaßes der $SU(3)$ durch Eulerwinkel siehe [Bro88] und für die Verallgemeinerung auf $SU(N_c)$ siehe [TS02].

2.2 Spinoren in höheren Dimensionen

In diesem Abschnitt werden Spinoren und Clifford-Algebren in höheren Dimensionen betrachtet. Dies ist entscheidend, um zu sehen, welche Eigenschaften Spinoren in verschiedenen Dimensionen mit verschiedenen Signaturen haben und insbesondere, wie die irreduziblen Spinoren aussehen. Dieser Abschnitt orientiert sich entscheidend an [Wip00, Kapitel 3].

2.2.1 Clifford-Algebren

Die Clifford-Algebra wird in einer D -dimensionalen Raumzeit durch $\gamma_\mu \in \mathfrak{M}(2^{\lfloor D/2 \rfloor} \times 2^{\lceil D/2 \rceil}, \mathbb{C})$, die sogenannten γ -Matrizen aufgespannt, welche die Relation

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu \equiv \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \quad (2.46)$$

erfüllen. Dabei ist $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^t, \overbrace{-1, \dots, -1}^s)$ die Minkowski-Metrik in einer D -dimensionalen Raumzeit mit t Zeitdimensionen und s Raumdimensionen, wobei D offensichtlich $D = t + s$ ist. Aus den γ -Matrizen kann man eine weitere Matrix γ_* gemäß

$$\gamma_* = (-i)^{D/2+s} \gamma_0 \dots \gamma_{D-1} \quad (2.47)$$

bilden, welche zu $\mathbb{1}$ quadriert und hermitesch ist. In vier Dimensionen mit $t = 1$ und $s = 3$ wird diese zur γ_5 -Matrix. Die γ_* -Matrix existiert nur wenn D gerade ist, sonst ist das Produkt aller γ -Matrizen einfach proportional zur Einheitsmatrix.

Zusätzlich zu den γ -Matrizen und γ_* werden noch die vollständig antisymmetrischen n -fachen Gammaprodukte⁴

$$\gamma_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } \pi \gamma_{\mu_{\pi(1)}} \dots \gamma_{\mu_{\pi(n)}} \quad (2.48)$$

eingeführt. Für $n < D$ kann man diese auch durch die restlichen Gammaprodukte und das ε -Symbol über

$$\gamma_{\mu_1 \dots \mu_n} = i^{1+D/2} \frac{1}{(D-n)!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_D} \gamma_* \gamma^{\mu_D \dots \mu_{n+1}} \quad (2.49)$$

ausdrücken.

⁴wenn keine Indexstruktur erforderlich ist, werden sie durch $\gamma^{(n)}$ oder $\gamma_{(n)}$ abgekürzt

Zur Klassifikation der verschiedenen Clifford-Algebren in Raumzeiten mit unterschiedlichen Signaturen und Dimensionen werden, wie in der Literatur üblich, die Matrizen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ (siehe hierzu z.B. [Wip00] oder in etwas abgewandelter Form in [CDAT98]) gemäß

$$\mathcal{A} = \prod_{\mu=0}^{t-1} \gamma_{\mu} \quad (2.50)$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{C}\mathcal{A}^T \quad (2.51)$$

definiert, wobei $\gamma_{\mu < t}$ die hermiteschen, zeitartigen γ -Matrizen sind. \mathcal{A} ist diejenige Matrix mit der die Dirac-Konjugation

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \mathcal{A} \quad (2.52)$$

ausgeführt wird. \mathcal{B} ist die Matrix, die die komplexe Konjugation eines Spinors über

$$\psi_c = \mathcal{B}\psi^* = \mathcal{C}\bar{\psi}^T \quad (2.53)$$

mit seinem Ladungskonjugierten ψ_c in Beziehung setzt. ψ_c erfüllt die Diracgleichung mit dem genau entgegengesetzten Vorzeichen der Ladung von ψ . Deshalb nennt man \mathcal{C} **Ladungskonjugationsmatrix**.

\mathcal{A} ist aufgrund der Definition und wegen

$$\mathcal{A}^\dagger = (-1)^{t(t-1)/2} \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \mathbf{1}. \quad (2.54)$$

unitär. Es gibt immer eine Ladungskonjugation, die

$$\mathcal{C}^T = -\varepsilon \mathcal{C} \quad (2.55)$$

$$\gamma_{\mu}^T = -\eta \mathcal{C}^{-1} \gamma_{\mu} \mathcal{C} \quad (2.56)$$

mit $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$ erfüllt. In [Wip00] wird eine unitäre Ladungskonjugationmatrix angegeben, die diese beiden Gleichungen erfüllt. Damit die Ladungskonjugationsmatrix auch nach einem Darstellungswechsel U die beiden Gleichungen erfüllt, muß sie gemäß

$$\mathcal{C}' = U\mathcal{C}U^T \quad (2.57)$$

transformieren. Dieses Transformationsverhalten verletzt die Unitarität nicht. Somit ist jede Ladungskonjugationsmatrix \mathcal{C} unitär. Aus der Unitarität von \mathcal{C} folgt über

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^\dagger = \mathcal{C}\mathcal{A}^T \mathcal{A}^* \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}(\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A})^T \mathcal{C}^\dagger = \mathbf{1} \quad (2.58)$$

die Unitarität von \mathcal{B} .

2.2.2 Irreduzible Spinoren

In diesem Zusammenhang ist es von Interesse, welche zusätzlichen Forderungen man an Spinoren stellen kann, die mit den Lorentztransformationen in einer Raumzeit beliebiger Dimension und beliebiger Signatur verträglich sind, um so an „minimale“ oder irreduzible Spinoren in der entsprechenden Raumzeit zu kommen. Da $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4i}\gamma_{\mu\nu}$ die infinitesimalen Generatoren der Lorentzgruppe sind, muß man die Vertauschungsrelationen der $\gamma_{\mu\nu}$ mit gewissen Projektoren untersuchen. Kommutieren diese Projektoren mit den Lorentzgeneratoren, bedeutet das, daß die Projektion unter Lorentztransformationen erhalten bleibt.

2.2.2.1 Weyl-Spinoren

Weyl-Spinoren sind „Eigenvektoren“ der Projektoren $P_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma_*)$. Spinoren ψ_{\pm} mit $P_{\pm}\psi_{\pm} = \psi_{\pm}$ werden rechts- bzw. linkshändig oder rechts- bzw. linkschiral genannt. Diese Projektoren existieren nur in einer Raumzeit gerader Dimension D , weil nur in solchen Raumzeiten eine γ_* -Matrix existiert. Da $[\gamma_*, \gamma_{\mu\nu}] = 0$ ist, sind die chiralen Projektionen mit den Lorentztransformationen wegen

$$\delta\psi_{\pm} = i\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\psi_{\pm} = (\delta\psi)_{\pm} \quad (2.59)$$

verträglich.

2.2.2.2 Majorana-Spinoren

Hat man eine Realitätsbedingung, die mit den Lorentztransformationen verträglich ist, so spricht man von der Existenz von **Majorana-Spinoren**. Diese Realitätsbedingung fordert vermöge

$$\psi = \psi_c = \mathcal{B}\psi^* \quad (2.60)$$

daß der ladungskonjugierte Spinor mit dem Spinor selbst übereinstimmt, bzw. es über die \mathcal{B} -Matrix eine Verknüpfung des Spinors mit seinem konjugiert komplexen Spinor gibt. Aus Konsistenzgründen muß $\psi^{**} = \psi$ sein, was gleichbedeutend mit $(\psi_c)_c = \mathcal{B}(\psi_c)^* = \mathcal{B}\mathcal{B}^*\psi = \psi$ ist. Dies kann aber nur gewährleistet werden, wenn $\mathcal{B}\mathcal{B}^* = \mathbb{1}$ bzw.

$$1 = -\varepsilon\eta^t(-1)^{t(t+1)/2} \quad (2.61)$$

ist. Diese Bedingung ist zu erfüllen um die Konsistenz der Realitätsbedingung zu gewährleisten. Offensichtlich hängt diese Relation nur von der Anzahl der Zeitdimensionen modulo vier ab. Für $t = 0, \dots, 3$ ergibt sich $\varepsilon = -1, \varepsilon\eta = 1, \varepsilon = 1, \varepsilon\eta = -1$. Die erlaubten Werte von ε und η beliebigen Dimensionen sind in [Wip00, Kapitel 3, Abschnitt 3, letzte Tabelle] aufgelistet.

2.2.2.3 Majorana-Weyl-Spinoren

Kann man fordern, daß Spinoren eine gewisse Chiralität haben und zusätzlich noch eine, mit den Lorentztransformationen verträgliche, Realitätsbedingung stellen, dann spricht man von der Existenz von **Majorana-Weyl-Spinoren**. Eine notwendige Voraussetzung dafür ist

die Vertauschbarkeit der Ladungskonjugation (2.53) (die zusätzlich zur Multiplikation mit \mathcal{B} noch eine komplexe Konjugation beinhaltet) mit den chiralen Projektoren

$$P_{\pm}\mathcal{B} = \mathcal{B}P_{\pm}^*. \quad (2.62)$$

Unter Verwendung der Eigenschaften von \mathcal{B} und der Definition von γ_* (2.47) ergibt sich

$$\mathcal{B}P_{\pm}^* = (-1)^{D/2+s}P_{\pm}\mathcal{B}. \quad (2.63)$$

Somit hat man Majorana-Weyl-Spinoren immer dann, wenn

$$s - t = D - 2t = 0 \pmod{4} \quad (2.64)$$

ist.

2.2.2.4 Übersicht über irreduzible Spinoren in verschiedenen Raumzeiten mit verschiedenen Signaturen

Der Vollständigkeit halber wird ein Teil der Tabelle aus [Wip00] mit den irreduziblen Spinoren in Raumzeiten verschiedener Dimensionen und Signaturen angegeben um in den folgenden Teilen dieser Arbeit darauf verweisen zu können.

$D \setminus t$	0		1	
1	M^-	1	M^-	1
2	M^-	2	MW	1
4	SMW	4	M^+	4
6	M^+	8	SMW	8
10	M^-	32	MW	16

Tabelle 2.1: Irreduzible Spinoren in Raumzeiten verschiedener Dimensionen und Signaturen entnommen aus [Wip00]. M^{\pm} steht für Majorana-Spinoren mit $\eta = \pm 1$ was vermöge der Konsistenzrelation (2.61) auch ε festlegt; MW steht für Majorana-Weyl-Spinoren; SMW steht für symplektische Majorana-Weyl-Spinoren. Die Spalten neben der Art der irreduziblen Spinoren stellen die Zahl der reellen Freiheitsgrade dar.

Auf den in Tab. 2.1 gebrauchten Begriff des symplektischen Majorana-Weyl-Spinors wird hier nicht näher eingegangen. Für weitere Details sei auf [Wip00] verwiesen.

2.2.3 Fierz-Identität und bilineare Bildungen mit Majorana-Spinoren

2.2.3.1 Fierz-Identität

Sei M eine $\Delta \times \Delta$ -Matrix, dann kann man M gemäß

$$M = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=0}^{\tilde{d}} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n}{2}(n-1)} \gamma_{\mu_1 \dots \mu_n} \text{tr}(\gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} M) \quad (2.65)$$

nach den γ -Matrizen entwickeln. Dabei ist $\Delta = 2^{\lfloor D/2 \rfloor}$, $\tilde{d} = D$ in geraden Dimensionen und $\tilde{d} = \frac{1}{2}(D - 1)$ in ungeraden Dimensionen. Sei $M = \varphi\bar{\chi}$, dann ist

$$\gamma_{(n)}\varphi\bar{\chi} = (\gamma_{(n)})_{\alpha\beta}\varphi\bar{\chi}_\beta \quad (2.66)$$

und damit die Spur

$$\text{tr } \gamma_{(n)}\varphi\bar{\chi} = (\gamma_{(n)})_{\alpha\beta}\varphi\bar{\chi}_\alpha = -\bar{\chi}_\alpha(\gamma_{(n)})_{\alpha\beta}\varphi_\beta = -\bar{\chi}\gamma_{(n)}\varphi. \quad (2.67)$$

Jedes vollständig antisymmetrische Produkt $\gamma_{\mu_1\dots\mu_n}$ hat genau $\binom{\tilde{d}}{n}$ unabhängige Komponenten, so daß in Summe die Komponentenzahl $\Delta^2 = 2^D$ ist, was genau der Komponentenzahl der Matrix M entspricht. Als Folge davon kann man ein dyadisches Produkt von Spinoren nach Kontraktionen dieser beiden Spinoren mit vollständig antisymmetrischen γ -Matrizenprodukten gemäß

$$\Delta\varphi\bar{\chi} = -\sum_{n=0}^{\tilde{d}} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \gamma_{\mu_1\dots\mu_n} \bar{\chi} \gamma^{\mu_1\dots\mu_n} \varphi \quad (2.68)$$

entwickeln. Diese Entwicklung trägt den Namen **Fierz-Identität**.

2.2.3.2 Vertauschungsrelationen für Majorana-Spinoren in bilinearen Bildungen

Über $(\psi_c)_c = \mathcal{B}\psi_c^* = \mathcal{B}\mathcal{B}^*\psi = \psi$ erhält man folgende Gleichung für die Dirac-Konjugation eines ladungskonjugierten Spinors.

$$\begin{aligned} \psi &= \overline{\mathcal{C}(\bar{\psi}^T)} \\ \Rightarrow \psi^T &= \overline{(\mathcal{C}\bar{\psi}^T)}\mathcal{C}^T \\ \Rightarrow \psi^T\mathcal{C}^* &= \overline{(\mathcal{C}\bar{\psi}^T)} = \bar{\psi}_c \equiv \bar{\psi}_c \end{aligned} \quad (2.69)$$

Damit ist $\bar{\psi}_c = -\varepsilon\psi^T\mathcal{C}^{-1}$. Weiterhin ist $\psi_c = \mathcal{C}\bar{\psi}^T$. Wendet man das nun auf eine bilineare Bildung zweier ladungskonjugierter Spinoren an, bekommt man wegen

$$(\gamma_{(n)})^T = (-1)^{n(n+1)/2} \eta^t \mathcal{C}^{-1} \gamma_{(n)} \mathcal{C} \quad (2.70)$$

die folgende Identität

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_c \gamma_{(n)} \chi_c &= -\varepsilon \psi^T \mathcal{C}^{-1} \gamma_{(n)} \mathcal{C} \bar{\chi}^T \\ (\psi, \chi \text{ antikommutierende Variablen}) &= \varepsilon (-1)^{n(n+1)/2} \eta^t (\bar{\chi} \gamma_{(n)} \psi)^T \\ &= \varepsilon (-1)^{n(n+1)/2} \eta^t \bar{\chi} \gamma_{(n)} \psi. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Für Majorana-Spinoren gilt $\psi_c = \psi$, woraus für zwei Majorana-Spinoren ψ, χ

$$\bar{\psi} \gamma_{(n)} \chi = \varepsilon (-1)^{n(n+1)/2} \eta^t \bar{\chi} \gamma_{(n)} \psi \quad (2.72)$$

folgt.

3 Physikalische Vorbetrachtungen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden physikalischen Begriffe vermittelt, die in dieser Arbeit von Belang sind.

Zuerst wird erklärt, was man unter einer Yang-Mills-Theorie zu verstehen hat. Danach wird das supersymmetrische Analogon, die Super-Yang-Mills-Theorie, definiert. Dabei wird sehr kurz auf die Supersymmetrie dieser Theorie eingegangen. Im Rahmen dieses Abschnitts wird der Kompaktifizierungsprozeß erklärt und rechnerisch durchgeführt.

Nach diesen klassischen Betrachtungen wird kurz der Begriff des Pfadintegrals und der Observable eingeführt. Zusätzlich wird in diesem Abschnitt auch erklärt, was man unter einem erzeugenden Funktional zu verstehen hat.

Sobald die quantenmechanischen Grundlagen abgehandelt sind, werden Aussagen über die Phasenstruktur von kompaktifizierten Yang-Mills-Theorien getroffen und der Begriff des 't Hooft-Limes eingeführt.

3.1 $SU(N_c)$ -Yang-Mills-Theorien

Die Yang-Mills-Theorie ist die von Chen-Ning Yang und Robert L. Mills in [YM54] erstmals vorgestellte nichtabelsche Verallgemeinerung der Elektrodynamik ohne Materieteilchen, die die Dynamik der Eichpotentiale¹ $A_\mu \in \mathfrak{su}(N_c)$ mit der Wirkung

$$S_{YM} = \int d^D x \left(-\frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (3.1)$$

beschreibt. Hier ist $F_{\mu\nu} \in \mathfrak{su}(N_c)$ die sogenannte Yang-Mills-Feldstärke, die durch

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_{(D)} [A_\mu, A_\nu] \quad (3.2)$$

definiert ist. Die Kopplungskonstante $g_{(D)}$ charakterisiert die Selbstwechselwirkung der Eichpotentiale und ist hier mit einem Index (D) versehen, da sie später von anderen Kopplungskonstanten unterschieden werden muß. Die Spur in der Wirkung steht für eine Summe über die $N_c^2 - 1$ Farbindizes.

Die Potentiale sind durch Angabe der Wirkung nicht eindeutig festgelegt. Wenn man die Potentiale gewissen Transformationen, den sogenannten **(lokalen) Eichtransformationen**, mit

$$A_\mu(x) \rightarrow \Omega^\dagger(x) A_\mu(x) \Omega(x) - \frac{i}{g_{(D)}} \Omega^\dagger(x) \partial_\mu \Omega(x), \quad \Omega(x) \in SU(N_c) \quad (3.3)$$

unterwirft, transformiert $F_{\mu\nu}$ gemäß

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^\dagger(x) F_{\mu\nu}(x) \Omega(x) \quad (3.4)$$

¹auch Eichfeld, Eichbosonen oder Vektorbosonen genannt

3 Physikalische Vorbetrachtungen

was dazu führt, daß sich der Spurterm in der Wirkung nicht ändert, weil er gemäß

$$\text{tr } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rightarrow \text{tr } \Omega^\dagger F_{\mu\nu} \Omega \Omega^\dagger F^{\mu\nu} \Omega = \text{tr } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.5)$$

transformiert. Eine Wirkung, in der verschiedene, durch Eichtransformationen auseinander hervorgehende, Eichpotentiale zum gleichen Wert führen, heißt **eichinvariant**. Jede Wirkung, die eine Theorie mit Eichfeld beschreibt, muß eichinvariant sein. Alle derzeit bekannten Wechselwirkungen (außer die Gravitation) werden durch Eichtheorien beschrieben, deren Vektorbosonen an Materie koppeln. Betrachtet man nun ein Feld ϕ welches unter Eichtransformationen gemäß

$$\phi(x) \rightarrow \Omega^\dagger(x)\phi(x) \quad (3.6)$$

transformiert, stellt man fest, daß die Ableitung nicht mehr dasselbe Transformationsverhalten hat, da

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu(\Omega^\dagger \phi) = (\partial_\mu \Omega^\dagger)\phi + \Omega^\dagger \partial_\mu \phi \neq \Omega^\dagger \partial_\mu \phi \quad (3.7)$$

ist. Dieses Transformationsverhalten der Ableitung wird jedoch benötigt, damit auch die kinetischen Terme eichinvariant sind. Momentan sind nur Terme wie $\phi^\dagger \phi$ oder deren Potenzen invariant unter $SU(N_c)$ -Transformationen. Um den inhomogenen Term in der Transformation der Ableitung zu eliminieren, muß man das Feld ϕ ebenfalls an das Eichfeld koppeln. Dies muß derart geschehen, daß die Eichtransformationen des Eichfeldes die Inhomogenitäten in der Transformation der Ableitung genau aufheben. Definiert man eine sogenannte kovariante Ableitung gemäß

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_{(D)} A_\mu, \quad (3.8)$$

so ist die Transformation dieser kovarianten Ableitung unter Eichtransformationen durch

$$\begin{aligned} (\partial_\mu + ig_{(D)} A_\mu)\phi = D_\mu \phi \rightarrow D_\mu(\Omega^\dagger \phi) &= \partial_\mu(\Omega^\dagger \phi) + ig_{(D)}(\Omega^\dagger A_\mu \Omega(x) - \frac{i}{g_{(D)}} \Omega^\dagger \partial_\mu \Omega)(\Omega^\dagger \phi) \\ &= (\partial_\mu \Omega^\dagger)\phi + \Omega^\dagger \partial_\mu \phi + ig_{(D)}(\Omega^\dagger A_\mu + \frac{i}{g_{(D)}} \partial_\mu \Omega^\dagger)\phi \\ &= (\partial_\mu \Omega^\dagger)\phi + \Omega^\dagger \partial_\mu \phi + ig_{(D)} \Omega^\dagger A_\mu - (\partial_\mu \Omega^\dagger)\phi \\ &= \Omega^\dagger(D_\mu \phi) \end{aligned} \quad (3.9)$$

gegeben. Nun kann man auch kinetische Terme der Form $(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi)$ zur Wirkung addieren, da diese durch die Benutzung der kovarianten Ableitung auch eichinvariant sind. Die Form der kovarianten Ableitung hängt allerdings immer von der Form der Eichtransformation ab, der man das Feld ϕ unterwerfen kann. Bei der oben angegebenen Transformation spricht man von einem Feld ϕ welches unter der fundamentalen Darstellung transformiert. Hat man beispielsweise ein ϕ welches gemäß

$$\phi(x) \rightarrow \Omega^\dagger(x)\phi(x)\Omega(x) \quad (3.10)$$

transformiert, so sind nur noch Terme der Form $\text{tr} \phi^2$ eichinvariant. Hier muß die kovariante Ableitung durch

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_{(D)} [A_\mu, \cdot] \quad (3.11)$$

definiert werden, damit kinetische Terme der Form $\text{tr}(D_\mu\phi)(D^\mu\phi)$ eichinvariant sind. Man spricht dann von einem ϕ welches unter der adjungierten Darstellung transformiert. Eine darstellungsunabhängige Definition der kovarianten Ableitung ist die in [The06] angegebene. Hier wird

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_{(D)}A_\mu^a\Delta_a \quad (3.12)$$

definiert. Dabei sind die

$$\Delta_a = \int d^Dx (T_a)^I{}_J \Psi^J(x) \frac{\delta}{\delta\Psi^I(x)}. \quad (3.13)$$

Die Bedeutung der I, J ist die von Sammelindizes für jedwede Form von Darstellungsinizes. Die T_a sind dabei die Lie-Algebra-Generatoren in der entsprechenden Darstellung. Sind beispielsweise I, J Farbindizes, werden die Matrizen $(T_a)^I{}_J$ zu den Strukturkonstanten $(T_a)^c{}_b = -if_{ab}{}^c$. Die $(T_a)^I{}_J$ sind blockdiagonal, das heißt keine der Darstellungen mischt mit einer anderen. Dadurch zerfällt Δ_a in eine Summe über verschiedene Darstellungen. Für eine ausführlichere Darstellung der Grundlagen der Eichtheorien siehe z.B. [Wip07, Kapitel 13, reine Gittereichtheorien].

3.2 $SU(N_c)$ -Super-Yang-Mills-Theorie

3.2.1 Vierdimensionale Theorie

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht die Dynamik und die Observablen einer auf eine Dimension kompaktifizierten $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie in $D = 4$ Dimensionen. Eine Super-Yang-Mills-Theorie ist die supersymmetrische Erweiterung der Yang-Mills-Theorie. Die Wirkung der kontinuierlichen, nichtkompaktifizierten Theorie im Minkowski-Raum² ist durch (siehe [Wip05, Wip00])

$$S_{\text{SYM}} = \int d^Dx \left(-\frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \text{tr} \bar{\Psi} \not{D} \Psi \right) \quad (3.14)$$

gegeben, wobei sowohl F als auch Ψ liealgebrawertige (transformieren unter der adjungierten Darstellung) Felder sind. F ist wie in (3.2) definiert und

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - ig_{(D)} [A_\mu, \Psi]. \quad (3.15)$$

mit $g_{(D)}$ als Eichkopplungsstärke. Dabei ist

$$\not{D} = \gamma^\mu D_\mu, \quad (3.16)$$

wobei die γ^μ die in 2.2 eingeführten Antikommutationsrelationen (Clifford-Algebra)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (3.17)$$

erfüllen. Die Gleichung $\mathcal{N} = 1$ bedeutet, daß in dieser Theorie nur eine Superladung Q existiert, die zwischen Boson A_μ und (Majorana-)Fermion Ψ vermittelt. Die zugehörigen

²eine Theorie in einer Minkowski-Raumzeit wird in dieser Arbeit oft als Minkowski-Theorie bezeichnet

3 Physikalische Vorbetrachtungen

infinitesimalen Supersymmetrie-Transformationen mit einem konstanten Majorana-Spinor α sind

$$\delta_\alpha A_\mu = i\bar{\alpha}\gamma_\mu\Psi \quad (3.18)$$

$$\delta_\alpha\Psi = iF^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\alpha \quad (3.19)$$

$$\delta_\alpha\bar{\Psi} = -i\bar{\alpha}\Sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

Im Abschnitt 5.3.2 wird gezeigt, daß sich die Lagrangedichte nur um eine totale Divergenz ändert, wenn man sie diesen Transformationen unterwirft.

Eine ausführliche Einführung in die Supersymmetrie kann zum Beispiel in [Wip00, Ryd06, Wei05c] nachgelesen werden.

Da das Ziel dieser Arbeit eine numerische Simulation ist, erscheint es sinnvoll, die Feldvariablen zu reskalieren, wie es bei der Behandlung der Yang-Mills-Theorie üblich ist. Eine Dimensionsanalyse zeigt, daß die kanonischen Dimensionen der Felder

$$[A] = L^{1-\frac{D}{2}} \quad (3.21)$$

$$[\Psi] = L^{\frac{1-D}{2}} \quad (3.22)$$

$$[g_{(D)}] = L^{-2+\frac{D}{2}} \quad (3.23)$$

sind, wobei L in diesem Zusammenhang für eine Längeneinheit steht. Ein Potenzansatz für die Felder

$$A \rightarrow g_{(D)}^\alpha A \quad (3.24)$$

$$\Psi \rightarrow g_{(D)}^\gamma \Psi \quad (3.25)$$

$$F^2 + \Psi D\Psi \rightarrow g_{(D)}^\beta (F^2 + \Psi D\Psi) \quad (3.26)$$

ergibt folgende Anforderungen an die Koeffizienten α, β, γ (α ergibt sich aus der Forderung, dass die Eichkopplung im Kommutator durch die Reskalierung verschwinden soll). Dann wird $F^2 \rightarrow g_{(D)}^{2\alpha} F^2$ und $\Psi D\Psi \rightarrow g_{(D)}^{2\gamma} \Psi D\Psi$. Somit muß $\alpha = \gamma = -1$ und $\beta = 2\gamma = 2\alpha = -2$ sein.

$$\alpha = -1 \quad (3.27)$$

$$\beta = -2 \quad (3.28)$$

$$\gamma = -1 \quad (3.29)$$

Die reskalierten Felder haben die kanonischen Dimensionen

$$[A] = [g_{(D)}]^{-\alpha} [A^{\text{orig}}] = L^{-2+\frac{D}{2}} L^{1-\frac{D}{2}} = L^{-1} \quad (3.30)$$

$$[\Psi] = [g_{(D)}]^{-\gamma} [\Psi^{\text{orig}}] = L^{-2+\frac{D}{2}} L^{\frac{1-D}{2}} = L^{-\frac{3}{2}} \quad (3.31)$$

und die Wirkung geht mit den reskalierten Feldern in

$$S = \frac{1}{g_{(D)}^2} \int d^D x \left(-\frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \text{tr} \bar{\Psi} \not{D} \Psi \right) \quad (3.32)$$

über. Die Eichtransformationen dieser Theorie sind

$$\Psi(x) \rightarrow \Omega^\dagger(x)\Psi(x)\Omega(x), \quad \Omega(x) \in SU(N_c) \quad (3.33)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow \Omega^\dagger(x)A_\mu(x)\Omega(x) - i\Omega^\dagger(x)\partial_\mu\Omega(x) \quad (3.34)$$

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^\dagger(x)F_{\mu\nu}(x)\Omega(x) \quad (3.35)$$

unter welchen die Theorie invariant ist. Nachdem die Rahmenbedingungen der vollen, nicht-kompaktifizierten Theorie beschrieben sind, beschäftigt sich der nächste Abschnitt mit der Kompaktifizierung.

3.2.2 Kaluza-Klein-Kompaktifizierung

Die Kaluza-Klein-Kompaktifizierung geht auf Theodor Kaluza und Oskar Klein zurück, die sich in ihren Arbeiten mit der Vereinigung von Elektromagnetismus und Gravitation im Rahmen einer fünfdimensionalen Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie beschäftigten. In ihrer Abhandlung faßten sie das elektromagnetische Potential A_μ als Teil der Metrik $g_{\mu\nu}$ auf. Während bei Kaluza [Kal21] die Abhängigkeiten der Felder von der fünften Koordinate einfach wegfielen, kam Klein [Kle26] auf die Idee, daß man sich die fünfte Dimension als klein und „aufgerollt“ mit dem Radius R vorstellen solle. Dementsprechend wurden die Felder nach Moden in der fünften Koordinate gemäß zum Beispiel

$$A_\nu(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{\nu(n)}(x^\mu) e^{in\frac{y}{R}} \quad (3.36)$$

mit

$$A_{\nu(n)}^*(x^\mu) = A_{\nu(-n)}(x^\mu) \quad (3.37)$$

zerlegt. Die Bedingung (3.37) gewährleistet die Realität der fünfdimensionalen Felder. Dadurch erhält man für endliches R unendlich viele vierdimensionale Felder für ein fünfdimensionales Feld [Duf94].

Da aber im vorliegenden Falle, in dem alle räumlichen Richtungen kompaktifiziert werden, nur Interesse an $R_i \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, D-1$ für die kompaktifizierten Richtungen besteht, können die entsprechenden Abhängigkeiten in den Feldvariablen fortgelassen werden. Die Ableitungen in diesen Richtungen werden somit Null gesetzt. Zurück bleibt nur noch ein ∂_0 , welches hier, der Kürze halber, nur noch mit ∂ bezeichnet wird. Für die kovariante Ableitung ergibt sich $D_0 = D = \partial - i[A_0, \cdot]$ bzw. $D_i = -i[\Phi_i, \cdot]$. Im folgenden bezeichnen lateinische Indizes aus der Mitte des Alphabets die kompaktifizierten Richtungen. Während des Kompaktifizierungsprozesses werden die Variablenersetzungen

$$A_0(x^\mu) \rightarrow A(t) \quad (3.38)$$

$$A_i(x^\mu) \rightarrow \Phi_i(t) \quad (3.39)$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{0i} = \partial\Phi_i - i[A, \Phi_i] = D\Phi_i \quad (3.40)$$

$$F_{ik} = -i[\Phi_i, \Phi_k]. \quad (3.41)$$

vorgenommen und aus $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ wird

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 2F_{0i}F^{0i} + F_{ik}F^{ik} \\ &= -2F_{0i}F_{0i} + F_{ik}F_{ik} \\ &= -2(D\Phi_i)(D\Phi_i) - [\Phi_i, \Phi_k][\Phi_i, \Phi_k]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Der bosonische Teil der Wirkung

$$S_B = \frac{1}{g_{(D)}^2} \int d^D x \left(-\frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (3.43)$$

schreibt sich nach der Kompaktifizierung und Integration des Kompaktifizierungsvolumens

$$S_B = \frac{V_{D-1}}{g_{(D)}^2} \int dt \left(\frac{1}{2} \text{tr} (D\Phi_i)^2 + \frac{1}{4} \text{tr} [\Phi_i, \Phi_k]^2 \right), \quad (3.44)$$

wobei über i bzw. i und k zu summieren ist. Durch die Kompaktifizierung gehen die inhomogenen Eichtransformationen des Eichfeldes

$$A(t) \rightarrow \Omega^\dagger(t) A(t) \Omega(t) - i \Omega^\dagger(t) \partial_\mu \Omega(t) \quad (3.45)$$

$$\Phi_i(t) \rightarrow \Omega^\dagger(t) \Phi_i(t) \Omega(t). \quad (3.46)$$

für die raumartigen Richtungen in eine adjungierte Gruppenwirkung über. Das heißt, daß sich die Eichfeldkomponenten in den kompaktifizierten Richtungen unter Eichtransformationen wie Skalare in der adjungierten Darstellung transformieren. Diese Tatsache rechtfertigt den Begriff des **Kompaktifizierungsskalars**, der in diesem Zusammenhang öfter gebraucht werden wird. Zusätzlich dazu sieht man, daß das Feld A^3 keinerlei Dynamik mehr besitzt und nur noch eine algebraische Bewegungsgleichung erfüllt. Der Kommutator wird für kommutierende Matrizen Φ_i offensichtlich Null. Diese werden als **flache Richtungen des Potentials** bezeichnet. Somit besteht also die Möglichkeit, daß die Theorie Infrarotdivergenzen aufweist, wenn die Theorie in die flachen Richtungen des Potentials getrieben wird. Dies wird im Rahmen einer semiklassischen Näherung in Abschnitt 5.1.4 betrachtet und in [Tay01, Abschnitt III] kommentiert.

Bei der fermionischen Wirkung entfallen durch die Kompaktifizierung die räumlichen Ableitungen und es ergeben sich, zusätzlich zu den kinetischen Termen, Yukawa-artige Kopplungen zwischen Fermionen und Kompaktifizierungsskalaren.

$$S_F = \frac{1}{g_{(D)}^2} \int d^D x \left(\frac{i}{2} \text{tr} \bar{\Psi} \not{D} \Psi \right) \\ \stackrel{\text{Kompakt.}}{=} \frac{V_{D-1}}{g_{(D)}^2} \int dt \left(\frac{i}{2} \text{tr} \bar{\Psi} \gamma^0 D \Psi + \frac{1}{2} \text{tr} \bar{\Psi} \gamma^i [\Phi_i, \Psi] \right) \quad (3.47)$$

Um weitere Aussagen über die Clifford-Algebra in der kompaktifizierten Theorie zu treffen, könnte man die γ -Matrizen einer Tensorproduktzerlegung unterwerfen und dann die Teilstrukturen dieser Zerlegung analysieren, wie es in [Wip05] vorgeführt worden ist. Allerdings ist diese Analyse nur sinnvoll, wenn man die Kompaktifizierung auf mehr als einer Dimension durchführt, ansonsten muß man, um eine nichttriviale γ -Struktur zurückzubehalten, die Kompaktifizierung auf $D - 2$ Dimensionen durchführen und dann Ableitungen in der einen räumlichen Dimension weglassen, was zu einer Ungleichbehandlung der restlichen $D - 2$ und der zuletzt kompaktifizierten Dimension in der Lagrangedichte führt.

³Wenn im folgenden von Theorien mit oder ohne Eichfeld gesprochen wird, ist der Übergang $D \leftrightarrow \partial$ bezogen auf das A -Feld gemeint.

Da die Fermionen in einer Dimension nur noch eine Komponente haben, kann man die ursprüngliche D -dimensionale γ -Struktur nach diesen einzelnen Komponenten zerlegen und jede einzelne Komponente als ein Fermion in der kompaktifizierten Theorie zählen. Die kompaktifizierte Theorie besitzt also $D-1$ Kompaktifizierungsskalare und $2^{\lfloor D/2 \rfloor}$ Fermionen in der adjungierten Darstellung der Lie-Algebra. Diese über die vierdimensionalen Spinor-Indizes unterschiedenen Fermionen werden in Zukunft als **Fermionen-Flavours** bezeichnet.

3.3 Quantisierung und Pfadintegralformulierung

In den letzten Abschnitten ging es um Eigenschaften der klassischen Wirkung. Um die physikalischen Eigenschaften des quantenmechanischen Systems zu verstehen, ist es notwendig, das zur Theorie gehörige **Pfad-** oder **Funktionalintegral**

$$\mathcal{Z}[0] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS[\Phi, A, \bar{\Psi}, \Psi]}, \quad (3.48)$$

welches erstmals von Feynman in [Fey48] eingeführt wurde, zu studieren. Der Erwartungswert einer Observable \mathcal{O} ist durch

$$\langle T\hat{\mathcal{O}} \rangle = \langle \Omega | T\hat{\mathcal{O}} | \Omega \rangle := \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{O}[\Phi, A, \bar{\Psi}, \Psi] e^{iS[\Phi, A, \bar{\Psi}, \Psi]}, \quad (3.49)$$

also eine Einsetzung von \mathcal{O} in das Pfadintegral gegeben. Hier ist T das Zeitordnungssymbol, welches wichtig ist, wenn $\hat{\mathcal{O}}$ aus Operatoren zu verschiedenen Zeitpunkten zusammengesetzt ist. Weiterhin ist Ω das Vakuum der vollen Theorie. Zahlreiche Observablen (insbesondere jene, welche mit den Feldvariablen zusammenhängen) kann man durch Funktionalableitung aus einem sogenannten erzeugenden Funktional $\mathcal{Z}[J]$ gewinnen. Jedes Feld, welches über das erzeugende Funktional durch funktionale Differentiation in die Erwartungswerte einfließen soll, muß an einen Strom gekoppelt werden. Um beispielsweise den Erwartungswert des Feldes Φ auszurechnen, koppelt man Φ an einen Strom J . So ergibt sich für das erzeugende Funktional

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS[\Phi, A, \bar{\Psi}, \Psi] + i \int d^D x \Phi(x) J(x)}. \quad (3.50)$$

Mit diesem Funktional läßt sich $\langle \hat{\Phi}(y) \rangle$ durch

$$\langle \hat{\Phi}(y) \rangle = \frac{(-i)}{\mathcal{Z}[0]} \left. \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta \Phi(y)} \right|_{J=0} = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \Phi(y) e^{iS[\Phi, A, \bar{\Psi}, \Psi]}}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS[\Phi, A, \bar{\Psi}, \Psi]}} \quad (3.51)$$

berechnen. Dieser Erwartungswert wird als Einpunktsfunktion bezeichnet. Interessiert man sich für die sogenannten n -Punktsfunktionen, so ist das erzeugende Funktional n mal nach J gemäß

$$\langle T\hat{\Phi}(x_1) \dots \hat{\Phi}(x_n) \rangle = \frac{(-i)^n}{\mathcal{Z}[0]} \left. \frac{\delta^n \mathcal{Z}[J]}{\delta \Phi(x_1) \dots \delta \Phi(x_n)} \right|_{J=0} \quad (3.52)$$

$$= \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) e^{iS[\Phi, A, \bar{\Psi}, \Psi]}}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS[\Phi, A]}} \quad (3.53)$$

zu differenzieren. Hier ist, im Gegensatz zur Einpunktsfunktion, die Zeitordnung notwendig, weil die n Φ -Operatoren zu beliebigen Zeitpunkten auf den Vakuumzustand wirken können.

Im folgenden entfällt das Zeitordnungssymbol und der Hut über den Operatoren wird der Übersichtlichkeit halber fortgelassen.

Weil A ein Eichfeld ist, muß beachtet werden, daß im Pfadintegral eichäquivalente Konfigurationen nur einmal gezählt werden. Das führt automatisch zu Eichfixierungsproblemen und Faddeev-Popov-Geistfeldern. Dies soll hier aber nicht weiter diskutiert werden, da auf dem Gitter die Pfadintegrale endlichdimensionale Integrale und die Eichgruppen im Rahmen dieser Arbeit kompakt sind, so daß Überzählungen durch das Integrieren von eichäquivalenten Konfigurationen nicht von Belang sind.

Treten in der zu behandelnden Theorie Fermionen auf, sind diese an entsprechend großmannwertige Ströme zu koppeln. Die Form dieser Kopplung hängt davon ab, ob Ψ und $\bar{\Psi}$ unabhängig voneinander sind oder nicht. Dies wird in den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 relevant sein.

Sind die Wirkungen quadratisch in den Feldvariablen kann man die zugehörigen Pfadintegrale analytisch, meist in Form von Verhältnissen unendlichdimensionaler Determinanten ausrechnen. Dies gilt insbesondere für die Fermionen der in dieser Arbeit verwendeten Theorie und wird bei der Simulation wichtig sein.

Sobald in einer wechselwirkenden Theorie Glieder höherer als zweiter Ordnung in der Wirkung auftreten, kann man die Pfadintegrale nicht mehr analytisch ausrechnen, sondern nur noch durch eine Störungstheorie. Hat man diese Möglichkeit nicht, weil die Kopplungsstärke der Wechselwirkung nicht „klein“ ist, bleibt in vielen Fällen nur noch die Berechnung mit Hilfe einer Gittertheorie durch einen Computer. Wie Pfadintegrale im Rahmen dieser Arbeit für eine euklidische Theorie mit dem Computer berechnet werden, klärt der Abschnitt 4.1.

3.4 't Hooft-Limes und Phasenübergänge

Die Eichgruppe der kompaktifizierten Theorie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{V_{D-1}}{g_{(D)}^2} \left(\text{tr}(D\Phi_i)^2 + \frac{1}{2} \text{tr}[\Phi_i, \Phi_k]^2 + i \text{tr} \bar{\Psi} \gamma^0 D\Psi + \text{tr} \bar{\Psi} \gamma^i [\Phi_i, \Psi] \right) \quad (3.54)$$

ist bis jetzt nur insoweit festgelegt, daß sie $SU(N_c)$ sein soll. Im Rahmen dieser Arbeit wird diese Theorie, aber insbesondere ihr bosonischer Sektor, für $N_c \rightarrow \infty$ untersucht werden. Diesen Limes bei festgehaltener 't Hooft-Kopplung $\lambda = g^2 N_c$ nennt man **'t Hooft-Limes**.

Die Motivationen dafür sind vielfältig. Einerseits haben die $SU(N_c)$ -Yang-Mills-Theorien für $N_c \rightarrow \infty$ viele Gemeinsamkeiten mit nichtabelschen Eichtheorien bei endlichen N_c . Andererseits wird vermutet, daß sie für $N_c \rightarrow \infty$ dual zu schwach gekoppelten Stringtheorien sind, welche hagedornartiges Verhalten zeigen. Das bedeutet, daß einige thermodynamische Größen bei einer Temperatur T_H , der Hagedorntemperatur, singular werden [Hag65]. Man erhofft sich somit durch das Studium der Eichtheorien für $N_c \rightarrow \infty$ Einsichten in den **Confinement-Deconfinement**-Phasenübergang in Eichtheorien und in die Stringthermodynamik, die in dieser Arbeit allerdings nicht betrachtet wird.

Die kompaktifizierte Theorie ohne Fermionen kann als Eichtheorie in einer Dimension mit Kopplung an skalare Materiefelder in der adjungierten Darstellung interpretiert werden. Trotz der Tatsache, daß das Eichfeld dieser Theorie keinerlei Dynamik hat, kann sie als Analogon der $SU(N_c)$ -Yang-Mills-Theorien in höheren Dimensionen aufgefaßt werden. Sie besitzt zum Beispiel den angesprochenen *Deconfinement*-Übergang [A⁺06].

Es wird vermutet [A⁺06], daß in solchen Eichtheorien auf kompakten Mannigfaltigkeiten mindestens zwei unterschiedliche Phasen existieren. Die Niedertemperaturphase (stark gekoppelte Theorie) mit Zuständen mit $E/N_c^2 \ll 1/R$ wird durch eine hagedornartige Zustandsdichte (exponentielles Wachstum der Zustandsdichte mit der Energie $\rho(E) \sim e^{E/T_H}$ [Hag65, BFS04]) bestimmt.

Die Hochtemperaturphase (schwach gekoppelte Theorie), die durch Zustände mit $E/N_c^2 \gg 1/R$ dominiert wird, verhält sich im Wesentlichen wie ein ideales Gas. Die Hagedorn-Temperatur T_H , die beide Phasen trennt, ist dabei proportional zur inversen Längenskala der kompakten Mannigfaltigkeit. Der Proportionalitätsfaktor hängt von der Geometrie der kompakten Mannigfaltigkeit und den Materiefeldern ab [AMM⁺04]. In Abschnitt 4.6 wird ein Parameter eingeführt, der es gestattet, die Kopplung oder die Größe des Kreises zu steuern auf dem die euklidische, eindimensionale Theorie existiert.

Wie in [AMM⁺04, A⁺06, CW07] argumentiert wird, ist die klassische Größe zur Messung von *Deconfinement*-Phasenübergängen in Eichtheorien der sogenannte **Polyakov-Loop**. Dieser entspricht einer in Zeitrichtung geschlossenen Wilson-Schleife.

Wilson-Schleifen sind in der Kontinuumstheorie durch pfadgeordnete (hier durch P gekennzeichnet) Exponentialfunktionen von Kurvenintegralen über dem Eichfeld entlang von geschlossenen Kurven gemäß

$$W(C) = P \left\{ \exp \left(i \oint_C dx^\mu A_\mu(x) \right) \right\} \quad (3.55)$$

definiert [Wil74]. Die Pfadordnung ist notwendig, da die $A_\mu \in \mathfrak{su}(N_c)$ an verschiedenen Punkten nicht notwendigerweise kommutieren. Der *Polyakov-Loop* ist dann in einer kontinuierlichen Theorie mit periodischer Zeitrichtung durch

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = P \left\{ \exp \left(i \oint dt A_0(t, \vec{x}) \right) \right\} \quad (3.56)$$

gegeben. In der hier betrachteten kompaktifizierten Theorie ist er nicht mehr \vec{x} -abhängig und kann als

$$\mathcal{P} = P \left\{ \exp \left(i \oint dt A(t) \right) \right\} \quad (3.57)$$

geschrieben werden. Die Definition des *Polyakov-Loops* auf dem Gitter wird in Abschnitt 4.4 angegeben. Eine vom *Polyakov-Loop* abgeleitete Observable, die im Zusammenhang mit dem *Deconfinement*-Phasenübergang in den numerischen Untersuchungen dieser Arbeit gemessen wird, ist die eichinvariante Größe

$$p = \frac{1}{N_c} |\text{tr } \mathcal{P}|. \quad (3.58)$$

Diese geht laut [AMM⁺04, A⁺06, CW07] in der Hochtemperaturphase gegen Eins und für $N_c \rightarrow \infty$ in der Niedertemperaturphase gegen Null, da der *Deconfinement*-Phasenübergang mit der spontanen Brechung der \mathbb{Z}_{N_c} -Symmetrie von $\text{tr } \mathcal{P}$ zusammenhängt.

4 Numerische Vorbetrachtungen

Dieses Kapitel widmet sich den numerischen Methoden und Algorithmen.

Im ersten Teil werden die für diese Arbeit wichtigen Monte-Carlo-Methoden vorgestellt. Danach werden die zu diesen Methoden gehörigen Algorithmen eingeführt. Anschließend wird eine Methode vorgestellt, eine Minkowski-Theorie für die Monte-Carlo-Methoden zugänglich zu machen. Diese wird mit der in dieser Arbeit verwendeten kompaktifizierten kontinuierlichen Theorie rechnerisch durchgeführt.

Im Anschluß daran wird die Gitterstruktur und die Ableitungen auf dem Gitter für die hier verwendete Theorie eingeführt und die in der Simulation zur Anwendung gekommenen Gitterwirkungen angegeben. Danach wird die Supersymmetrie auf dem Gitter betrachtet.

Der vorletzte Teil dieses Kapitels hat zwei Auswertungsmethoden, deren theoretische Grundlagen und in diesem Zusammenhang auftretende Probleme zum Inhalt.

Zum Schluß wird angegeben, wie man die Diskretisierungsartefakte eliminiert und welcher Parameter konstant gehalten muß, damit sich die physikalischen Randbedingungen während dieses Prozesses nicht ändern.

4.1 Monte-Carlo-Methoden

Das Ziel dieser Arbeit ist die numerische Simulation einer Quantenfeldtheorie, d.h. die Berechnung von Erwartungswerten

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \rho[\phi] \tag{4.1}$$

mit Hilfe des Pfadintegrals.

Dies ist im Kontinuum ein Integral über einem unendlichdimensionalen, meist unbeschränkten Bereich, welches der Numerik in keinem Fall zugänglich ist. Deshalb muß durch eine Diskretisierung des Raumzeitvolumens und die Beschränkung auf ein endliches Integrationsgebiet die Dimension des Pfadintegrals auf einen endlichen Wert gebracht werden. Allerdings haben die Integrale nach der Diskretisierung typischerweise immernoch eine Dimension, die zwischen 10^4 und 10^6 liegt. Diese hohen Dimensionszahlen sind zum Beispiel für eine Integration nach der Simpson-Regel überhaupt nicht zugänglich, da sie schon für Dimensionszahlen der Größenordnung 10 mehr als 24 Stunden auf einem modernen Rechner benötigen. Die derzeit einzige Methode, mit der solche hochdimensionalen Integrale handhabbar sind, ist eine stochastische Methode, die sogenannte **Monte-Carlo-Integration**, die hier näher beschrieben wird.

Zur Erklärung der Gleichung (4.1): In Anlehnung an die Feldtheorie wird die Integrationsvariable mit ϕ bezeichnet. \mathcal{O} bezeichnet eine sogenannte **Observable**, die von der Feldvariablen ϕ in beliebiger (auch nichtlokaler) Weise abhängen kann und $\rho[\phi]$ ist die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** für eine **Feldkonfiguration** ϕ . $\mathcal{D}\phi$ bezeichnet das **Integrationsmaß**,

welches für Vektorvariablen ϕ meist flach (d.h. ohne irgendwelche ϕ -abhängigen Koeffizienten) ist und für den Fall von gruppenwertigen Variablen ϕ dem Haarmaß der Gruppe entspricht.

Da es bei einer lokalisierten Wahrscheinlichkeitsdichte nicht sinnvoll ist, über alle möglichen Konfigurationen zu mitteln, besteht das Ziel darin, ein Ensemble von Konfigurationen zu erzeugen, die nach $\rho[\phi]$ verteilt sind. Diesen Prozess nennt man **Importance-Sampling**. Im Falle der Feldtheorie ist z.B. $\rho[\phi] = e^{-S[\phi]}$, wobei S das (euklidische) Wirkungsfunktional ist. Das heißt, ρ ist beim klassischen Minimum der Wirkung lokalisiert. Sind die Konfigurationen gemäß ρ verteilt, kann man den Erwartungswert durch einen arithmetischen Mittelwert

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathcal{O}[\phi_t] \quad (4.2)$$

berechnen, wobei ϕ_t die t -te Feldkonfiguration darstellt. Da man nie unendlich viele Feldkonfigurationen erzeugen kann, muß die Summe (4.2) bei einem endlichen N abbrechen und ist damit nicht mehr identisch mit dem exakten Erwartungswert, sondern liefert nur noch einen **Schätzwert**

$$\langle \mathcal{O} \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathcal{O}[\phi_t] \quad (4.3)$$

des Erwartungswertes.

Im allgemeinen kann man Konfigurationen, die nach ρ verteilt sind, nicht direkt erzeugen. Diese Konfigurationen können durch einen stochastischen Prozeß erzeugt werden, dessen Gleichgewichtsverteilung sie darstellen. Ein **Markov-Prozeß** stellt die einfachste Implementierung eines solchen stochastischen Prozesses dar, denn er benötigt keinerlei Informationen über vorhergehende Konfigurationen. Die Nummer jeder einzelnen Konfiguration innerhalb des Markov-Prozesses wird als **Monte-Carlo-Zeit** bezeichnet. Um Aussagen über den Markov-Prozeß treffen zu können, muß die sogenannte **Transfermatrix** $W^{(n,m)}$ über

$$W^{(n,m)} = W[\phi^{(n)}, \phi^{(m)}] \quad (4.4)$$

eingeführt werden, welche die Wahrscheinlichkeit angibt von der m -ten Realisierung der Feldkonfiguration zur n -ten Realisierung der Feldkonfiguration überzugehen. Um Feldkonfigurationen mit den gewünschten Eigenschaften zu erzeugen, muß W einige grundsätzliche Eigenschaften erfüllen [Ber05, Abschnitt 9], die nachfolgend erläutert werden.

Ergodizität Wenn $\rho[\phi^{(m)}] > 0$ und $\rho[\phi^{(\ell)}] > 0$, dann muß ein ganzes $n > 0$ existieren, so daß $(W^n)^{(\ell,m)} > 0$. Das heißt, der Prozeß ist **ergodisch**, wenn man von einer beliebigen Realisierung $\phi^{(m)}$ zu einer beliebigen anderen Realisierung $\phi^{(\ell)}$ in endlich vielen Schritten gelangt.

Normierbarkeit Die Spaltensumme von W

$$\sum_n W^{(n,m)} = 1, \quad (4.5)$$

was ein Ausdruck dafür ist, daß es sich bei $W^{(n,m)}$ um Übergangswahrscheinlichkeiten handelt.

Gleichgewicht Die Wahrscheinlichkeitsmatrix muß ein Gleichgewicht besitzen. Bei den Monte-Carlo-Simulationen wird diese Forderung hinsichtlich eines **detaillierten Gleichgewichts** verschärft, welche die Existenz eines Gleichgewichts impliziert.

Die Wahrscheinlichkeit, eine Realisierung $\phi^{(m)}$ zu finden, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit von dieser Realisierung zu einer anderen Realisierung $\phi^{(n)}$ zu gelangen, muß genauso groß sein, wie die Wahrscheinlichkeit $\phi^{(n)}$ zu finden, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit von $\phi^{(n)}$ zu $\phi^{(m)}$ zurückzukommen oder in einer Gleichung

$$\rho[\phi^{(m)}]W^{(n,m)} = \rho[\phi^{(n)}]W^{(m,n)}. \quad (4.6)$$

Da ein Markov-Prozeß durch die Angabe seiner Übergangswahrscheinlichkeiten in einem Monte-Carlo-Schritt bestimmt wird und $\rho[\phi]$ durch den Boltzmannfaktor gegeben ist, führt der Markov-Prozeß im Laufe der Monte-Carlo-Zeit zu einem Ensemble von Konfigurationen, die nach ρ verteilt sind. Man kann nicht erwarten, daß die ersten Feldkonfigurationen schon nach ρ verteilt sind, deshalb muß man mehrere Monte-Carlo-Iterationen durchführen, bis man in Näherung nach ρ verteilte Konfigurationen erhält. Diese ersten Monte-Carlo-Iterationen werden als **Thermalisierung** bezeichnet. Die während der Thermalisierung erzeugten Konfigurationen sollten in der Mittelwertbildung (4.3) nicht berücksichtigt werden. Der Prozeß der Mittelwertbildung wird häufig als „messen“ und der Schätzwert als „Meßwert“ bezeichnet.

Um eine Aussage über die Fehler einer Meßgröße machen zu können, muß man ein Maß für die sogenannte **Autokorrelation** der Konfigurationen angeben. Eine hohe Autokorrelation führt effektiv zu einer geminderten Statistik, da weniger unabhängige Konfigurationen für die Mittelwertbildung zur Verfügung stehen. Ein Maß für die Autokorrelation ist die **Autokorrelationszeit**, die in Monte-Carlo-Schritten angegeben wird und die über die Autokorrelationsfunktion

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{O}}(t) &= \langle (\mathcal{O}[\phi_0] - \langle \mathcal{O} \rangle)(\mathcal{O}[\phi_t] - \langle \mathcal{O} \rangle) \rangle \\ &= \langle \mathcal{O}[\phi_0]\mathcal{O}[\phi_t] \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2 \sim \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\mathcal{O}}}\right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

definiert ist [Ber05, Abschnitt 10]. Hierbei wurde die Translationssymmetrie der Erwartungswerte im Gleichgewicht benutzt. Die Größe $\tau_{\mathcal{O}}$ wird als **Autokorrelationszeit** bezeichnet.

Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten, den statistischen Fehler von $\langle \mathcal{O} \rangle$ abzuschätzen. Die einfachste Möglichkeit ist der **Standardabweichung**. Hat man M unkorrelierte Meßwerte der Observablen \mathcal{O} , dann berechnet sich die erwartungstreue Standardabweichung gemäß

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^M (\mathcal{O}[\phi_t] - \langle \mathcal{O} \rangle)^2}{M-1}} \quad (4.8)$$

[Ste07]. Allerdings ist die Standardabweichung keine geeignete Fehlerabschätzung, wenn man nichtlineare Funktionen $f(\mathcal{O})$ mißt. In diesem Fall hat sich die **Jackknife-Methode** bewährt. Aus M unkorrelierten Meßwerten $\mathcal{O}[\phi_t]$ ergibt sich der Schätzwert von f durch

$$\langle f(\mathcal{O}) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M f_t \quad (4.9)$$

mit

$$f_t = f \left(\frac{1}{M-1} \sum_{t' \neq t} \mathcal{O}[\phi_{t'}] \right) \quad (4.10)$$

und der sogenannte **Jackknife-Fehler** über

$$\sigma(f) = \sqrt{\sum_{t=1}^M (\langle f(\mathcal{O}) \rangle - f_t)^2} \quad (4.11)$$

[Ber05, Abschnitt 10]. Eine weitere wichtige Größe um beispielsweise Phasenübergänge bei Ordnungsparametern eines Systems zu finden, ist die Suszeptibilität, welche durch

$$\Sigma_{\mathcal{O}} = \langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2 \quad (4.12)$$

definiert ist. Für die Messung dieser Größe ist zur Fehlerbestimmung einzig und allein der Jackknife-Fehler geeignet, da $\langle \mathcal{O}^2 \rangle$ und $\langle \mathcal{O} \rangle^2$ korreliert sind und nichtlinear von \mathcal{O} abhängen.

4.2 Algorithmen

Nach Vorstellung der wichtigsten Begriffe soll dargelegt werden, wie man konkret aus der Feldkonfiguration in einem Monte-Carlo-Schritt eine neue Feldkonfiguration für den nächsten Monte-Carlo-Schritt erzeugt. Dieser Abschnitt stellt die verwendeten Algorithmen zum Auffinden von Feldkonfigurationen mit ihren jeweiligen Anwendungsgebieten kurz vor.

4.2.1 Metropolis-Algorithmus

Der Metropolis-Algorithmus [MRR⁺53] ist der einfachste und ineffektivste Algorithmus, um eine stochastische Größe nach einem gewünschten Maß zu verteilen und um hochdimensionale Integrale durch Mittelwertbildung zu berechnen. Hier wird ein Element der Feldkonfiguration per Zufall neu gewählt und dann mit einer dem Verhältnis der Maße von neuer zu alter Feldkonfiguration gleichen Wahrscheinlichkeit akzeptiert, um die Forderung des detaillierten Gleichgewichts zu erfüllen. Dies wird ineffektiv wenn das Verhältnis aufgrund der Maßstruktur sehr klein ist, weil faktisch keine neue Feldkonfiguration mehr akzeptiert wird. Erstens durchläuft man damit den gesamten Feldkonfigurationsraum nur sehr langsam und zweitens sind aufeinanderfolgende Feldkonfigurationen stark korreliert, da sich immer nur ein Element ändert.¹

Eine algorithmische Implementierung des Metropolis-Algorithmus sieht wie folgt aus:

1. Wähle eine Feldkonfiguration ϕ gemäß Warmstart oder Kaltstart.
2. Berechne $\rho[\phi]$.
3. Wähle gleichverteilt ein Element der Feldkonfiguration ϕ neu ($\phi \rightarrow \phi'$).
4. Wähle eine gleichverteilt Zufallszahl $r \in [0,1)$.

¹Man spricht hier auch von einem lokalen Algorithmus.

5. Akzeptiere die Feldkonfiguration ϕ' , falls $r < \rho[\phi']/\rho[\phi]$ ist und gehe zu 2.
6. Ansonsten lasse ϕ unverändert und gehe zu 2.

In dieser Arbeit wurde das Eichfeld mit Hilfe eines Metropolis-Algorithmus simuliert. Dies geschah so, daß gemäß

$$v = v^a \lambda_a \in \mathfrak{su}(N_c),$$

ein Element aus der Lie-Algebra per Zufall bestimmt wurde. Dabei waren die v^a gleichverteilte Zufallszahlen aus dem Intervall $(-\alpha, \alpha)$ und α ein Parameter der Simulation. Dann wurde aus v durch Exponentiation eine unitäre Matrix gemäß

$$U = \exp(iv) \in SU(N_c) \quad (4.13)$$

erzeugt, welche im Falle der Akzeptanz mit dem ursprünglichen Link multipliziert wurde.

4.2.2 Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus

Der Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus² ist effektiver als der Metropolis-Algorithmus, denn er nutzt eine klassische Integration um die gesamte neue Feldkonfiguration zu berechnen.³ Die Methode besteht darin, daß man die Zustandssumme $\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]}$ durch eine neue Zustandssumme $\mathcal{Z}' = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}\Phi e^{-H[p, \Phi]}$ mit $H[p, \Phi] = \frac{1}{2} p_i^2 + S[\Phi]$ ersetzt. Die Dynamik der ursprünglichen Zustandssumme ändert sich nicht, da die (künstlichen) Impulse quadratisch auftreten und somit ausintegriert werden können. Sie steuern also zum Pfadintegral nur eine unwesentliche Normierungskonstante bei. Nach dieser Ersetzung kann man die Methoden der statistischen Mechanik verwenden, um neue Feldkonfigurationen zu generieren.

Für weitere Details wird hier auf [DKPR87, Rot92] verwiesen.

1. Erzeuge $\Phi_i(0)$ durch Kaltstart oder Warmstart.
2. Erzeuge eine zu jeder Feldvariable $\Phi_i(0)$ konjugierte, gaußsch normalverteilte Impulsvariable $p_i(0)$.
3. Führe die zeitliche Entwicklung der Feldkonfiguration (Φ_i, p_i) molekulardynamisch für N Zeitschritte gemäß

$$\Phi_i(n+1) = \Phi_i(n) + \Delta\tau p_i(n) \quad (4.14)$$

$$\tilde{p}_i(n+1) = \tilde{p}_i(n) - \Delta\tau \frac{\partial S[\Phi]}{\partial \Phi_i(n+1)} \quad (4.15)$$

im n -ten Zeitschritt aus, wobei

$$\tilde{p}_i(n) = p_i(n) - \frac{\Delta\tau}{2} \frac{\partial S[\Phi]}{\partial \Phi_i(n)} \quad (4.16)$$

die erste Halbschrittintegration ist.

²teilweise durch HMC oder HMC-Algorithmus abgekürzt

³Man spricht hier von einem globalen Algorithmus.

4. Mache den letzten Halbschritt rückgängig gemäß

$$p_i(N) = \tilde{p}_i(N) + \frac{\Delta\tau}{2} \frac{\partial S[\Phi]}{\partial \Phi_i(N)}. \quad (4.17)$$

5. Akzeptiere die neue Konfiguration $(\Phi_i(N), p_i(N))$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$p = \min \left\{ 1, e^{-H[\Phi(N), p(N)]} / e^{-H[\Phi(0), p(0)]} \right\}. \quad (4.18)$$

6. Wenn die Konfiguration $(\Phi_i(N), p_i(N))$ nicht akzeptiert wird, speichere die alte Konfiguration $(\Phi_i(0), p_i(0))$ und starte neu bei 2, andererseits nutze $\Phi_i(N)$ als Ausgangspunkt für die hamiltonsche Integration und gehe zu 2.

Da die künstlich eingeführte Hamiltonfunktion nicht explizit zeitabhängig ist, bleibt die zugehörige Energie erhalten. Das heißt $\Delta H = H[\Phi(N), p(N)] - H[\Phi(0), p(0)]$ ist exakt Null, wenn man die Bewegungsgleichungen exakt integriert. Für endliche Diskretisierungsschrittweite $\Delta\tau$ jedoch, bleibt die Energie aufgrund numerischer Ungenauigkeiten nicht exakt erhalten. Der letzte Akzeptanzschritt (vgl. Metropolis-Algorithmus) beseitigt diese durch die Zeitdiskretisierung eingeführten systematischen Fehler. Deshalb muß keine Extrapolation $\Delta\tau \rightarrow 0$ durchgeführt werden, um physikalisch relevante Ergebnisse zu erhalten. In [DKPR87] ist bewiesen worden, daß der hier vorgestellte Algorithmus das detaillierte Gleichgewicht für beliebige Diskretisierungen $\Delta\tau$ respektiert. In der vorliegenden Arbeit wird ein Integrator zweiter Ordnung, der Leap-Frog-Algorithmus, mit

$$\Delta H = \mathcal{O}(\Delta\tau^2) \quad (4.19)$$

verwendet. Dieser Algorithmus ist auch zeitreversibel.

Der Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus wird für die skalaren Freiheitsgrade der Theorie verwendet. Im Anhang B.1 ist die Implementierung des Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus ausführlich getestet worden.

Im nächsten Schritt ist die zu behandelnde Minkowski-Theorie für die Simulation in eine euklidische Theorie umzuschreiben. Diesen Prozeß nennt man **Wickrotation** und er wird im Abschnitt 4.3 speziell für die in der vorliegenden Arbeit verwendete Theorie beschrieben.

4.3 Wickrotation

Der erste Schritt zur Simulation einer Gittertheorie ist die Wickrotation einer Minkowski-Theorie. Der Grund für die Wickrotation ist, daß sich Pfadintegrale mit oszillierendem Integranden nicht mit den oben angesprochenen Monte-Carlo-Methoden simulieren lassen. Dies ist darin begründet, daß $\exp(iS)$ kein Maßfaktor ist. Die Wickrotation wird im Falle dieser Arbeit mit der kompaktifizierten Lagrange-Dichte gemäß

$$\mathcal{L}_M = \text{tr} D\Phi_i^2 + \frac{1}{2} \text{tr} [\Phi_i, \Phi_k]^2 + \text{tr} \bar{\Psi} i\gamma^0 D\Psi + \text{tr} \bar{\Psi} \gamma^i [\Phi_i, \Psi] \quad (4.20)$$

durchgeführt, wobei alle Vorfaktoren, wie z.B. Eichkopplungen, vernachlässigt worden sind. Dazu wird $t \rightarrow -i\tau$ und damit $dt \rightarrow -id\tau$ und $\partial \rightarrow i\partial_\tau$ bzw., wenn man $A \rightarrow iA$ setzt, wird $D \rightarrow iD_\tau$. Von diesen Ersetzungen kommt auch der Begriff Wickrotation, da einige Größen in

der gaußschen Ebene „rotiert“ werden. Eine Folge der Wickrotation ist, daß die Hermitizität des Feldes A nicht mehr gegeben ist.

Zusätzlich wird gefordert, daß $iS_M = -S_E$ ist. Dies legt das Vorzeichen der Koordinatenersetzung fest. Um eine euklidische γ -Struktur zu erhalten, muß auch $\gamma^0 \rightarrow \gamma_0^E, \gamma^i \rightarrow -i\gamma_i^E$ gesetzt werden. Die wickrotierte Lagrangedichte ergibt sich somit zu

$$\mathcal{L}_M^W = -\text{tr}D_\tau\Phi_i^2 + \frac{1}{2}\text{tr}[\Phi_i, \Phi_k]^2 - \text{tr}\bar{\Psi}\gamma_0^E D_\tau\Psi - i\text{tr}\bar{\Psi}\gamma_i^E[\Phi_i, \Psi]. \quad (4.21)$$

Für S_E erhält man nachfolgend mit der Differentialersetzung oben und sämtlichen Vorfaktoren

$$S_E = \frac{V_{D-1}}{2g_{(D)}^2} \int d\tau \left(\text{tr}D_\tau\Phi_i^2 - \frac{1}{2}\text{tr}[\Phi_i, \Phi_k]^2 + \text{tr}\bar{\Psi}\gamma_0^E D_\tau\Psi + i\text{tr}\bar{\Psi}\gamma_i^E[\Phi_i, \Psi] \right). \quad (4.22)$$

Der Vorfaktor wird mit

$$\alpha = \frac{V_{D-1}}{g_{(D)}^2}$$

identifiziert und dementsprechend sind die Bosonen- und Fermionenwirkungen durch (Index E wird weggelassen, weil es im folgenden nur um die euklidischen Wirkungen geht)

$$S_B = \frac{1}{2}\alpha \int d\tau \left(\text{tr}D_\tau\Phi_i^2 - \frac{1}{2}\text{tr}[\Phi_i, \Phi_k]^2 \right) \quad (4.23)$$

$$S_F = \frac{1}{2}\alpha \int d\tau \left(\text{tr}\bar{\Psi}\gamma_0 D_\tau\Psi + i\text{tr}\bar{\Psi}\gamma_i[\Phi_i, \Psi] \right). \quad (4.24)$$

gegeben. Die Wickrotation ist nicht ganz unproblematisch, da es keinen definierten Algorithmus gibt, wie eine Minkowski-Theorie in eine äquivalente euklidische Theorie zu übersetzen ist. Im bosonischen Teil der Wirkung hat man bis auf die verlorene Hermitizität keine Schwierigkeiten. Dies kommt daher, daß es sich bei A_μ um ein Vektorfeld handelt und man mindestens eine Komponente dieses Feldes mit einem i versehen muß, damit das Skalarprodukt aller Komponenten positiv- (oder negativ-) definit ist. Tut man dies nicht und simuliert die Minkowskiwirkung, wird man keine Gleichgewichtsverteilung erhalten, da die Wirkung instabil ist. Dies hat seine Ursache darin, daß der kinetische Term und der Potentialterm unterschiedliche Vorzeichen haben und demzufolge die Wirkung nicht mehr in eine Richtung beschränkt ist.

Im Fermionenteil der Wirkung treten durch den Signaturwechsel noch größere Probleme auf. Durch diesen sind die irreduziblen Spinoren verschieden von denen der jeweiligen Minkowski-Theorie (siehe dazu Tab. 2.1). Daher kann es sein, daß die Supersymmetrie gebrochen wird. In $D = 2$ ist dies explizit vom Verfasser für einige Arten der Wickrotation berechnet worden. Die Wickrotation im bosonischen Teil allein war aufgrund des Fehlens nichtlinearer Terme für die Supersymmetrie unproblematisch (was in der vierdimensionalen Theorie im Allgemeinen nicht mehr funktioniert). Bei Durchführung der Wickrotation in der γ -Struktur entfiel der trilineare Term in Ψ nicht, weil er ein falsches Vorzeichen hatte. Weiterhin traten aufgrund der veränderten irreduziblen Spinoren in der Fierz-Identität Terme auf, die im Minkowskifall weggefallen sind. Weitere Schwierigkeiten entstehen unter anderem dadurch, daß die Fermionenwirkung durchaus komplex werden kann und damit nicht mehr der Simulation durch die oben angeführten Monte-Carlo-Methoden zugänglich ist. Dies war in der vierdimensionalen, kompaktifizierten Theorie jedoch nicht der Fall.

Das Auffinden von Lösungen der vorgenannten Probleme ging über den zeitlichen Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus und muß späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

4.4 Gittertheorie

4.4.1 Begriffe, Definitionen und Gitterstruktur

Nach der Übertragung der Wirkung ins Euklidische, muß man die Theorie in eine für die numerische Behandlung geeignete Form, die Gitterformulierung, übersetzen. Dies ist notwendig, weil man auf einem Computer keine unendlich viele Freiheitsgrade, wie sie in einer Feldtheorie auftreten, simulieren kann. Für die Feldtheorie bedeuten diese Einschränkungen zunächst, daß man das Volumen, in dem die physikalischen Vorgänge stattfinden, auf einen endlichen Bereich begrenzt und dann dieses Gittervolumen in endlich viele Gitterpunkte unterteilt. Der Einfachheit halber sind diese Gitterpunkte meist hyperkubisch und äquidistant in jeder Richtung angeordnet.

Es ist zu erwähnen, daß die Einführung des Gitters Vorteile mit sich bringt. Da das Gitter eine endliche Ausdehnung besitzt und der Gitterabstand auch endlich ist, bildet es einen Regulator. Das bedeutet, daß in der Gittertheorie keine unendlich großen Impulse und keine unendlich kleinen Impulse auftreten können. Man spricht in diesem Zusammenhang von **Gitterregularisierung**.

In der vorliegenden Arbeit geht es um eine auf eine Dimension kompaktifizierte Theorie, womit als Gitter nur noch eine lineare Anordnung von Punkten bleibt. Die Gitterpunkte werden als **Sites** bezeichnet und die Verbindungen zwischen den Punkten als **Links**. Dabei stellt man sich die Kompaktifizierungsskalare Φ_i als auf den *Sites* und die Eichfeldvariablen U als auf den *Links* „sitzend“ vor. Die *Links* haben eine Länge a , die als **Gitterkonstante**⁴ bezeichnet wird.

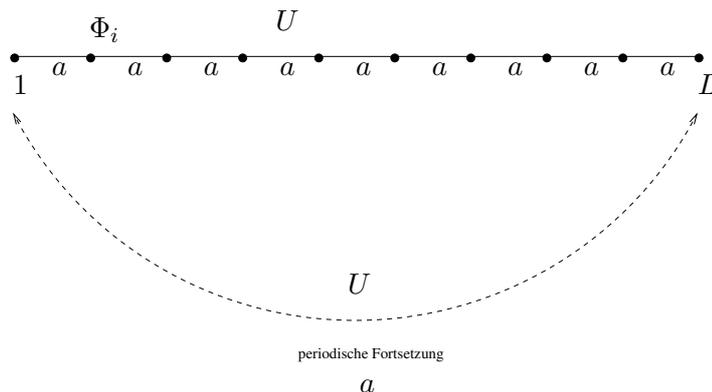


Abbildung 4.1: Darstellung des Gitters der auf eine Dimension kompaktifizierten Theorie

Da in der in dieser Arbeit behandelten Feldtheorie kinetische Terme vorkommen, die durch die enthaltenen Ableitungen im einfachsten Fall die nächsten Nachbarn miteinander in Beziehung setzen, muß man eine Vorschrift angeben, wie man Feldvariablen an den Rändern des Gittervolumens fortsetzt. Im vorliegenden Fall werden sowohl für die Kompaktifizierungsskalare als auch für die Fermionen periodische Randbedingungen angenommen. In der Wirkung tauchen keine Ableitungen der Linkvariablen auf. Somit braucht man die Linkvariablen nicht über den Rand des Gitters fortzusetzen.

⁴diese hat nichts mit der aus der Festkörperphysik bekannten Gitterkonstante zu tun, sondern ist ein reines Diskretisierungsartefakt

Nun muß die Kontinuumswirkung in Gittersprache übersetzt werden. Das bedeutet, daß zuerst die zeitliche Integration in eine Summe über alle Gitterpunkte

$$\int d\tau \rightarrow a \sum_x \quad (4.25)$$

übergeht. Dann müssen die kovarianten Ableitungen (für Feldvariablen, die unter der adjungierten Darstellung transformieren) $D\Phi_i = \partial\Phi_i - i[A, \Phi_i]$ auf das Gitter überführt werden. Für die normale Ableitung werden im folgenden immer Rechtsableitungen

$$\partial\Phi_i \rightarrow \frac{1}{a} (\Phi_{i,x+1} - \Phi_{i,x}) \quad (4.26)$$

verwendet. Die kovarianten Ableitungen haben eine ähnliche Struktur, nur daß bei ihnen das Linkfeld die Feldvariablen paralleltransportiert. Dies ist notwendig, da Feldvariablen an verschiedenen Punkten nicht vergleichbar sind. Die Gitterversion der kovarianten Ableitung ist somit

$$D\Phi_i \rightarrow (D\Phi_i)_x = \frac{1}{a} (U_{x,x+a} \Phi_{i,x+a} U_{x+a,x} - \Phi_{i,x}). \quad (4.27)$$

Um zu zeigen, daß man tatsächlich von der diskretisierten Ableitung zurück zur kontinuierlichen Ableitung gelangt, muß man die $U_{x,x+a} \in SU(N_c)$ durch $U_{x,x+a} = e^{-iaA_x}$, $A_x \in \mathfrak{su}(N_c)$ ausdrücken und dann den Grenzübergang $a \rightarrow 0$ durchführen.

$$\begin{aligned} (D\Phi_i)(x) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} (U_{x,x+a} \Phi_{i,x+a} U_{x+a,x} - \Phi_{i,x}) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} (e^{iaA_x} \Phi_{i,x+a} e^{-iaA_x} - \Phi_{i,x}) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} ((1 - iaA_x) \Phi_{i,x+a} (1 + iaA_x) - \Phi_{i,x}) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} (\Phi_{i,x+a} - ia[A_x, \Phi_{i,x+a}] + \mathcal{O}(a^2) - \Phi_{i,x}) \\ &= \partial\Phi_i - i[A, \Phi_i]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Da das Gitter nur noch endlich viele Punkte besitzt und Zeitintegrale durch Gittersummen ersetzt werden, wird der *Polyakov-Loop* von einem pfadgeordneten Exponentialintegral zu einem Produkt über die Linkvariablen gemäß

$$\mathcal{P} = \prod_x U_{x,x+a}. \quad (4.29)$$

4.4.2 Gitterformulierung der Wirkungen

Die anderen Terme der bosonischen Wirkung lassen sich ohne weiteres auf das Gitter übertragen und man erhält somit für die bosonische Gitterwirkung

$$S_B = \frac{1}{2} \alpha a \sum_x \left(\text{tr}(D\Phi_i)_x^2 - \frac{1}{2} \text{tr}[\Phi_{i,x}, \Phi_{k,x}]^2 \right). \quad (4.30)$$

Bei der Fermionenwirkung gemäß (4.24)

$$S_F = \frac{1}{2}\alpha \int d\tau \left(\text{tr} \bar{\Psi} \gamma_0 D_\tau \Psi + i \text{tr} \bar{\Psi} \gamma_i [\Phi_i, \Psi] \right), \quad (4.31)$$

wird auch das Integral wieder durch eine Summe ersetzt. Weiterhin wird D_τ durch die Zentralableitung ersetzt und zur Beseitigung der Fermionendoppler (ungewollte Verdoppelung der fermionischen Freiheitsgrade) [Wil74, MM94] ein Wilsonterm gemäß

$$S_F = \frac{1}{2}\alpha a \sum_x \left(\text{tr} \bar{\Psi}_x \left(\gamma_0 \frac{1}{2} (D^+ + D^-) - \frac{r a}{2} \Delta \right) \Psi_x + i \text{tr} \bar{\Psi}_x \gamma_i [\Phi_{i,x}, \Psi_x] \right) \quad (4.32)$$

eingefügt. Setzt man die symmetrische Ableitung von oben und den Gitter-Laplace-Operator ein, erhält man

$$\begin{aligned} S_F &= \frac{1}{2}\alpha a \sum_x \text{tr} \bar{\Psi}_x \gamma_0 \frac{1}{2} (U_{x,x+a} \Psi_{x+a} U_{x+a,x} - U_{x,x-a} \Psi_{x-a} U_{x-a,x}) \\ &+ \frac{1}{2}\alpha a \sum_x \left(-\frac{r a}{2} \text{tr} \bar{\Psi}_x (U_{x,x+a} \Psi_{x+a} U_{x+a,x} - 2\Psi_x + U_{x,x-a} \Psi_{x-a} U_{x-a,x}) \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

als diskretisierte fermionische Wirkung. Nun reskaliert man die Felder und Parameter gemäß der Dimensionsanalyse (3.30) und (3.31) so, daß sämtliche Potenzen der Gitterkonstante wegfallen und alles in dimensionslosen Gittergrößen ausgedrückt ist. Formal erreicht man dies, indem man die Gitterkonstante $a = 1$ setzt. Die vollständigen in dieser Arbeit verwendeten Gitterwirkungen sind nach der Einführung von künstlichen Fermionen- und Bosonenmassen aufgrund der Gleichungen (2.40), (2.39) und (4.27) durch

$$\begin{aligned} S_B &= \alpha \sum_x \left(2 \sum_i (\Phi_{i,x}^a \Phi_{i,x}^a - \Phi_{i,x}^a R_{ab}(U_{x,x+1}) \Phi_{i,x+1}^b) \right. \\ &\quad \left. + m_B^2 \sum_i \Phi_{i,x}^a \Phi_{i,x}^a + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \tilde{f}_{abc} \tilde{f}_{dec} \Phi_{i,x}^a \Phi_{j,x}^b \Phi_{i,x}^d \Phi_{j,x}^e \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{xy} \sum_{ab} \bar{\lambda}_x^a \tilde{Q}_{xy}^{ab} \lambda_y^b \quad (4.35)$$

gegeben. Dabei ist

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{xy}^{ab} &= \delta_{ab} \delta_{xy} \mathbf{1} + \kappa R_{ab}(U_{xy}) M_1 \delta_{y,x+1} + \kappa R_{ab}(U_{xy}) M_2 \delta_{y,x-1} \\ &\quad - 2\kappa \tilde{f}_{acb} \Phi_{i,x}^c \delta_{xy} \gamma_i \end{aligned} \quad (4.36)$$

die Fermionenmatrix,

$$\kappa = \frac{1}{2(m_F + r)} \quad (4.37)$$

der sogenannte **Hopping-Parameter** (siehe z.B. [Rot92]) und

$$M_1 = -r\mathbb{1} + \gamma_0 \quad (4.38)$$

$$M_2 = -r\mathbb{1} - \gamma_0 \quad (4.39)$$

zwei Matrizen für die nächste Nachbarwechselwirkung der Fermionen. Die Fermionenvariablen wurden gemäß $\lambda \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{2\kappa}}\lambda$ reskaliert, um den Faktor vor der Wirkung zu absorbieren.

4.4.3 Ausintegration der Fermionen und effektive Wirkung

Da die Fermionen nur quadratisch in der Wirkung auftreten, ist das zugehörige Pfadintegral gaußsch. Dies nutzt man aus, um im Falle von Dirac-Fermionen die Fermionen, gemäß

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi e^{-\sum_{xy} \bar{\Psi}_x M_{xy} \Psi_y} &= \det M \\ &= e^{\log \det M} = e^{-S_{\text{eff}}^F} \end{aligned} \quad (4.40)$$

auszuintegrieren. Bei den hier vorliegenden Majorana-Fermionen wird

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\lambda e^{-\frac{1}{2} \sum_{x,y} \lambda_x M_{xy} \lambda_y} &= \text{Pf } M \\ &\stackrel{\text{Pf } M \geq 0}{=} e^{\log \text{Pf } M}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Dieser Schritt ist erforderlich, da Grassmann-Variablen nicht direkt numerisch behandelt werden können. Die effektive Wirkung, mit welcher die Simulation durchgeführt wurde, schreibt sich nach Ausintegration der fermionischen Freiheitsgrade gemäß (4.34)

$$S_{\text{eff}}[\Phi, U] = S_B - \log |\text{Pf}(\mathcal{C}\tilde{Q})|. \quad (4.42)$$

Der Fall, daß $\text{Pf } M < 0$ ist, wird später noch behandelt.

Dies ist eine Wirkung nur für die bosonischen Freiheitsgrade der Theorie, mit einem, durch die Ausintegration der Fermionen eingeführten nichtlokalen Potential. Die Herleitung von \tilde{Q} und die Übersetzung der fermionischen Freiheitsgrade in $D = 4$ (Majorana-Fermionen) in eine Gittertheorie werden in Abschnitt 5.2.1 ausführlich diskutiert.

Um physikalisch relevante Aussagen aus der Gitterformulierung zu gewinnen, muß man sämtliche Gitterartefakte eliminieren. Dies erreicht man durch den sogenannten **Kontinuumslices**. Im Abschnitt 4.6 geht es in um das Auffinden eines geeigneten Parameters, der die Durchführung des Kontinuumslices gestattet. Dabei wird auf Argumente aus dem Abschnitt 3.4 zurückgegriffen.

4.4.4 Bemerkungen zur Supersymmetrie auf dem Gitter

Es ist bekannt (siehe z.B. [CW07] oder [BKUW08]), daß in einer Gittertheorie entweder ein Teil oder die vollständige Supersymmetrie gebrochen wird. Für dieses Problem existiert bis jetzt noch keine zufriedenstellende Lösung. Daher versucht man mit Hilfe verschiedener Verfahren, einen Teil der Supersymmetrie auf das Gitter zu übertragen. In [CW07] wird zum

Beispiel eine durch dimensionale Kompaktifizierung einer modifizierten $\mathcal{N} = 2$ zweidimensionalen Super-Yang-Mills-Theorie berechnete teilweise manifest supersymmetrische Gitterwirkung verwendet, um auch ohne Kontinuumslimites „die Supersymmetrie“ zu erhalten.

Da in dieser Arbeit nur eine naive Gitterwirkung verwendet wurde, ist der durch Catterall et al. in [Cat04] vorgestellte Formalismus der Kähler-Dirac-Felder nicht von Bedeutung. Insofern ist es notwendig, den Kontinuumslimites sorgfältig durchzuführen und Observablen, wie z.B. Massenverhältnisse zu messen, da die jeweiligen Superpartner einer supersymmetrischen Theorie gleiche dynamisch generierte Massen besitzen. Dies liefert Anhaltspunkte für die im Kontinuum wiederhergestellte Supersymmetrie.

Im Zuge des Kontinuumslimites und zur Bestimmung der Massen von Bosonen und Fermionen müssen Massen gemessen werden. Dies wird zusammen mit einigen Algorithmen zur Berechnung der Pfaffschen Determinante Gegenstand des Abschnitts 4.5 sein.

4.5 Auswertungsalgorithmen

4.5.1 Massenextraktion

Die Massenextraktion aus einer Monte-Carlo-Simulation ist ein nichttriviales Verfahren. Um dies zu verstehen, wird zuerst der Begriff der Zweipunktsfunktion eingeführt. In der Quantenmechanik entspricht sie der Übergangswahrscheinlichkeit von einem Punkt zu einem anderen zu verschiedenen Zeiten. In diesem Zusammenhang spricht man von der Zweipunktsfunktion

$$G_{QM}(x,t; y,t') = \langle x,t|y,t' \rangle \quad (4.43)$$

auch als Integrkern bzw. Korrelationsfunktion. Betrachtet man die Zeitentwicklung eines Zustandes

$$|x,t\rangle = \hat{U}(t)|x,0\rangle \quad (4.44)$$

wobei $\hat{U}(t) = \exp(it\hat{H})$ sein soll (und der Einfachheit halber der Hamiltonoperator nicht explizit zeitabhängig ist), dann kann man die Zweipunktsfunktion als

$$G_{QM}(x,t; y,t') = \langle x,0|\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t')|y,0\rangle \quad (4.45)$$

schreiben. Wegen $U(t)U(s) = U(t+s)$ ergibt sich damit

$$G_{QM}(x,t; y,t') = \langle x,0|e^{i(t'-t)\hat{H}}|y,0\rangle. \quad (4.46)$$

Entwickelt man die Ortseigenzustände nach Energieeigenzuständen, erhält man

$$\begin{aligned} G_{QM}(x,t; y,t') &= \sum_n \langle x,0|e^{i(t'-t)\hat{H}}|n\rangle \langle n|y,0\rangle \\ &= \sum_n e^{i(t'-t)E_n} \langle x,0|n\rangle \langle n|y,0\rangle \\ &= \sum_n e^{i(t'-t)E_n} \varphi_n(x) \varphi_n^*(y). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Führt man nun eine Wickrotation $t \rightarrow -i\tau$ durch und setzt $t' = 0$, erhält man

$$G_{QM}(x, -i\tau; y,0) = \sum_n e^{-\tau E_n} \varphi_n(x) \varphi_n^*(y), \quad (4.48)$$

wobei im Limes großer τ nur noch die am langsamsten abfallende Exponentialfunktion zurückbleibt. Es ist also

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G_{QM}(x, -i\tau; y, 0) \sim e^{-\tau E_0}, \quad (4.49)$$

was das folgende Vorgehen zur Extraktion einer Masse, also der Grundzustandsenergie eines Feldes, rechtfertigt.

Da sowohl die Fermionen als auch die Bosonen periodischen Randbedingungen unterworfen sind, ergibt sich statt eines exponentiellen Abfalls der Verlauf eines hyperbolischen Kosinus für die Korrelationsfunktion.

Für den Propagator muß eine eichinvariante Bildung konstruiert werden. Die Eichinvarianz wird bei der Bildung von Objekten mit Farbindizes durch Summation über die Farbindizes bzw. Spurbildung gewährleistet. Dies ist hier nicht ausreichend, da bei einer Eichtransformation

$$\Phi_x \rightarrow \Omega_x \Phi_x \Omega_x^\dagger \quad (4.50)$$

das Feld an unterschiedlichen Punkten mit Eichgruppenelementen an eben diesen Punkten transformiert und diese nicht durch die Spurbildung

$$\text{tr} \Phi_x \Phi_y \rightarrow \text{tr} \Omega_x \Phi_x \Omega_x^\dagger \Omega_y \Phi_y \Omega_y^\dagger \neq \text{tr} \Phi_x \Phi_y \quad (4.51)$$

beseitigt werden. Somit muß zusätzlich ein sogenannter **Paralleltransport**

$$\mathcal{P}_{xy} = U_{x,x+1} U_{x+1,x+2} \dots U_{y-1,y} \quad (4.52)$$

eingefügt werden, der diese Eichtransformationen an verschiedenen Punkten eliminiert. Dieser transformiert unter lokalen Eichtransformationen gemäß

$$\mathcal{P}_{xy} \rightarrow \Omega_x \mathcal{P}_{xy} \Omega_y^\dagger. \quad (4.53)$$

Der so entstandene Propagator

$$G(x,y) = \langle \text{tr}(\mathcal{P}_{xy}^\dagger \Phi_x \mathcal{P}_{xy} \Phi_y) \rangle, \quad (4.54)$$

ist aufgrund der oben genannten Transformationseigenschaften offensichtlich eine eichinvariante Bildung.

Ein anderes Problem, welches sich bei der Massenmessung ergibt, ist die Verletzung der Translationssymmetrie des Gitters durch die Eichfixierung. Dadurch hat man nach der Mittelung

$$G(x) = \frac{1}{L} \sum_{x'} G(x+x', x') \quad (4.55)$$

nicht mehr den Verlauf eines hyperbolischen Kosinus, da bei längeren Abständen effektiv häufiger über den Link, der den *Polyakov-Loop* trägt, gemittelt wird. Dieses wird durch Symmetrisierung

$$G(x) = \frac{1}{2L} \sum_{x'} [G(x+x',x') + G(x',x+x')] \quad (4.56)$$

der Korrelationsfunktion gelöst. Um diesen Schritt zu rechtfertigen, werden in den Abschnitten 6.2.2 und 6.2.3 die Massen der bosonischen Theorie gemessen und mit analytischen Resultaten verglichen.

Die Masse wird durch Anpassen (*fitten*) einer linearen Funktion an den linearen Bereich im logarithmischen Plot der Korrelationsfunktion ermittelt. Anhand des Graphen muß festgestellt werden, an welcher Stelle sich der lineare Bereich befindet. Er wird zum Rand des Gitters durch höhere Anregungen begrenzt, deren Abfall durch eine Summe von Exponentialfunktionen gegeben ist (vgl. (4.48)). Zur Mitte des Gitters hingegen wird er durch das Minimum der Korrelationsfunktion begrenzt. Der Nichtlinearitätsbereichs um das Minimum hat etwa die Größe der inversen Gittermasse. Der lineare *Fit* wurde dem *Fit* des hyperbolischen Kosinus vorgezogen, da das Konvergenzverhalten besser war.

Bei der Massenextraktion ist somit darauf zu achten, daß die inverse Gittermasse einerseits kleiner als die Gitterlänge ist, da ansonsten sogenannte *finite-size*-Effekte auftreten (kein Linearitätsbereich für den *Fit*), andererseits muß die inverse Gittermasse größer als 1 sein, da ansonsten für den linearen *Fit* nur sehr wenige Punkte verbleiben. Desweiteren führt der starke Abfall der Korrelationsfunktion in Verbindung mit unzureichender Statistik dazu, daß diese kleiner als Null werden kann.

Im folgenden entfällt der Index L an den Massen, da es sich immer um Gittermassen handelt. Falls von physikalischen Massen gesprochen wird, werden diese mit dem Index „phys“ versehen. Aus den beiden Forderungen, daß $1/m > 1$ (Vermeidung von Gitterartefakten) und $1/m < L$ (Vermeidung von *finite-size*-Effekten) sein muß, ergeben sich für die Gittermasse die Grenzen

$$1 < m \cdot L < L. \quad (4.57)$$

Da in der zu simulierenden Theorie keine Massen auftreten, wurde die Eichkopplung α_L so gewählt, daß die extrahierte Masse die Anforderungen (4.57) erfüllt.

Zur Auswertung der bosonischen und fermionischen Massen wurden in den Meßprogrammen die entsprechenden Zweipunktsfunktionen als Daten über dem Gitter in 100 gemittelten Blöcken gespeichert (diese Daten werden im folgenden als Zeitreihen bezeichnet) und mit einem „Octave“-Programm ausgewertet. Dazu wurde einer dieser Blöcke ausgelassen und ein *Fit* (auf die oben beschriebene Art und Weise) über die „leasqr“-Methode von „Octave“ für die restlichen Blöcke berechnet. Der ausgelassene Block wurde dabei immer weiter nach hinten verschoben. Aus jedem dieser 100 *Fits* wurde die zugehörige Masse extrahiert und gespeichert. Durch dieses Vorgehen kann man die Masse mit (4.9) berechnen und den Jackknife-Fehler mit Hilfe von (4.11) angeben.

Im Falle der vollständigen Theorie mit Eichfeld und Fermionen wurde das Verhältnis m_B/m_F auf die gleiche Art und Weise berechnet. Dieses Verhältnis ist dimensionslos und hat sowohl in Gittergrößen als auch in physikalischen Größen denselben Wert. Deshalb ist es eine geeignete Größe, um zu beurteilen, ob die simulierte Theorie supersymmetrisch sein könnte.

4.5.2 Berechnung der Pfaffschen Determinante⁵

Wie in Abschnitt 4.4.3 dargelegt, müssen die Fermionen ausintegriert und dann durch den Logarithmus der Fermionendeterminante als effektives Potential in der Wirkung zur Simulation des Pfadintegrals berücksichtigt werden. Da es sich um Majorana-Fermionen (was in Abschnitt 5.2.1 noch konkretisiert wird) handelt, kann man nicht die Determinante benutzen, sondern muß mit der Pfaffschen Determinante rechnen. Quadriert man diese, erhält man die gewöhnliche Determinante der zugehörigen Matrix. Deshalb ist es möglich, die Simulation mit der Wurzel der Determinanten anstatt der Pfaffschen Determinante durchzuführen.

Durch die Simulation mit der Wurzel aus der Determinante der Fermionenmatrix (was identisch mit einer Simulation mit einer effektiven Wirkung gemäß (4.42) ist) gehen die Informationen über das Vorzeichen der Pfaffschen Determinante verloren. Dies kann durch sogenanntes Rückwichten im Meßprozeß korrigiert werden, indem man den Erwartungswert einer Observable \mathcal{O} mit S_{eff} gemäß (4.42) bzw. (5.109) durch

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}\Phi \mathcal{O}[\Phi] e^{-S_{\text{eff}}[\Phi]} \text{sign Pf } \mathcal{M}[\Phi]}{\int \mathcal{D}\Phi e^{-S_{\text{eff}}[\Phi]} \text{sign Pf } \mathcal{M}[\Phi]} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\Phi_+ \mathcal{O}[\Phi_+] e^{-S_{\text{eff}}[\Phi_+]} - \int \mathcal{D}\Phi_- \mathcal{O}[\Phi_-] e^{-S_{\text{eff}}[\Phi_-]}}{\langle + \rangle - \langle - \rangle} \end{aligned} \quad (4.58)$$

definiert [CK03]. Da im Nenner von Gleichung (4.58) die Differenz der Anzahl der Vorzeichen steht, ist der Erwartungswert nicht mehr sinnvoll definiert, wenn

$$\langle + \rangle \approx \langle - \rangle$$

ist und weist dann erhebliche Fehler auf. Diesen Sachverhalt nennt man **Vorzeichenproblem**.

Um dies auszuschließen, muß man für jede Simulation den Mittelwert des Vorzeichens der Pfaffschen Determinanten berechnen. Ist er exakt 1 oder -1 , muß man nicht zurückwichten. Für alle anderen Werte muß man zurückwichten, wobei die Fehler größer werden, je mehr man sich dem Wert Null nähert.

Im folgenden werden zwei Berechnungsverfahren der Pfaffschen Determinante vorgestellt, wobei für beide Verfahren im Vergleich mit der Determinantenberechnung von LAPACK eine Performance-Analyse durch den Verfasser durchgeführt wurde.

4.5.2.1 Berechnung der Pfaffschen Determinante nach [CK03]

Dieses Verfahren zur Berechnung des Pfaffschen erfolgt ähnlich einem „Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren“. Der Algorithmus im einzelnen stellt sich folgendermaßen dar:

1. Setze eine $2N \times 2N$ Matrix $Q = \text{diag}(1, \dots, 1) = \{e_i\}$ wobei e_i die Spalten dieser Matrix sind.
2. Für alle ungeraden Spaltennummern $i = 1, 3, \dots, 2N - 1$ führe folgende Schritte aus:
 - a) e_i bleibt, wie es ist,
 - b) e_{i+1} wird zu $\frac{e_{i+1}}{e_{i+1}^T M e_i}$,

⁵im Englischen *Pfaffian* genannt; nicht zu verwechseln mit der Determinante aus der linearen Algebra

- c) für $k = i + 2, i + 3, \dots, 2N$ ersetze e_k durch $e_k - e_i(e_{i+1}^T M e_k) + e_{i+1}(e_i^T M e_k)$ mit dem in (2b) ersetzten e_{i+1} .

3. Dann ist $\text{Pf}M = (\det Q)^{-1}$.

Eine naive Komplexitätsanalyse für diesen Algorithmus ergab $\mathcal{O}(N^4)$. Desweiteren sind Skalarprodukte und Divisionen sehr zeitaufwendig. Aufgrund dessen wurde nach einem schnelleren Algorithmus gesucht, der im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

4.5.2.2 Berechnung der Pfaffschen Determinante nach [JC06]

Dieser Algorithmus zerlegt eine antisymmetrische $2N \times 2N$ Matrix in eine Blockform

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & C \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

wobei A eine 2×2 Matrix, B eine $2 \times 2(N-1)$ Matrix und C eine $2(N-1) \times 2(N-1)$ Matrix ist. Sowohl A als auch C sind antisymmetrisch. Nach dieser Zerlegung wurde in [JC06] eine Produktformel

$$\det M = \det A \det(C + B^T A^{-1} B) \quad (4.60)$$

zur Berechnung der Determinante angegeben. Diese Formel drückt die Determinante als rekursives Produkt von N Zahlen aus, da $C + B^T A^{-1} B$ wieder analog zur ursprünglichen Matrix M behandelt werden kann.

Aufgrund der vollständigen Antisymmetrie von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

und $C + B^T A^{-1} B$, kann man die Pfaffsche Determinante durch eine analoge Vorschrift

$$\text{Pf}M = a_{12} \text{Pf}(C + B^T A^{-1} B) \quad (4.62)$$

berechnen. Gleichung (4.62) ist für den Fall, daß A nicht invertierbar, d.h. $a_{12} = 0$ ist, nicht wohldefiniert. In diesem Fall ist die Matrix so umzuordnen, daß keine verschwindenden Nebendiagonalelemente auftreten. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem durch die Tensorproduktstruktur der Fermionenmatrix \tilde{Q} umgangen.

Vorgenannter Algorithmus ist wesentlich schneller als der Algorithmus in 4.5.2.1 denn eine naive Komplexitätsanalyse lieferte hier $\mathcal{O}(N^3)$. Zur Beurteilung der Geschwindigkeit der Algorithmen und zur Überprüfung der Komplexitätsberechnungen wurde eine Performance-Analyse dieser Algorithmen durchgeführt, deren Ergebnisse in Abschnitt 6.1 dargestellt sind.

4.6 Kontinuumslimes, 't Hooft-Limes und geeignete Simulationsparameter

Um den Kontinuumslimes durchführen zu können, muß man beachten, daß sich bei einer Vergrößerung des Gitters die physikalischen Parameter ändern. Überdies geht es in Teilen dieser

Arbeit um die Durchführung eines 't Hooft-Limes. Es ist also ein Parameter erforderlich, der dimensionslos ist, den 't Hooft-Limes und den Übergang zum Kontinuum respektiert. Bei der Kontruktion dieses Parameters wird hier der Weg von Catterall et al. in [CW07] eingeschlagen. Die Kopplungsstärke der D -dimensionalen Theorie hat gemäß (3.23) die Dimension $L^{-2+\frac{D}{2}}$, ist also in der vierdimensionalen Theorie dimensionslos. Da man aber das Volumen des Kompaktifizierungsbereiches ausintegrieren kann, wird eine neue (dimensionsbehaftete) Kopplungsstärke

$$\alpha = 1/g_{(1)}^2 = V_3/g_{(4)}^2 \quad (4.63)$$

eingeführt. Diese kann durch die physikalische Boxgröße

$$R = aL \quad (4.64)$$

in dritter Potenz dividiert werden und wird damit dimensionslos. Der 't Hooft-Limes wird für endliche, fixierte 't Hooft-Kopplung

$$\lambda = g_{(1),\text{phys}}^2 N_c, \quad (4.65)$$

welche ebenso die Dimension einer Länge in dritter Potenz hat, durchgeführt.

Somit bleibt nur noch

$$\alpha/R^3 = V_3/(g_{(4)}^2 R^3) = 1/(g_{(1)}^2 R^3) = N_c/(\lambda R^3) \quad (4.66)$$

als dimensionsloser Parameter. Wie man an (4.66) sieht, steuert man durch Festlegung von $g_{(1)}$ entweder die Kopplungsstärke der vierdimensionalen Theorie bei festgehaltenem Kompaktifizierungsvolumen V_3 oder das Verhältnis V_3/R^3 bei festgehaltener Kopplungsstärke. Durch Erhöhung von $g_{(1)}$ bewegt man sich zum Niederenergiebereich der vierdimensionalen Theorie, was sowohl einer Verkleinerung des Verhältnisses V_3/R^3 , als auch einer Vergrößerung von $g_{(4)}$ entspricht.

Zur Charakterisierung der Theorie wird eine dimensionslose inverse Temperatur

$$\beta = \lambda^{1/3}/T = \lambda^{1/3}R \quad (4.67)$$

eingeführt, die bei Simulationen mit verschiedenen N_c als Parameter benutzt wird. Diese steht dann über

$$\alpha = \frac{N_c R^3}{\beta^3} \quad (4.68)$$

mit α in Verbindung. Eliminiert man nun noch durch Übergang zu $a = 1$ die Gitterkonstanten, erhält man die (mit Index L bezeichneten) zugehörigen Gittergrößen

$$\alpha_L = \frac{N_c L^3}{\beta^3}. \quad (4.69)$$

Nun kann durch Vorgabe von β sowohl der Kontinuumslices als auch der 't Hooft-Limes in einer wohldefinierten Art und Weise durchgeführt werden. Dies wird in Kapitel 6 gezeigt.

5 Analytische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die analytischen Ergebnisse vorgestellt, die eine Vorbetrachtung zu den numerischen Resultaten darstellen. Die analytischen Resultate lassen sich in drei Teile einteilen. Ein Teil sind analytische Vorbetrachtungen um die Implementierungen zu testen, wie z.B. die Wirkungserwartungswerte auf dem Gitter oder Nullmodenzahlen von Gitteroperatoren.

Der zweite Teil sind analytische Ergebnisse, die für die Implementierung der Algorithmen notwendig sind, wie z.B. die Kräfte für den Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus.

Der letzte Teil der Berechnungen sind physikalische Aussagen wie z.B. die Ein-Schleifen-Näherung.

5.1 Bosonischer Teil

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit analytischen Berechnungen zur bosonischen Theorie ohne Fermionenbeiträge.

5.1.1 Eichinvarianz von Observablen

Da die hier betrachtete Theorie auf einen Kreis kompaktifiziert ist, kann man die Eichfreiheiten nutzen und alle Links, bis auf einen, auf die Einheit setzen. Dieser Link repräsentiert dann den *Polyakov-Loop* (4.29)

$$\mathcal{P} = \prod_x U_{x,x+1}. \quad (5.1)$$

für $a = 1$ wobei $U_{L,L+1} = U_{L,1}$ ist. Hat man einen Kreis mit L Gitterpunkten, dann existieren zwischen diesen L Linkvariablen. Diese kann man einer Eichtransformation

$$\tilde{U}_{x,x+1} = V_x U_{x,x+1} V_{x+1}^{-1} \quad (5.2)$$

unterwerfen, so daß

$$\tilde{U}_{x,x+1} = \mathbb{1} \quad (5.3)$$

gilt. Fängt man nun bei \tilde{U}_{12} an und fixiert diesen auf die Einheitsmatrix, kann man

$$V_2 = V_1 U_{12} \quad (5.4)$$

wählen. Weiter hat man dann

$$V_3 = V_2 U_{23} \quad (5.5)$$

um \tilde{U}_{23} auf die Einheit zu fixieren. Diesen Vorgang kann man fortsetzen über

$$V_{x+1} = V_x U_{x,x+1} = V_1 U_{12} \dots U_{x-1,x} U_{x,x+1}$$

zu

$$\begin{aligned} V_{L+1} &= V_L U_{L,1} \\ &= V_{L-1} U_{L-1,L} U_{L,1} \\ &\vdots \\ &= V_1 U_{12} \dots U_{L-1,L} U_{L,1} \\ &= V_1 \mathcal{P} \end{aligned} \tag{5.6}$$

um $U_{L,1}$ auf die Einheit zu fixieren. Die Spur von \mathcal{P} ist nur dann eine eichinvariante Größe, wenn $V_1 = V_{L+1}$ identifiziert wird, denn

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathcal{P} &= \text{tr} U_{12} U_{23} \dots U_{L-1,L} U_{L,L+1} \\ &= \text{tr} V_1 U_{12} V_2^{-1} V_2 U_{23} V_3^{-1} \dots V_{L-1} U_{L-1,L} V_L^{-1} V_L U_{L,1} V_{L+1}^{-1} \\ &\stackrel{V_1=V_{L+1}}{=} \text{tr} \tilde{U}_{12} \tilde{U}_{23} \dots \tilde{U}_{L-2,L-1} \tilde{U}_{L-1,L} \tilde{U}_{L,1} = \text{tr} \tilde{\mathcal{P}}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Das heißt, man kann V_{L+1} nicht mehr so wählen, daß der letzte Link gleich der Einheit ist, da es gleich V_1 ist. Andersherum kann man auch argumentieren: Da man eine eichinvariante Größe durch Eichtransformationen nicht ändern kann und \mathcal{P} im Allgemeinen nicht gleich der Einheitsmatrix ist, muß mindestens einer der Linkvariablen $U \neq \mathbb{1}$ sein.

Zusätzlich kann man das letzte U noch einer konstanten Eichtransformation V unterwerfen, so daß U auf Diagonalform gebracht wird, denn $\text{tr} \mathcal{P} = \text{tr} U = \text{tr} V^{-1} U V$. Nimmt man nun $U = \text{diag}(e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_{N_c}})$, so folgt aus der Bedingung $\det U = 1$, daß einer der Winkel nicht unabhängig von den anderen sein darf. Dies soll hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\phi_{N_c} = -\sum_{n=1}^{N_c-1} \phi_n$ sein.

Jetzt hat man mehrere Möglichkeiten, Eichfeldkonfigurationen zu wählen, die eichäquivalent sind, aber einige Rechnungen vereinfachen. Zum Beispiel kann man den *Polyakov-Loop* in Diagonalform über alle Links gleichverteilen, oder nur einen Link benutzen und alle anderen auf die Einheit fixieren. Bei dieser Eichfixierungsprozedur tritt keine Faddeev-Popov-Determinante auf (siehe hierzu [MM94, Seite 101ff]).

5.1.2 Adjungierte Darstellung einer diagonalen $SU(N_c)$ -Matrix

Einige der Ergebnisse sind Erwartungswerte, bei denen das Pfadintegral analytisch ausgewertet werden kann. Diese hängen mit der Determinanten eines diskretisierten Differentialoperators zusammen, der sowohl Farb-, als auch Gitterindizes (und bei den Fermionen zusätzlich noch Spinor-Indizes) trägt. Um diese Determinanten oder die Spektren solcher diskretisierter Differentialoperatoren zu berechnen, muß die adjungierte Darstellung einer diagonalen $SU(N_c)$ -Matrix in der fundamentalen Darstellung gefunden werden.

$$\begin{aligned}
 U_D E_{\vec{\alpha}} U_D^\dagger &= e^{ih^a H_a} E_{\vec{\alpha}} e^{-ih^a H_a} \\
 &\stackrel{\text{(BCH)}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [ih^a H_a, E_{\vec{\alpha}}]_m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [ih^a H_a, [ih^a H_a, [\dots, [ih^a H_a, E_{\vec{\alpha}}] \dots]]] \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (ih^a \alpha_a)^m E_{\vec{\alpha}} \\
 &= e^{ih^a \alpha_a} E_{\vec{\alpha}}.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Damit kann man auch die adjungierte Gruppenwirkung auf die Leiteroperatoren (5.11), (5.12) berechnen.

Wenn man

$$(E_{\vec{\alpha}})_{mn} = (E_{ij})_{mn} = \delta_{im} \delta_{jn}, \quad i < j \tag{5.15}$$

und

$$(H_a)_{mn} = h_m^a \delta_{mn} \tag{5.16}$$

nutzt, ergibt sich $\text{tr}(E_{\vec{\alpha}} H_a) = \delta_{im} \delta_{jn} h_n^a \delta_{nm} \sim \delta_{ij} = 0$, weil $i < j$ ist. Daraus folgt, daß der Block, in dem ein λ Cartan-Generator und das andere λ eine Linearkombination der Leiteroperatoren ist, identisch Null wird.

Somit bleibt nur noch der Block, in dem beide λ Linearkombinationen aus Aufsteigern und Absteigern sind. Für die folgende Betrachtung wird die Spurrelation zwischen zwei verschiedenen Leiteroperatoren ausgerechnet. Dabei soll $E_{\vec{\alpha}}$ in der i -ten Zeile und j -ten Spalte und $E_{\vec{\beta}}$ in der k -ten Zeile und ℓ -ten Spalte gemäß

$$(E_{\vec{\alpha}})_{mn} = \delta_{im} \delta_{jn} \tag{5.17}$$

$$(E_{\vec{\beta}})_{mn} = \delta_{km} \delta_{\ell n}. \tag{5.18}$$

eine Eins haben. Die Spur ist dann einfach die vollständige Kontraktion über alle Matrizen-Indizes $\text{tr}(E_{\vec{\alpha}} E_{\vec{\beta}}) = \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kn} \delta_{\ell m} = \delta_{i\ell} \delta_{jk} = 0$ für $i \neq \ell$ oder $j \neq k$. Insbesondere folgt daraus, daß $R_{ab} = 0$ ist, falls a und b nicht zu denjenigen λ gehören, die nur aus $E_{\vec{\alpha}}$ und $E_{-\vec{\alpha}}$ gebildet werden. Also muß man nur noch die Matrixelemente $R_{aa}, R_{a,a+1}, R_{a+1,a}$ und $R_{a+1,a+1}$ betrachten, wobei $\lambda_a = E_{\vec{\alpha}} + E_{-\vec{\alpha}}$ und $\lambda_{a+1} = -i(E_{\vec{\alpha}} - E_{-\vec{\alpha}})$ ist. Hierbei sind die Spurrelationen $\text{tr}(E_{\vec{\alpha}} E_{\vec{\alpha}}) = 0$ und $\text{tr}(E_{\vec{\alpha}} E_{-\vec{\alpha}}) = 1$ relevant. Denn aus (5.14) erhält man für

$$\begin{aligned}
 R_{a,a} &= \frac{1}{2} \text{tr}(e^{ih^a H_a} (E_{\vec{\alpha}} + E_{-\vec{\alpha}}) e^{-ih^a H_a} (E_{\vec{\alpha}} + E_{-\vec{\alpha}})) \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr}(e^{ih^a \alpha_a} (E_{\vec{\alpha}} + E_{-\vec{\alpha}}) (E_{\vec{\alpha}} + E_{-\vec{\alpha}})) \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr}(e^{-ih^a \alpha_a} E_{-\vec{\alpha}} E_{\vec{\alpha}} + e^{ih^a \alpha_a} E_{\vec{\alpha}} E_{-\vec{\alpha}}) \\
 &= e^{-ih^a \alpha_a} + e^{ih^a \alpha_a} = \cos(h^a \alpha_a).
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Analog findet man für die anderen Matricelemente

$$R_{a,a+1} = -\sin(h^a \alpha_a) \quad (5.20)$$

$$R_{a+1,a} = \sin(h^a \alpha_a) \quad (5.21)$$

$$R_{a+1,a+1} = \cos(h^a \alpha_a). \quad (5.22)$$

Somit hat die Matrix R_{ab} folgende Struktur (E steht für Leiteroperatoren und H für Cartan-Generatoren in der Spur)

$$R(U_D) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} R_1 & & & & & \\ & R_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ EE\text{-Block} & & & R_{N_c(N_c-1)/2} & & HE\text{-Block} \\ \hline & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ EH\text{-Block} & & & & HH\text{-Block} & 1 \end{array} \right), \quad (5.23)$$

wobei jede der R_i 2×2 -Drehmatrizen sind die zu den Wurzeln der Gruppe gehören. Für den Fall, daß der zu R gehörige Link ein Zentrumselement $U_Z = e^{i2\pi k/N_c} \mathbf{1}$ ist, wird $R_{ab}(U_Z) = \frac{1}{2} \text{tr} U_Z \lambda_a U_Z^\dagger \lambda_b = \frac{1}{2} \text{tr} \lambda_a \lambda_b = \delta_{ab}$. Mit dieser berechneten Struktur einer adjungierten Linkvariablen, deren fundamentale Darstellung diagonal ist, kann man die Eigenwerte sowohl des bosonischen als auch des fermionischen Gitter-Differentialoperators in der freien Theorie berechnen.

5.1.3 Wirkungserwartungswerte der freien bosonischen Theorie

Da die freie Wirkung $S_B^{(0)} = \Phi_{x,i}^a \mathcal{D}_{x,i;y,j}^{ab} \Phi_{y,j}^b$ ¹ (hier gekennzeichnet durch den Index (0)) quadratisch in den Feldvariablen Φ ist, kann man das Pfadintegral über die Φ -Variablen analytisch integrieren. Dabei bezeichnen a, b Farbindizes, x, y Gitterpunkte und i, j die Nummer des Kompaktifizierungsbosons. Die Anzahl der Kompaktifizierungsskalare sei s und die Anzahl der Gitterpunkte sei L . Die Zustandssumme der Theorie ist durch

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}U \exp(-S_B^{(0)}[\Phi, U]) \quad (5.24)$$

gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle S_B^{(0)} \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}U S_B^{(0)}[U, \Phi] \exp(-S_B^{(0)}[\Phi, U]) \\ &= -\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{d}{d\lambda} \int \mathcal{D}U \int \Pi_x d\Phi_x \exp(-\lambda \Phi^T \mathcal{D}[U] \Phi) \Big|_{\lambda=1}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Für den Fall, daß $\mathcal{D}[U]$ Nullmoden besitzt (was definitiv der Fall ist), fallen bei der gaußschen Integration diejenigen Terme im Exponenten weg, welche den Nullmoden entsprechen. Im

¹Der Gitteroperator der Kompaktifizierungsskalare wird oft als Gitter-Laplace-Operator bezeichnet.

folgenden stellt \mathcal{D}' den um die Nulleigenwerte bereinigten Gitteroperator dar. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}
 \langle S_B^{(0)} \rangle &= -\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{d}{d\lambda} \int \mathcal{D}U \frac{1}{\sqrt{\det(\lambda \mathcal{D}'[U])}} \Big|_{\lambda=1} \\
 &= -\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{d}{d\lambda} \int \mathcal{D}U \frac{1}{\sqrt{\lambda^{(N_c^2-1)Ls - \#\text{Nullmoden}} \det(\mathcal{D}'[U])}} \Big|_{\lambda=1} \\
 &= -\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{d}{d\lambda} \lambda^{-s(N_c^2-1)\frac{L}{2} - \frac{1}{2}\#\text{Nullmoden}} \int \mathcal{D}U \frac{1}{\sqrt{\det(\mathcal{D}'[U])}} \Big|_{\lambda=1} \\
 &= \frac{1}{2} ((N_c^2 - 1)Ls - \#\text{Nullmoden}) \cdot \frac{\int \mathcal{D}U \frac{1}{\sqrt{\det(\mathcal{D}'[U])}}}{\mathcal{Z}} \\
 &= \frac{Ls(N_c^2 - 1) - \#\text{Nullmoden}}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Dieser Wert ist eichinvariant und hängt nur von der Nullmodenzahl von \mathcal{D} ab.

Nun soll die Anzahl der Nullmoden des Gitter-Differentialoperators analytisch hergeleitet werden. Dazu schreibt man die freie Wirkung mit diagonal und konstant eichfixiertem Linkfeld für einen Skalar gemäß

$$S_B^{(0)} = \sum_{x,y,a,b} \Phi_x^a \mathcal{D}_{xy,ab} \Phi_y^b \tag{5.27}$$

um, wobei sämtliche Vorfaktoren vor der Wirkung vernachlässigt wurden. Der Gitteroperator \mathcal{D} hat dabei die Gestalt

$$\mathcal{D}_{ab,xy} = (2 + m_B^2) \delta_{xy} \delta_{ab} - \delta_{x,y-1} R_{ab}(U_D) - \delta_{y,x-1} R_{ba}(U_D). \tag{5.28}$$

Um die Eigenwerte zu finden, muß man die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{D}_{xy,ab} \Phi_y^b = \lambda \Phi_x^a \tag{5.29}$$

mit

$$\Phi_x^a = C^a e^{ipx} \tag{5.30}$$

lösen. Dieser Wellenansatz funktioniert aufgrund des Fehlens x -abhängiger Felder in \mathcal{D} . Da die adjungierte Darstellung einer diagonalen $SU(N_c)$ -Matrix U_D gemäß (5.23) in 5.1.2 gegeben ist, kann man die Einseinträge und die Drehmatrizeneinträge getrennt behandeln. Dabei bekommt man aus der Eigenwertgleichung für die Farbindizes, welche den Einseinträgen entsprechen,

$$\lambda(p) = 2 + m_B^2 - 2 \cos p = m_B^2 + 4 \sin^2 \frac{p}{2}. \tag{5.31}$$

Durch die periodischen Randbedingungen können die Impulse p nur quantisierte Werte $p = \frac{2\pi}{L}n$, $n = 0, \dots, L-1$ annehmen. Somit erhält man

$$\lambda_n = m_B^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{L}n \right). \tag{5.32}$$

Für die Drehmatrizeneinträge muß man das charakteristische Polynom einer 2×2 -Matrix ausrechnen, welches sich mit

$$R_i(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

aus

$$\det((2 + m_B^2 - \lambda)\mathbf{1} - e^{-ip}R_i(\phi) - e^{ip}R_i^T(\phi)) = 0 \quad (5.34)$$

ergibt. Man erhält

$$\begin{aligned} \det((2 - \lambda)\mathbf{1} - e^{-ip}R_i(\phi) - e^{ip}R_i^T(\phi)) &= \\ \det \begin{pmatrix} 2 + m_B^2 - \lambda - 2 \cos \phi \cos p & 2i \sin p \sin \phi \\ -2i \sin p \sin \phi & 2 + m_B^2 - \lambda - 2 \cos \phi \cos p \end{pmatrix} &= \\ (2 + m_B^2 - \lambda - 2 \cos p \cos \phi)^2 - 4 \sin^2 \phi \sin^2 p &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Dieses wird durch

$$\lambda(p) = 2 + m_B^2 - 2 \cos(p \pm \phi) = m_B^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{p \pm \phi}{2} \right) \quad (5.36)$$

gelöst. Wenn man nun noch die quantisierten Impulse einsetzt, erhält man insgesamt für alle Eigenwerte

$$\lambda_n^{(1)} = m_B^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{L} n \right) \quad (N_c - 1 \text{ fach entartet}) \quad (5.37)$$

$$\lambda_n^{(R_i)} = m_B^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{L} n \pm \frac{\phi_i}{2} \right), \quad i = 1, \dots, N_c(N_c - 1)/2 \quad (5.38)$$

und sieht, daß im masselosen Fall $m_B = 0$ nur für die $\lambda^{(1)}$ genau $N_c - 1$ Nullmoden auftreten können. Sind die Winkel $\phi_i = 0$ (kein Eichfeld vorhanden) ist $\lambda_n^{(1)}$ genau $N_c^2 - 1$ -fach entartet und man hat dementsprechend $N_c^2 - 1$ Nullmoden. Ist $m_B > 0$, so werden die Nullmoden vollständig eliminiert.

Anschaulich gesprochen entspricht zum Beispiel bei $N_c = 2$ jeder Link einer Drehung, wodurch zwei der drei Nullmoden eliminiert werden, da die Drehachse invariant bleibt. Schließlich hat man folgende Wirkungserwartungswerte für unterschiedliche Eichfeldkonfigurationen in der freien Theorie.

$$\langle S_B^{(0)} \rangle_{\text{kein Eichfeld}, m_B=0} = \frac{1}{2} s(N_c^2 - 1)(L - 1) \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \langle S_B^{(0)} \rangle_{\text{Eichfeld}, m_B=0} &= \frac{1}{2} s(N_c^2 - 1) \\ &\times \left(L - \frac{1}{(N_c + 1)} \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\langle S_B^{(0)} \rangle_{\text{Eichfeld}, m_B \neq 0} = \langle S_B^{(0)} \rangle_{\text{kein Eichfeld}, m_B \neq 0} = \frac{1}{2} s(N_c^2 - 1)L \quad (5.41)$$

Bei den Berechnungen mit Eichfeld wurde allerdings nicht beachtet, daß die Dynamik des Eichfeldes das Eichfeld auch zu den Zentrumselementen hinbewegen kann. Dann stimmt der

Wirkungserwartungswert natürlich nicht mehr mit dem berechneten Wert überein, sondern wird eher in Richtung des Wirkungserwartungswertes der freien Theorie ohne Eichfeld tendieren. Die Dynamik der freien, masselosen Theorie mit Eichfeld wird im Abschnitt 6.2.3 noch genauer beleuchtet. Der Wirkungserwartungswert, der sich ergibt, wenn man $m_B \neq 0$ setzt, also sämtliche Nullmoden beseitigt, wird in manchen Ergebnissen von der eigentlichen Wirkung subtrahiert um Abweichungen von der freien, massiven Theorie zu messen. Diese sogenannte **subtrahierte Wirkung** wird durch

$$\langle s_B \rangle := \frac{1}{N_c^2} \left(\langle S_B \rangle - \langle S_B^{(0)} \rangle_{m_B \neq 0} \right) \quad (5.42)$$

definiert. Der Faktor $1/N_c^2$ sorgt dafür, daß dieser Erwartungswert im 't Hooft-Limes nicht divergiert. Über die bosonische Gitterwirkung

$$S_B = \frac{1}{2} \frac{N_c L^3}{\beta^3} \sum_x \left(\text{tr}(D\Phi_i)_x^2 - \frac{1}{2} \text{tr}[\Phi_{i,x}, \Phi_{k,x}]^2 \right) = \frac{1}{\beta^3} \tilde{S} \quad (5.43)$$

erhält man die bosonische Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}U e^{-\frac{1}{\beta^3} \tilde{S}}. \quad (5.44)$$

Durch Berechnen der Definition der inneren Energie des Systems (gemäß [CW07])

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \log \mathcal{Z} = -\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \beta} \frac{1}{\mathcal{Z}} = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}U \frac{3}{\beta^4} \tilde{S} \cdot e^{-\frac{1}{\beta^3} \tilde{S}} \\ &= -\frac{3}{\beta} \langle S_B \rangle \end{aligned} \quad (5.45)$$

erhält man diese als Funktion von β und dem Wirkungserwartungswert. Nun kann man durch die subtrahierte Wirkung auch eine subtrahierte innere Energie

$$\langle s_B \rangle = -\frac{\beta}{3} \langle \varepsilon \rangle = -\frac{\beta}{3} \frac{1}{N_c^2} (\langle E \rangle - E_0) \quad (5.46)$$

eingeführen, die nicht mehr mit N_c^2 skaliert und auch keine Nullpunktsbeiträge mehr besitzt, wobei

$$E_0 = -\frac{\beta}{3} \langle S_B^{(0)} \rangle_{m_B \neq 0} = -\frac{\beta}{6} s(N_c^2 - 1)L \quad (5.47)$$

ist.

5.1.4 Ein-Schleifen-Näherung der bosonischen Theorie mit Eichfeld

Die Ein-Schleifen-Näherung soll eine Infrarotdivergenz der Theorie

$$S_B = \frac{1}{2g^2} \int_0^R d\tau \left(\text{tr}(D\Phi_i)^2 - \frac{1}{2} \text{tr}[\Phi_i, \Phi_j] \right) \quad (5.48)$$

ausschließen. Dies wird bewerkstelligt, indem man die effektive Wirkung in dieser Näherung in Abhängigkeit von bestimmten effektiven Variablen ausrechnet (wie in Anhang C ausführlich gezeigt). Nach Ausintegration der Fluktuationen treten gemäß [CW07] die Differenzen der Diagonalelemente der Feldvariablen

$$\Delta A^{ab} = R(A^a - A^b) \quad (5.49)$$

$$\Delta \phi_i^{ab} = R(\phi_i^a - \phi_i^b) \quad (5.50)$$

in der Wirkung als effektive Variablen auf. Nach der Entwicklung wird eine Eichfixierung durchgeführt. Anschließend werden die Fluktuationen einer Modenentwicklung

$$\delta A_{ab}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta A_{ab}^{(m)} e^{\frac{2\pi}{R} im\tau} \quad (5.51)$$

$$\delta \phi_{i,ab}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \phi_{i,ab}^{(m)} e^{\frac{2\pi}{R} im\tau} \quad (5.52)$$

unterworfen. Dies führt dazu, daß man die eichfixierte Wirkung gemäß

$$S_{\text{quenched}}^{\text{quadr}} = 2 \sum_{a < b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \left((2\pi m + \Delta A^{ab})^2 + \sum_i (\Delta \phi_i^{ab})^2 \right) \quad (5.53)$$

schreiben kann². Dieser offensichtlich divergente Ausdruck wird mit Hilfe der in Anhang C.4 dargestellten Methoden regularisiert und liefert

$$S_{\text{quenched}}^{\text{quadr,reg}} = 2 \sum_{a < b} \log \left(\cosh \left| \Delta \phi^{ab} \right| - \cos \Delta A^{ab} \right) \quad (5.54)$$

Diese effektive Wirkung besitzt keine Infrarotdivergenzen mehr, da das effektive Potential attraktiv ist und große Separationen $|\Delta \phi^{ab}|$ energetisch ungünstig sind, wie man in Abb. 5.1 sieht. In [CW07] wird argumentiert, daß die semiklassische Entwicklung nur gültig ist, falls

$$|\Delta \phi^{ab}| \gg \beta^{3/4} \quad (5.55)$$

ist.

²*quenched* bedeutet Vernachlässigung der Fermionenfriheitsgrade

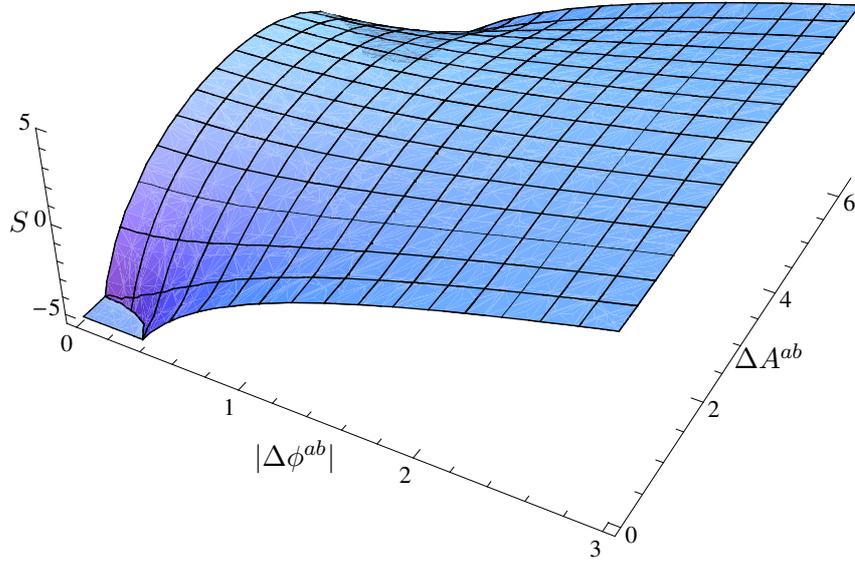


Abbildung 5.1: Effektive, regularisierte Ein-Schleifen-Wirkung der wechselwirkenden, bosonischen Theorie

5.1.5 Ableitung der bosonischen Wirkung für die HMC-Integration

Legt man die bosonische Wirkung auf dem Gitter gemäß (4.34)

$$\begin{aligned}
 S_B &= \alpha \sum_x \left(2 \sum_i (\Phi_{i,x}^a \Phi_{i,x}^a - \Phi_{i,x}^a R_{ab}(U_{x,x+1}) \Phi_{i,x+1}^b) \right. \\
 &\quad \left. + m_B^2 \sum_i \Phi_{i,x}^a \Phi_{i,x}^a + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \tilde{f}_{abc} \tilde{f}_{dec} \Phi_{i,x}^a \Phi_{j,x}^b \Phi_{i,x}^d \Phi_{j,x}^e \right) \\
 &= S_{\text{kin}} + S_{\text{pot}}
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

zugrunde, dann ist

$$F_{k,y}^g = \frac{\partial S}{\partial \Phi_{k,y}^g} \tag{5.57}$$

die verallgemeinerte Kraft am Punkte y mit der Farbe g für das k -te Kompaktifizierungsboson (das Vorzeichen in der Kraft ist positiv, da das negative Vorzeichen im Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus bei der Impulsintegration generisch implementiert worden ist). Die Kraft des kinetischen Terms ergibt sich demnach durch

$$\begin{aligned}
F_{k,y}^{g,\text{kin}} &= \frac{\partial S_{\text{kin}}}{\partial \Phi_{k,y}^g} \\
&= \alpha \frac{\partial}{\partial \Phi_{k,y}^g} \sum_x \left(\sum_i ((2 + m_B^2) \Phi_{i,x}^a \Phi_{i,x}^a - 2 \Phi_{i,x}^a R_{ab}(U_{x,x+1}) \Phi_{i,x+1}^b) \right) \\
&= \alpha \sum_x \left(\sum_i (2(2 + m_B^2) \delta_{ik} \delta_{xy} \delta_{ag} \Phi_{i,x}^a - 2 \delta_{ik} \delta_{xy} \delta_{ag} R_{ab}(U_{x,x+1}) \Phi_{i,x+1}^b \right. \\
&\quad \left. - 2 \Phi_{i,x}^a R_{ab}(U_{x,x+1}) \delta_{ik} \delta_{x+1,y} \delta_{bg}) \right) \\
&= 2\alpha \left((2 + m_B^2) \Phi_{k,y}^g - R_{gb}(U_{y,y+1}) \Phi_{k,y+1}^b - \Phi_{k,y-1}^a R_{ag}(U_{y-1,y}) \right). \quad (5.58)
\end{aligned}$$

Die Kraft, die dem Potentialterm zugeordnet wird, erhält man durch

$$\begin{aligned}
F_{k,y}^{g,\text{pot}} &= \frac{\partial S_{\text{pot}}}{\partial \Phi_{k,y}^g} \\
&= \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial \Phi_{k,y}^g} \sum_x \sum_{i,j} \tilde{f}_{abc} \tilde{f}_{dec} \Phi_{i,x}^a \Phi_{j,x}^b \Phi_{i,x}^d \Phi_{j,x}^e \\
&= \frac{1}{2} \alpha \sum_x \sum_{i,j} \tilde{f}_{abc} \tilde{f}_{dec} \left(\delta_{ga} \delta_{ik} \delta_{xy} \Phi_{j,x}^b \Phi_{i,x}^d \Phi_{j,x}^e + \delta_{gb} \delta_{jk} \delta_{xy} \Phi_{i,x}^a \Phi_{i,x}^d \Phi_{j,x}^e \right. \\
&\quad \left. + \delta_{gd} \delta_{ik} \delta_{xy} \Phi_{i,x}^a \Phi_{j,x}^b \Phi_{j,x}^e + \delta_{ge} \delta_{jk} \delta_{xy} \Phi_{i,x}^a \Phi_{j,x}^b \Phi_{i,x}^d \right) \\
&= \frac{1}{2} \alpha \sum_j \tilde{f}_{abc} \tilde{f}_{dec} \left(\delta_{ga} \Phi_{j,y}^b \Phi_{k,y}^d \Phi_{j,y}^e + \delta_{gb} \Phi_{i,y}^a \Phi_{i,y}^d \Phi_{k,y}^e \right. \\
&\quad \left. + \delta_{gd} \Phi_{k,y}^a \Phi_{j,y}^b \Phi_{j,y}^e + \delta_{ge} \Phi_{i,y}^a \Phi_{k,y}^b \Phi_{i,y}^d \right) \\
&= 2\alpha \tilde{f}_{gbc} \tilde{f}_{dec} \Phi_{j,y}^b \Phi_{k,y}^d \Phi_{j,y}^e. \quad (5.59)
\end{aligned}$$

Diese „Kräfte“ wurden zur Hybrid-Monte-Carlo-Integration in den Simulationen verwendet.

5.2 Fermionischer Teil

5.2.1 Majorana-Fermionen in euklidischer, vierdimensionaler Raumzeit

Da die Wickrotation der Gammastruktur in Abschnitt 4.3 vor der Kompaktifizierung durchgeführt wurde, wird in diesem Abschnitt argumentiert, wie sich die Majorana-Fermionen aus der Minkowski-Raumzeit in eine euklidische Raumzeit übertragen.

In einer vierdimensionalen euklidischen ($t = 0$)³ Raumzeit kann die Konsistenzbedingung 2.61 nicht mehr erfüllt werden, so daß man keine, mit den Lorentztransformationen verträgliche, Realitätsbedingung an die Spinoren stellen kann.

Was in diesem Zusammenhang mit Majorana-Fermionen gemeint ist, ist eine Halbierung der Freiheitsgrade, indem man ein Pfadintegral über Dirac-Fermionen in ein Quadrat aus Pfadintegralen über Majorana-Fermionen zerlegt.

³Anzahl der Zeitdimensionen, siehe Abschnitt 2.2.2

Die Zerlegung eines Dirac-Fermions in zwei Majorana-Fermionen ist rein künstlicher Natur, denn die Majorana-Fermionen erfüllen keine Realitätsbedingung mehr. Allerdings stellt die Faktorisierung des Pfadintegrals starke Anforderungen an den diskretisierten Dirac-Operator, an die γ -Matrizen und an die Ladungskonjugationsmatrix.

Unter Berücksichtigung von (5.152) und (2.40) erhält man durch Berechnung aller Spuren für die fermionische Wirkung

$$\begin{aligned}
S_F^{\text{Wilson}} &= \alpha \sum_x \left(\bar{\Psi}_x^a \frac{1}{2} \gamma_0 \left(R_{ab}(U_{x,x+1}) \Psi_{x+1}^b - R_{ab}(U_{x,x-1}) \Psi_{x-1}^b \right) \right. \\
&+ \left. m_F \bar{\Psi}_x^a \Psi_x^a - \frac{r}{2} \bar{\Psi}_x^a \left(R_{ab}(U_{x,x+1}) \Psi_{x+1}^b - 2\Psi_x^a + R_{ab}(U_{x,x-1}) \Psi_{x-1}^b \right) \right) \\
&= \alpha \sum_{xy} \left(\bar{\Psi}_x^a \frac{1}{2} \gamma_0 \left(R_{ab}(U_{xy}) \delta_{y,x+1} \Psi_y^b - R_{ab}(U_{xy}) \delta_{y,x-1} \Psi_y^b \right) \right. \\
&+ \left. m_F \bar{\Psi}_x^a \delta_{xy} \delta_{ab} \Psi_y^b - \frac{r}{2} \bar{\Psi}_x^a \left(R_{ab}(U_{xy}) \delta_{y,x+1} \Psi_y^b - 2\delta_{xy} \delta_{ab} \Psi_y^b + R_{ab}(U_{xy}) \delta_{y,x-1} \Psi_y^b \right) \right) \\
&= \alpha \sum_{xy} \sum_{ab} \bar{\Psi}_x^a \mathcal{K}_{xy}^{ab} \Psi_y^b \tag{5.60}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{xy}^{ab} &= \left((m_F + r) \delta_{ab} \delta_{xy} - \frac{r}{2} R_{ab}(U_{xy}) (\delta_{y,x+1} + \delta_{y,x-1}) \right) \mathbb{1} \\
&+ \frac{1}{2} R_{ab}(U_{xy}) (\delta_{y,x+1} - \delta_{y,x-1}) \gamma_0. \tag{5.61}
\end{aligned}$$

Weiterhin bekommt man für den Yukawa-Teil der Wirkung

$$\begin{aligned}
S_F^{\text{Yukawa}} &= \frac{i}{2} \alpha \sum_x (\text{tr} \bar{\Psi}_x \gamma_i [\Phi_{i,x}, \Psi_x]) \\
&= -\alpha \sum_x \tilde{f}_{abc} \bar{\Psi}_x^a \gamma_i \Phi_{i,x}^b \Psi_x^c \\
&= \alpha \sum_{xy} \bar{\Psi}_x^a \mathcal{W}_{xy}^{ab} \Psi_y^b \tag{5.62}
\end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{W}_{xy}^{ab} = -\tilde{f}_{acb} \Phi_{i,x}^c \delta_{xy} \gamma_i. \tag{5.63}$$

Wegen

$$\mathcal{Q} = \mathcal{K} + \mathcal{W} \tag{5.64}$$

erhält man für die diskretisierte Fermionenmatrix

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{xy}^{ab} &= \left((m_F + r) \delta_{ab} \delta_{xy} - \frac{r}{2} R_{ab}(U_{xy}) (\delta_{y,x+1} + \delta_{y,x-1}) \right) \mathbb{1} \\
&+ \frac{1}{2} R_{ab}(U_{xy}) (\delta_{y,x+1} - \delta_{y,x-1}) \gamma_0 \\
&- \tilde{f}_{acb} \Phi_{i,x}^c \delta_{xy} \gamma_i. \tag{5.65}
\end{aligned}$$

Durch Einführung des Hopping-Parameters (4.37) bekommt man für die fermionische Wirkung

$$S_F = \alpha \frac{1}{2\kappa} \sum_{xy} \sum_{ab} \bar{\Psi}_x^a \tilde{Q}_{xy}^{ab} \Psi_y^b \quad (5.66)$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{xy}^{ab} &= (\delta_{ab}\delta_{xy} - \kappa r R_{ab}(U_{xy}) (\delta_{y,x+1} + \delta_{y,x-1})) \mathbb{1} \\ &+ \kappa R_{ab}(U_{xy}) (\delta_{y,x+1} - \delta_{y,x-1}) \gamma_0 \\ &- 2\kappa \tilde{f}_{acb} \Phi_{i,x}^c \delta_{xy} \gamma_i \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} &= \delta_{ab}\delta_{xy} \mathbb{1} + \kappa R_{ab}(U_{xy}) M_1 \delta_{y,x+1} + \kappa R_{ab}(U_{xy}) M_2 \delta_{y,x-1} \\ &- 2\kappa \tilde{f}_{acb} \Phi_{i,x}^c \delta_{xy} \gamma_i. \end{aligned} \quad (5.68)$$

ist und

$$M_1 = -r\mathbb{1} + \gamma_0 \quad (5.69)$$

$$M_2 = -r\mathbb{1} - \gamma_0. \quad (5.70)$$

Reskalieren der Fermionfelder durch

$$\Psi \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{2\kappa}} \Psi \quad (5.71)$$

und

$$\bar{\Psi} \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{2\kappa}} \bar{\Psi} \quad (5.72)$$

absorbiert den Faktor $\frac{\alpha}{2\kappa}$ in die Zweipunktsfunktionen oder andere Observablen.

Zunächst wurde (nach [Mon96, Mon01]) das diracsche Pfadintegral gemäß

$$\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \exp \left(\sum_{xy,ab} \bar{\Psi}_x^a Q_{xy}^{ab} \Psi_y^b \right) \stackrel{!}{=} \left(\int \mathcal{D}\lambda \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{xy,ab} \bar{\lambda}_x^a Q_{xy}^{ab} \lambda_y^b \right) \right)^2 \quad (5.73)$$

in das Produkt zweier Majorana-Pfadintegrale zerlegt, wobei λ Majorana-Spinoren und Ψ Dirac-Spinoren sind. Die Spinor-Indizes sind in diesem Zusammenhang unterdrückt. Die Faktorisierung (5.73) wird dadurch erreicht, daß man aus den Dirac-Spinoren und deren Majorana-Konjugiertem zwei Majorana-Spinoren gemäß

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi + \Psi_c) \quad (5.74)$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}i} (\Psi - \Psi_c) \quad (5.75)$$

bildet, wobei

$$\Psi_c = \mathcal{C} \bar{\Psi}^T \quad (5.76)$$

und

$$\bar{\Psi} = \Psi_c^T \mathcal{C}. \quad (5.77)$$

gilt. Demzufolge ist die Umkehrtransformation durch

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lambda^{(1)} + i\lambda^{(2)} \right) \quad (5.78)$$

$$\Psi_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lambda^{(1)} - i\lambda^{(2)} \right) \quad (5.79)$$

gegeben. Nutzt man (5.76), (5.77) und im Vorgriff auf die Definition der hier verwendeten Ladungskonjugationsmatrix auch (5.92) und (5.93) aus, erhält man aus (5.79) die Relation

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{\lambda}^{(1)} - i\bar{\lambda}^{(2)} \right), \quad (5.80)$$

wobei $\bar{\lambda}^{(i)} = \lambda^{(i)T} \mathcal{C}$ gesetzt wurde. Setzt man dies in die fermionische Wirkung ein, ergibt sich (Vorfaktoren unterdrückt)

$$\begin{aligned} S_F &= \sum_{xy,ab} \bar{\Psi}_x^a \mathcal{Q}_{xy}^{ab} \Psi_y^b \\ &= \frac{1}{2} \sum_{xy,ab} \left(\bar{\lambda}_x^{(1)a} - i\bar{\lambda}_x^{(2)a} \right) \mathcal{Q}_{xy}^{ab} \left(\lambda_y^{(1)b} + i\lambda_y^{(2)b} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{xy,ab} \left(\bar{\lambda}_x^{(1)a} \mathcal{Q}_{xy}^{ab} \lambda_y^{(1)b} + \bar{\lambda}_x^{(2)a} \mathcal{Q}_{xy}^{ab} \lambda_y^{(2)b} - i\bar{\lambda}_x^{(2)a} \mathcal{Q}_{xy}^{ab} \lambda_y^{(1)b} + i\bar{\lambda}_x^{(1)a} \mathcal{Q}_{xy}^{ab} \lambda_y^{(2)b} \right). \end{aligned} \quad (5.81)$$

Für die folgende Argumentation bieten sich abkürzende Schreibweisen an, insbesondere für die adjungierte Darstellung der Linkvariablen wird

$$R_{ab}(U_{xy}) =: R_{xy}^{ab} \quad (5.82)$$

definiert. Dabei gilt

$$R^{ab}(U_{xy}) = R_{xy}^{ab} = R^{ba}(U_{yx}) = R_{yx}^{ba}, \quad (5.83)$$

weil $U_{xy} = U_{yx}^\dagger$ ist. Für die oben angesprochene Faktorisierung müssen im Wirkungsdruck (5.81) die Mischterme zwischen $\lambda^{(1)}$ und $\lambda^{(2)}$ verschwinden. Dies stellt Anforderungen an \mathcal{Q} , die im folgenden hergeleitet und überprüft werden. Dazu ist es zweckmäßig, die Spinorstruktur von den Farb- und Gitterteilen von \mathcal{Q} bzw. $\tilde{\mathcal{Q}}$ in Form von Tensorprodukten gemäß

$$\tilde{\mathcal{Q}} = A \otimes \mathbf{1} + B \otimes \gamma_0 + W_i \otimes \gamma_i \quad (5.84)$$

abzuspalten. Die Matrizen A , B und W_i tragen also nur noch Gitter- und Farbindizes. Wegen

$$\begin{aligned} A_{xy}^{ab} &= \delta_{ab} \delta_{xy} - \kappa r R_{ab}(U_{xy}) (\delta_{y,x+1} + \delta_{y,x-1}) \\ &= \delta_{ba} \delta_{yx} - \kappa r R_{ba}(U_{yx}) (\delta_{y-1,x} + \delta_{y+1,x}) = A_{yx}^{ba} \end{aligned} \quad (5.85)$$

und

$$\begin{aligned} B_{xy}^{ab} &= \kappa R_{ab}(U_{xy}) (\delta_{y,x+1} - \delta_{y,x-1}) \\ &= \kappa R_{ba}(U_{yx}) (\delta_{y-1,x} - \delta_{y+1,x}) = -B_{yx}^{ba} \end{aligned} \quad (5.86)$$

und

$$\begin{aligned} W_{i,xy}^{ab} &= -2\kappa \tilde{f}_{acb} \Phi_{i,x}^c \delta_{xy} \\ &= 2\kappa \tilde{f}_{bca} \Phi_{i,x}^c \delta_{yx} = -W_{i,yx}^{ba}. \end{aligned} \quad (5.87)$$

gilt $A = A^T$, $B = -B^T$ und $W_i = -W_i^T$ (Transponieren ist gleichzeitiges Austauschen der Farb- und Gitterindizes). Aus der Forderung, daß die Mischterme der unterschiedlichen Majorana-Fermionen verschwinden müssen, ergibt sich $(\mathcal{C}\tilde{Q})^T = -\mathcal{C}\tilde{Q}$. Hier ist das Matrixprodukt so aufzufassen, daß \mathcal{C} nur auf den Spinorteil des Tensorprodukts wirkt (oder \mathcal{C} mit Einheitsmatrizen im Farb- und Gitterraum tensoriert wird). Um weitere Aussagen treffen zu können wird nun die in [DGHV98] empfohlene Darstellung für γ -Matrizen und Ladungskonjugationsmatrix eingeführt. Diese wird auch in den durch den Verfasser programmierten Simulationen für den Fermionen-Code benutzt. Alle γ -Matrizen

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.88)$$

$$\gamma_k = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (5.89)$$

$$\gamma_5 = -\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad (5.90)$$

sind hermitesch und erfüllen die euklidische Clifford-Algebra

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}. \quad (5.91)$$

Weiterhin ist $\gamma_0^T = \gamma_0$, $\gamma_2^T = \gamma_2$, $\gamma_1^T = -\gamma_1$, $\gamma_3^T = -\gamma_3$. Außerdem wird

$$\mathcal{C} = \gamma_0\gamma_2 \quad (5.92)$$

gewählt, woraus

$$\mathcal{C}^T = \gamma_2\gamma_0 = -\gamma_0\gamma_2 = -\mathcal{C} \quad (5.93)$$

folgt. Mit diesen Definitionen und den Gleichungen (5.85), (5.86) und (5.87) folgt aus

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}\tilde{Q})^T &= A^T \otimes \mathcal{C}^T + B^T \otimes (\mathcal{C}\gamma_0)^T + W_i^T \otimes (\mathcal{C}\gamma_i)^T \\ &= -A \otimes \mathcal{C} - B \otimes (\mathcal{C}\gamma_0)^T - W_i \otimes (\mathcal{C}\gamma_i)^T \end{aligned} \quad (5.94)$$

unter Berücksichtigung von

$$\{\mathcal{C}, \gamma_0\} = \gamma_0\gamma_2\gamma_0 + \gamma_0\gamma_0\gamma_2 = 0 \quad (5.95)$$

$$[\mathcal{C}, \gamma_k] = \gamma_0\gamma_2\gamma_k - \gamma_k\gamma_0\gamma_2 = 0, \quad k \neq 2, 0 \quad (5.96)$$

$$\{\mathcal{C}, \gamma_2\} = \gamma_0\gamma_2\gamma_2 + \gamma_2\gamma_0\gamma_2 = 0 \quad (5.97)$$

mit den Symmetrierelationen für Produkte von γ -Matrizen und Ladungskonjugationen

$$(\mathcal{C}\gamma_0)^T = \mathcal{C}\gamma_0 \quad (5.98)$$

$$(\mathcal{C}\gamma_k)^T = \gamma_k \mathcal{C} = \mathcal{C}\gamma_k, k \neq 0, 2 \quad (5.99)$$

$$(\mathcal{C}\gamma_2)^T = \mathcal{C}\gamma_2 \quad (5.100)$$

die Antisymmetrie

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}\tilde{\mathcal{Q}})^T &= -A \otimes \mathcal{C} - B \otimes (\mathcal{C}\gamma_0)^T - W_i \otimes (\mathcal{C}\gamma_i)^T \\ &= -A \otimes \mathcal{C} - B \otimes \mathcal{C}\gamma_0 - W_i \otimes \mathcal{C}\gamma_i \\ &= -\mathcal{C}\tilde{\mathcal{Q}}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Durch diese Rechnungen sieht man, daß man das Pfadintegral nach den oben angegebenen Regeln auftrennen kann.

Desweiteren wird die γ_5 -Konjugationshermitizität von $\tilde{\mathcal{Q}}$ verifiziert. Diese wird benötigt, um die Realität der Fermionendeterminante zu gewährleisten. Aufgrund der Hermitizität der γ -Matrizen gilt

$$\tilde{\mathcal{Q}}^\dagger = A^\dagger \otimes \mathbb{1} + B^\dagger \otimes \gamma_0 + W_i^\dagger \otimes \gamma_i \quad (5.102)$$

und

$$\gamma_5 \tilde{\mathcal{Q}} \gamma_5 = A \otimes \mathbb{1} - B \otimes \gamma_0 - W_i \otimes \gamma_i, \quad (5.103)$$

wobei $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$ benutzt wurde. Deshalb muß $A = A^\dagger$, $B = -B^\dagger$ und $W_i = -W_i^\dagger$ gelten, wenn $\tilde{\mathcal{Q}}^\dagger = \gamma_5 \tilde{\mathcal{Q}} \gamma_5$ sein soll. Aus den (Anti-)Symmetrien von A , B und W_i ergibt sich, daß A , B und W_i rein reell sein müssen, um die γ_5 -Konjugationshermitizität von $\tilde{\mathcal{Q}}$ zu gewährleisten. Die Gleichungen (5.85), (5.86) und (5.87) zeigen, daß dies tatsächlich erfüllt ist. Aufgrund der γ_5 -Konjugationshermitizität ergibt sich

$$\det \tilde{\mathcal{Q}}^\dagger = \det \tilde{\mathcal{Q}}, \quad (5.104)$$

was bedeutet, daß die Determinante des diskretisierten Dirac-Operators $\tilde{\mathcal{Q}}$ reell ist. Das wiederum heißt, daß sämtliche Eigenwerte von $\tilde{\mathcal{Q}}$ in zueinander konjugiert komplexen Paaren auftreten müssen. Dies wird sowohl in Abschnitt 6.3.2 als auch in Abschnitt B.4 graphisch bestätigt.

Nun muß noch gezeigt werden, daß das Integralmaß $\mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi}$ faktorisiert. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} &= \prod_{\alpha, x} d\Psi_x^\alpha \prod_{\beta, y} d\bar{\Psi}_y^\beta \\ \bar{\Psi} = \Psi_c^T \mathcal{C} &= \prod_{\alpha, x} d\Psi_x^\alpha \prod_{\beta, y} \sum_{\delta} d\Psi_{c, y}^\delta (\mathcal{C})_{\delta}^\beta \\ &= \det \mathcal{C} \prod_{\alpha, x} d\Psi_x^\alpha \prod_{\beta, y} d\Psi_{c, y}^\beta \\ \Psi, \Psi_c \rightarrow \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} &= \frac{1}{2^L} \det \mathcal{C} \prod_{\alpha, x} \prod_{\beta, y} \left(d\lambda_x^{(1)\alpha} d\lambda_y^{(1)\beta} + d\lambda_x^{(2)\alpha} d\lambda_y^{(2)\beta} \right. \\ &\quad \left. + i \left(d\lambda_x^{(2)\alpha} d\lambda_y^{(1)\beta} - d\lambda_x^{(1)\alpha} d\lambda_y^{(2)\beta} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.105)$$

Die Produkte $d\lambda^{(j)}d\lambda^{(j)}$ fallen weg, da das Produkt über alle (α,x) und (β,y) läuft und damit irgendwann ein Quadrat einer Graßmann-Zahl auftritt, welches das gesamte Produkt Null werden läßt (Die Farbstruktur ist hier unterdrückt). Somit bleibt nur noch

$$\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} = \left(\frac{i}{2}\right)^L \det \mathcal{C} \prod_{\alpha,x} \prod_{\beta,y} d\lambda_x^{(2)\alpha} d\lambda_y^{(1)\beta} \sim \mathcal{D}\lambda^{(1)}\mathcal{D}\lambda^{(2)} \quad (5.106)$$

übrig. Die Vorfaktoren sind nicht relevant, da sie bei der Bildung von Erwartungswerten sowieso herausfallen. Das heißt, das Pfadintegral faktorisiert und man erhält bis auf Normierungsfaktoren

$$\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi \exp\left(\sum_{xy,ab} \bar{\Psi}_x^a \mathcal{Q}_{xy}^{ab} \Psi_y^b\right) = \left(\int \mathcal{D}\lambda \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{xy,ab} \bar{\lambda}_x^a \mathcal{Q}_{xy}^{ab} \lambda_y^b\right)\right)^2. \quad (5.107)$$

Anders ausgedrückt: Man kann ein Pfadintegral über Majorana-Fermionen auf die Wurzel eines Pfadintegrals über Dirac-Fermionen zurückführen. Dabei geht allerdings die Information über das Vorzeichen des Majorana-Pfadintegrals verloren. Dies kann man aber wieder zurückerhalten, indem man sich erinnert, daß

$$\int \mathcal{D}\lambda \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{xy,ab} (\lambda^T)_x^a \mathcal{M}_{xy}^{ab} \lambda_y^b\right) = \text{Pf}(\mathcal{M}) \quad (5.108)$$

ist. Dabei muß \mathcal{M} eine vollständig antisymmetrische Matrix sein, damit die Pfaffsche Determinante überhaupt definiert ist. Dies ist für $\mathcal{M} = \mathcal{C}\tilde{\mathcal{Q}}$ ausführlich gezeigt worden. Somit ist die in Abschnitt 4.4.3 eingeführte effektive Wirkung (4.42) durch

$$S_{\text{eff}} = S_B - \frac{1}{2} \log \det \tilde{\mathcal{Q}} \quad (5.109)$$

zu ersetzen.

5.2.2 Fermionische Zweipunktfunktionen

Hier orientiert sich der Autor an der Herleitung in [DGHV98]. Im folgenden wird von der Gesamtzustandssumme

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}U\mathcal{D}\Phi e^{-S_B[\Phi,U]} \int \mathcal{D}\lambda e^{-S_F[\Phi,U,\lambda] + \sum_x \lambda(x)J(x)}, \quad (5.110)$$

wobei

$$S_F = \sum_{x,y} \lambda_\alpha^a(x) \mathcal{M}_{\alpha\beta}^{ab}(x,y) \lambda_\beta^b(y) = \sum_{x,y} \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \tilde{\mathcal{Q}}_{\alpha\beta}^{ab}(x,y) \lambda_\beta^b(y) \quad (5.111)$$

und $\mathcal{M} = \mathcal{C}\tilde{\mathcal{Q}}$ ist, ausgegangen. Die Integration wird deshalb nur über $\mathcal{D}\lambda$ ausgeführt, weil es sich bei λ um ein Majorana-Fermion handelt, bei welchem $\bar{\lambda}$ nicht von λ unabhängig ist. Damit braucht man für die Korrelationsfunktionen gemäß Abschnitt 3.3, Gleichung (3.50) auch nur einen Stromterm einzuführen. Durch einen translatorischen Wechsel der Variablen

$$\lambda_\alpha^a(x) = \lambda_\alpha'^a(x) + \frac{1}{2} \sum_y J_\beta^b(y) [\mathcal{M}^{-1}]_{\beta\alpha}^{ba}(x,y), \quad (5.112)$$

kann man den Stromterm in S_F absorbieren und behält nur noch einen quadratischen Term für J im Exponenten

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] &= \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\Phi |\text{Pf}(\mathcal{M}[\Phi,U])| e^{-S_B[\Phi,U]} e^{-\frac{1}{4} \sum_{x,y} J(x) \mathcal{M}^{-1}[\Phi,U](x,y) J(y)} \\ &= \langle e^{-\frac{1}{4} \sum_{x,y} J(x) \mathcal{M}^{-1}[\Phi,U](x,y) J(y)} \rangle_{\text{eff}}. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Dann kann man Zweipunktfunktionen wie, in Abschnitt 3.3, Gleichung (3.52) gezeigt, durch die Funktionalableitung nach den Strömen definieren. Insbesondere erzeugt man somit aus $\mathcal{Z}[J]$ durch zweifache Funktionalableitung eine Matrix mit Gitter-, Farb- und Spinor-Indizes. Hier sind die Farb- und Spinor-Indizes an den Strömen unterdrückt. Weiterhin ist zu beachten, daß die $J(x)$ Graßmann-Variablen sind.

$$\frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0} = \frac{1}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0} - \frac{1}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x)} \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(y)} \Big|_{J=0} \quad (5.114)$$

Die einfachen Funktionalableitungen verschwinden, wenn man J Null setzt. Aus den zweifachen Funktionalableitungen ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} &= \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\Phi |\text{Pf}(\mathcal{M}[\Phi,U])| e^{-S_B[\Phi,U]} \\ &\times \frac{\delta^2}{\delta J(x) \delta J(y)} \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_{x,y} J(x) \mathcal{M}^{-1}[\Phi,U](x,y) J(y) \right) \end{aligned} \quad (5.115)$$

mit

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^2}{\delta J(x) \delta J(y)} \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_{x,y} J(x) \mathcal{M}^{-1}[\Phi,U](x,y) J(y) \right) \\ &= -\frac{1}{4} (\mathcal{M}^{-1}[\Phi,U](y,x) - \mathcal{M}^{-1}[\Phi,U](x,y)) \\ &\times \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_{x,y} J(x) \mathcal{M}^{-1}[\Phi,U](x,y) J(y) \right) + J\text{-Terme} \end{aligned} \quad (5.116)$$

für $J = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0} &= -\frac{1}{4} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\Phi |\text{Pf}(\mathcal{M}[\Phi,U])| e^{-S_B[\Phi,U]} (\mathcal{M}^{-1}[\Phi,U](y,x) \\ &\quad - \mathcal{M}^{-1}[\Phi,U](x,y)) \\ &= \frac{1}{2} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\Phi |\text{Pf}(\mathcal{M}[\Phi,U])| e^{-S_B[\Phi,U]} \mathcal{M}^{-1}[\Phi,U](x,y), \end{aligned} \quad (5.117)$$

da \mathcal{M} vollständig antisymmetrisch ist. Daher ist

$$\langle \lambda_\alpha^a(x) \lambda_\beta^b(y) \rangle = 2 \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0} = \langle \mathcal{M}^{-1}[\Phi,U]_{\alpha\beta}^{ab}(x,y) \rangle_{\text{eff}}. \quad (5.118)$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\langle \lambda_\alpha^a(x) \bar{\lambda}_\beta^b(y) \rangle &= \langle \mathcal{M}^{-1} [\Phi, U]_{\alpha\gamma}^{ab}(x, y) \rangle_{\text{eff}} \mathcal{C}_{\gamma\beta} \\ &= \langle \mathcal{M}^{-1} [\Phi, U]_{\alpha\gamma}^{ab}(x, y) \mathcal{C}_{\gamma\beta} \rangle_{\text{eff}}.\end{aligned}\quad (5.119)$$

Dabei folgt aus $\mathcal{M} = \mathcal{C} \tilde{\mathcal{Q}}$, daß $\mathcal{M}^{-1} = \tilde{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{C}^{-1}$ und somit $\mathcal{M}^{-1} \mathcal{C} = \tilde{\mathcal{Q}}^{-1}$ ist. Also ist

$$\langle \lambda_\alpha^a(x) \bar{\lambda}_\beta^b(y) \rangle = \langle \tilde{\mathcal{Q}}^{-1} [\Phi, U]_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) \rangle_{\text{eff}}. \quad (5.120)$$

Die dritte Zweipunktfunktion, deren Bildung möglich ist, ist $\langle \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \bar{\lambda}_\beta^b(y) \rangle$. Diese erhält man ebenfalls durch Multiplikation von rechts mit \mathcal{C} an λ oder in Index-Schreibweise

$$\begin{aligned}\langle \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \bar{\lambda}_\beta^b(y) \rangle &= \mathcal{C}_{\gamma\alpha} \langle \lambda_\gamma^a(x) \bar{\lambda}_\beta^b(y) \rangle \\ &= \mathcal{C}_{\gamma\alpha} \langle \tilde{\mathcal{Q}}^{-1} [\Phi, U]_{\gamma\beta}^{ab}(x, y) \rangle_{\text{eff}}.\end{aligned}\quad (5.121)$$

Um eichinvariante Bildungen zu erhalten, muß man die Spur über die Farbindizes bilden. Somit hängen die Korrelationsfunktionen nur noch von den Spinor-Indizes α und β und den Gitterkoordinaten ab. Die später in den Simulationen gemessenen Korrelationsfunktionen sind durch

$$\text{tr} \langle \lambda_\alpha(x) \bar{\lambda}_\beta(y) \rangle = 2 \sum_a \langle (\tilde{\mathcal{Q}}^{-1})_{\alpha\beta}^{aa}(x, y) \rangle_{\text{eff}} \quad (5.122)$$

gegeben.

5.2.3 Spektrum des freien, diskretisierten Dirac-Operators

In der freien Theorie ohne Yukawa-Kopplung kann man das Spektrum des diskretisierten Dirac-Operators mit einer euklidischen Clifford-Algebra, wie sie in [DGHV98] vorgeschlagen wird, angeben. Die Matrixdarstellung des Dirac-Operators ohne Yukawa-Kopplung ist gemäß (5.61) durch

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{xy}^{ab} &= \left((m_F + r) \delta_{ab} \delta_{xy} - \frac{r}{2} R_{ab}(U_{xy}) (\delta_{y, x+1} + \delta_{y, x-1}) \right) \mathbb{1} \\ &+ \frac{1}{2} R_{ab}(U_{xy}) (\delta_{y, x+1} - \delta_{y, x-1}) \gamma_0.\end{aligned}\quad (5.123)$$

gegeben. Dabei ist

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.124)$$

wobei $\gamma_0^2 = \mathbb{1}_4$, $\gamma_0^\dagger = \gamma_0$ und $\text{tr} \gamma_0 = 0$ ist. Aus diesen Eigenschaften folgt, daß man den Dirac-Operator einer unitären Transformation unterwerfen kann, die nur im Spinor-Raum wirkt und γ_0 auf Diagonalform

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (5.125)$$

bringt. Weiterhin wird das Linkfeld auf

$$U_{x,x+1} = \text{diag}(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \dots, e^{i\phi_{N-1}}, e^{-i(\phi_1 + \dots + \phi_{N_c-1})}) \quad (5.126)$$

für alle x gesetzt. Nun muß man die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{K}_{xy,\alpha\beta}^{ab} \Psi_{y,\beta}^b = \lambda \Psi_{x,\alpha}^a \quad (5.127)$$

mit

$$\Psi_{x,\alpha}^a = C_\alpha^a e^{ipx} \quad (5.128)$$

lösen. Aufgrund der Argumentation in Abschnitt 5.1.2 ist die Struktur der adjungierten Darstellung der diagonalen und konstanten Linkvariablen durch (5.23) gegeben. Auch hier werden, ähnlich wie bei der Nullmodenberechnung des Gitter-Laplace-Operators, zuerst die Eins-Einträge für das Eichfeld behandelt. Desweiteren wird nach den Diagonaleinträgen in γ_0 aufgeteilt, wobei hier zuerst die positiven Diagonaleinträge behandelt werden. Zunächst ergibt sich damit als Eigenwertgleichung

$$\left[\left((m_F + r) \delta_{xy} - \frac{r}{2} (\delta_{y,x+1} + \delta_{y,x-1}) \right) + \frac{1}{2} (\delta_{y,x+1} - \delta_{y,x-1}) \right] C \exp(ipy) = \lambda C \exp(ipx). \quad (5.129)$$

Führt man die Einsetzung der Moden in den Gitteroperator aus, erhält man für die linke Seite der Gleichung

$$\left[\left((m_F + r) - \frac{r}{2} (\exp(ip) + \exp(-ip)) \right) + \frac{1}{2} (\exp(ip) - \exp(-ip)) \right] \times C \exp(ipx) \quad (5.130)$$

und damit

$$[(m_F + r) - r \cos(p) + i \sin(p)] C \exp(ipx) = \lambda C \exp(ipx). \quad (5.131)$$

Da $C \neq 0$ und die Gleichung für beliebige x gelten muß, ist

$$\lambda(p) = (m_F + r) - r \cos(p) + i \sin(p) \text{ (2-fach entartet)} \quad (5.132)$$

und mit den negativen Einträgen in γ_0 erhält man die dazu konjugiert komplexe Gleichung

$$\lambda(p) = (m_F + r) - r \cos(p) - i \sin(p) \text{ (2-fach entartet)}. \quad (5.133)$$

Weiterhin ist jeder dieser Eigenwerte zusätzlich $N_c - 1$ -fach entartet, da es im Farbraum $N_c - 1$ Eins-Einträge gibt. Durch die Quantisierung von p auf dem Gitter bei periodischen Rändern ist

$$p = \frac{2\pi}{L} n, \quad (5.134)$$

wobei L die Zahl der Gitterpunkte und n die Modenzahl ist. Somit erhält man für die Eigenwerte

$$\lambda_n = (m_F + r) - r \cos\left(\frac{2\pi}{L}n\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi}{L}n\right) \quad (2(N_c - 1)\text{-fach entartet}). \quad (5.135)$$

Insgesamt ist wegen

$$\sin\left(\frac{2\pi(L-n)}{L}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi n}{L}\right) \quad (5.136)$$

und

$$\cos\left(\frac{2\pi(L-n)}{L}\right) = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}\right) \quad (5.137)$$

automatisch das negative Vorzeichen enthalten, wenn $n \in [0, L-1]$ ist. Daher kann man

$$\lambda_n = (m_F + r) - r \cos\left(\frac{2\pi}{L}n\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{L}n\right) \quad (4(N_c - 1)\text{-fach entartet}) \quad (5.138)$$

schreiben. Für den Teil des Gitter-Dirac-Operators mit Eichfeld, muß man im Farbraum die Eigenwertgleichung über Determinanten lösen. Setzt man in den Gitteroperator mit Drehmatrizen für das Eichfeld die ebenen Wellen ein, erhält man als Eigenwertgleichung

$$\left[\left((m_F + r)\delta_{ab}\delta_{xy} - \frac{r}{2}R_{ab}(\delta_{y,x+1} + \delta_{y,x-1}) \right) \pm \frac{1}{2}R_{ab}(\delta_{y,x+1} - \delta_{y,x-1}) \right] C_b \exp(ipy) = \lambda C_a \exp(ipx) \quad (5.139)$$

und damit

$$[(m_F + r)\delta_{ab} - rR_{ab}\cos(p)] \pm iR_{ab}\sin(p) C_b \exp(ipx) = C_a \exp(ipx). \quad (5.140)$$

Da auch hier wieder die Gleichung für beliebige x gelten muß, ist die Eigenwertgleichung

$$[(m_F + r)\delta_{ab} + z(p)R_{ab}] C_b = \lambda(p)C_a, \quad (5.141)$$

zu lösen. Dabei ist $z(p) = -r \cos(p) \pm i \sin(p)$ und R_{ab} eine 2×2 Drehmatrix

$$(R_{ab}) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (5.142)$$

Deshalb ist

$$\det \begin{pmatrix} m_F + r - \lambda(p) + z(p) \cos \phi & z(p) \sin \phi \\ -z(p) \sin \phi & m_F + r - \lambda(p) + z(p) \cos \phi \end{pmatrix} = 0 \quad (5.143)$$

zu lösen. Das charakteristische Polynom ergibt sich dann zu

$$(m_F + r - \lambda(p) + z(p) \cos \phi)^2 + z^2(p) \sin^2 \phi = 0. \quad (5.144)$$

Hieraus erhält man als quadratische Gleichung für $\lambda(p)$

$$\lambda^2(p) - 2\lambda(p)(m_F + r + z(p) \cos \phi) + (m_F + r + z(p) \cos \phi)^2 + z^2(p) \sin^2 \phi = 0. \quad (5.145)$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist

$$\lambda_{1/2}(p) = m_F + r + (-r \cos(p) \pm i \sin(p)) e^{\pm i\phi}. \quad (5.146)$$

Setzt man nun wieder die diskretisierten Impulse ein, kann das \pm vor dem Sinus entfallen und man bekommt eine $(2 \times 2 = 4)$ -fache Entartung aufgrund der Spinor-Struktur

$$\lambda_n = m_F + r + \left(-r \cos \left(\frac{2\pi}{L} n \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{L} n \right) \right) e^{\pm i\phi}. \quad (5.147)$$

Insgesamt hat man $N_c(N_c - 1)/2$ unterschiedliche Winkel ϕ , welche lineare Funktionen der ursprünglichen Winkel $\phi_1, \dots, \phi_{N_c-1}$ sind. Diese Winkel tragen jeweils zwei unterschiedliche, aber vierfach entartete Eigenwerte pro Gitterpunkt bei. Das ergibt insgesamt $N_c(N_c - 1)$ vierfach entartete Eigenwerte zu einem Gitterpunkt, plus die vierfach entarteten $N_c - 1$ Eigenwerte der Cartan-Generatoren ergibt insgesamt $N_c^2 - 1$ vierfach entartete Eigenwerte für jeden Gitterpunkt. Aufgrund der Struktur der Eigenwerte treten diese jeweils in konjugiert komplexen Paaren auf, so daß die Determinante reell ist. Dies war nach den Aussagen über die γ_5 -Konjugationshermitizität auch zu erwarten.

Für $m_F \neq 0$ treten keine Nulleigenwerte auf. Drückt man die Eigenwerte durch den Hopping-Parameter (4.37) aus, lassen sie sich als

$$\lambda_n = 1 + 2\kappa \left(-r \cos \left(\frac{2\pi}{L} n \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{L} n \right) \right) e^{\pm i\phi}, \quad n = 0, \dots, L-1 \quad (5.148)$$

schreiben. In Anhang B.4 werden diese Gleichungen als Teil eines Konsistenztests des Fermionen-Codes graphisch verifiziert.

5.2.4 Ein-Schleifen-Näherung der vollen Theorie mit Fermionen

Die Ergebnisse dieses Unterabschnitts sind der Vollständigkeit halber aus [CW07] zitiert, weil sie vollkommen analog zu den bosonischen Rechnungen ablaufen. Da die Fermionen hier periodischen Randbedingungen unterworfen sind, sind nach der Zerlegung

$$\Psi_{\alpha,ab}(\tau) = \xi_{\alpha}^a \delta_{ab} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \Psi_{\alpha,ab}^{(m)} e^{\frac{2\pi}{R} im\tau} \quad (5.149)$$

die konstanten Diagonaleile nicht automatisch Null. Nun wird genauso, wie im rein bosonischen Fall die Wirkung bis zur zweiten Ordnung in den Fluktuationen entwickelt. Da die entstehende Matrix zusätzlich zu der im Abschnitt 5.1.4 eingeführten bosonischen Matrix \mathcal{M} und den kinetischen Kopplungsmatrizen \mathcal{D} für die Fermionenfluktuationen auch Nebendiagonaleinträge enthält, die von den Yukawa-Kopplungen herrühren, ist es zweckmäßig, die Fermionenfluktuationen durch einen translatorischen Variablenwechsel umzudefinieren. Dieser

Variablenwechsel ändert auch das Pfadintegralmaß nicht. Nun werden nach einer umfangreichen Rechnung, die in [CW07, Anhang B.3] vorgeführt ist, die Fluktuationen ausintegriert. Dadurch erhält man die in Abb. 5.2 dargestellte effektive Wirkung auf Ein-Schleifen-Niveau

$$S_{\text{voll}}^{\text{quadr,reg}} = -\log \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{N_c}} M^{\pi(1)\pi(2)} M^{\pi(2)\pi(3)} \dots M^{\pi(N_c-1)\pi(N_c)} \quad (5.150)$$

mit

$$M^{ab} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left((m + \Delta A^{ab})^2 + |\Delta \phi^{ab}|^2 \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.151)$$

Wie in Abb. 5.2 zu sehen, ist auch diese Wirkung für große Separationen $|\Delta \phi^{ab}|$ monoton steigend. Da somit große Separationen weniger bevorzugt werden, ist zu erwarten, daß die volle Theorie genau wie die Theorie ohne Fermionen in Abschnitt 5.1.4 keine Infrarotdivergenzen aufweist.

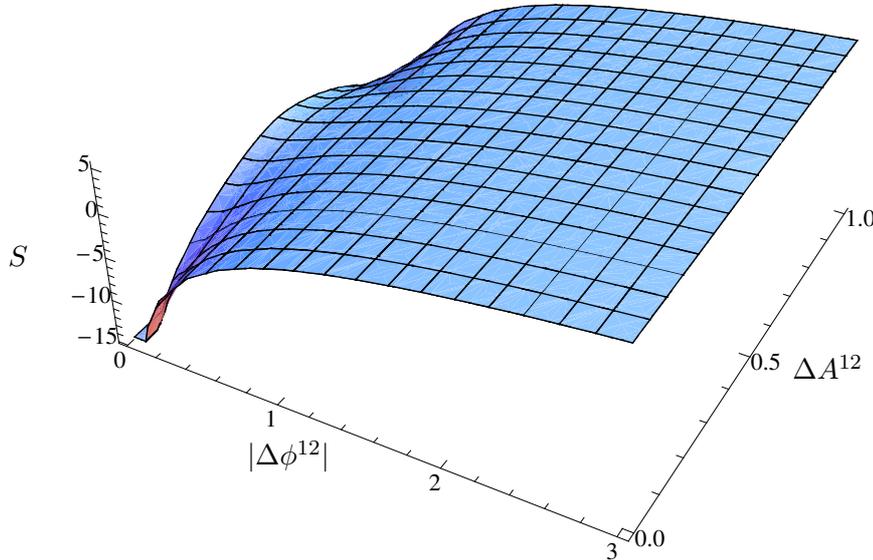


Abbildung 5.2: Effektive, regularisierte Ein-Schleifen-Wirkung der vollen $SU(2)$ -Theorie

5.2.5 Ableitung der fermionischen Wirkung für die HMC-Integration

Die Wirkung, die durch die Ausintegration der Fermionen entsteht, ergibt sich zu

$$\begin{aligned} S_F &= -\ln \det \tilde{Q}[\Phi] \\ &= -\text{tr} \ln \tilde{Q}[\Phi] \\ &= -\sum_{x,\alpha,a} \left(\ln \tilde{Q}[\Phi] \right)_{x,a,\alpha;x,a,\alpha}, \end{aligned} \quad (5.152)$$

wenn die Theorie Dirac-Fermionen besitzt. Um die HMC-Kraft des fermionischen Teils der Wirkung auszurechnen, muß diese Spurbildung nach den Feldvariablen differenziert werden.

$$\begin{aligned}
 F_{k,y}^b &= \frac{\partial S_F[\Phi]}{\partial \Phi_{k,y}^b} = -\frac{\partial}{\partial \Phi_{k,y}^b} \text{tr} \ln \tilde{Q}[\Phi] \\
 &= -\text{tr} \tilde{Q}^{-1}[\Phi] \frac{\partial \tilde{Q}[\Phi]}{\partial \Phi_{k,y}^b} \\
 &= -\sum_{x,\alpha,a} \sum_{z,c,\beta} \tilde{Q}[\Phi]_{x,a,\alpha;z,c,\beta}^{-1} \left(\frac{\partial \tilde{Q}[\Phi]}{\partial \Phi_{k,y}^b} \right)_{z,c,\beta;x,a,\alpha}
 \end{aligned} \tag{5.153}$$

Berücksichtigt man die Struktur von \tilde{Q} , kann man die Ableitung von \tilde{Q} nach den Feldvariablen ausführen und erhält

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \tilde{Q}[\Phi]}{\partial \Phi_{k,y}^b} \right)_{z,c,\beta;x,a,\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \Phi_{k,y}^b} \left(-2\kappa \sum_{d,i} \tilde{f}_{cda} \Phi_{i,x}^d \delta_{zx}(\gamma_i)_{\beta\alpha} \right) \\
 &= -2\kappa \sum_{d,i} \tilde{f}_{cda} \delta_{db} \delta_{ki} \delta_{yx} \delta_{zx}(\gamma_i)_{\beta\alpha} \\
 &= -2\kappa \tilde{f}_{cba} \delta_{yx} \delta_{zx}(\gamma_k)_{\beta\alpha}.
 \end{aligned} \tag{5.154}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
 F_{k,y}^b &= 2\kappa \sum_{x,\alpha,a} \sum_{z,c,\beta} \tilde{Q}[\Phi]_{x,a,\alpha;z,c,\beta}^{-1} \tilde{f}_{cba} \delta_{yx} \delta_{zx}(\gamma_k)_{\beta\alpha} \\
 &= 2\kappa \sum_{\alpha,a} \sum_{c,\beta} \tilde{Q}[\Phi]_{y,a,\alpha;y,c,\beta}^{-1} \tilde{f}_{cba}(\gamma_k)_{\beta\alpha}.
 \end{aligned} \tag{5.155}$$

Für eine Theorie mit Majorana-Fermionen hat man gemäß Abschnitt 5.2.1 nur die halbe Anzahl der Freiheitsgrade, muß also die Wurzel aus der Determinante ziehen, was zu

$$S_F = -\frac{1}{2} \ln \det \tilde{Q}[\Phi], \tag{5.156}$$

führt. Der Faktor 1/2 überträgt sich ebenso auf die Kraft, womit sich

$$F_{k,y}^b = \kappa \sum_{\alpha,a} \sum_{c,\beta} \tilde{Q}[\Phi]_{y,a,\alpha;y,c,\beta}^{-1} \tilde{f}_{cba}(\gamma_k)_{\beta\alpha} \tag{5.157}$$

ergibt.

5.3 Supersymmetrie

In diesem Abschnitt geht es darum die Invarianz der nichtkompaktifizierten Theorie unter Supersymmetrie-Transformationen zu zeigen. Dazu werden zuerst einige Identitäten angegeben, die zur Berechnung benötigt werden.

5.3.1 Majorana-Spinoren und Fierz-Identität in vier Dimensionen

5.3.1.1 Fierz-Identität in vier Dimensionen

Aus den Fierz-Identität (2.68) ergibt sich in $D = 4$

$$4\varphi\bar{\chi} = -\bar{\chi}\varphi\mathbb{1} - (\bar{\chi}\gamma^\mu\varphi)\gamma_\mu + \frac{1}{2!}(\bar{\chi}\gamma^{\mu\nu}\varphi)\gamma_{\mu\nu} \quad (5.158)$$

$$+ \frac{1}{3!}(\bar{\chi}\gamma^{\mu\nu\rho}\varphi)\gamma_{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4!}(\bar{\chi}\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi)\gamma_{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Um antisymmetrische Gammaprodukte mit drei und vier Indizes durch γ_* und γ_μ auszudrücken, kann man

$$\gamma_{\mu_1\dots\mu_n} = i^{1+D/2} \frac{1}{(D-n)!} \varepsilon^{\mu_1\dots\mu_D} \gamma_* \gamma^{\mu_D\dots\mu_{n+1}} \quad (5.159)$$

nutzen. Zieht man in dieser Gleichung die Indizes nach oben, erhält man die Identität

$$\gamma^{\mu_1\dots\mu_n} = i^{1+D/2} \frac{1}{(D-n)!} \varepsilon^{\mu_1\dots\mu_D} \gamma_* \gamma_{\mu_D\dots\mu_{n+1}}. \quad (5.160)$$

Mit Hilfe der Beziehung (siehe [Wip00])

$$\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_a\nu_1\dots\nu_b} \varepsilon^{\mu_1\dots\mu_a\rho_1\dots\rho_b} = -a!b! \delta_{[\nu_1}^{\rho_1} \dots \delta_{\nu_b]}^{\rho_b} \quad (5.161)$$

kann man die Kontraktion der ε -Symbole ausrechnen. Dann ist

$$\begin{aligned} (\bar{\chi}\gamma^{\mu\nu\rho}\varphi)\gamma_{\mu\nu\rho} &= -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} \gamma_* \gamma^\sigma (\bar{\chi}\gamma_*\gamma_\tau\varphi) = 3! \delta_\sigma^\tau \gamma_* \gamma^\sigma (\bar{\chi}\gamma_*\gamma_\tau\varphi) \\ &= 3! \gamma_* \gamma^\tau (\bar{\chi}\gamma_*\gamma_\tau\varphi) \end{aligned} \quad (5.162)$$

$$(\bar{\chi}\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi)\gamma_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_* (\bar{\chi}\gamma_*\varphi) = 4! \gamma_* (\bar{\chi}\gamma_*\varphi) \quad (5.163)$$

und damit bekommt man für die Fierz-Identität in vier Dimensionen

$$4\varphi\bar{\chi} = -\bar{\chi}\varphi\mathbb{1} - (\bar{\chi}\gamma^\mu\varphi)\gamma_\mu + \frac{1}{2}(\bar{\chi}\gamma^{\mu\nu}\varphi)\gamma_{\mu\nu} + (\bar{\chi}\gamma_*\gamma_\mu\varphi)\gamma_*\gamma^\mu - (\bar{\chi}\gamma_*\varphi)\gamma_*. \quad (5.164)$$

5.3.1.2 Bilineare Bildungen von Majorana-Spinoren in vier Dimensionen

Aus (2.72) erhält man mit $\varepsilon = \eta = 1$ und $t = 1$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\chi = -\bar{\chi}\gamma_\mu\psi \quad (5.165)$$

$$\bar{\psi}\gamma_{\mu\nu\rho}\chi = \bar{\chi}\gamma_{\mu\nu\rho}\psi. \quad (5.166)$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von $\Sigma_{\mu\nu}\gamma_\rho = \frac{1}{2i}(\eta_{\nu\rho}\gamma_\mu - \eta_{\mu\rho}\gamma_\nu + \gamma_{\mu\nu\rho})$ und $\gamma_\rho\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}(\eta_{\mu\rho}\gamma_\nu - \eta_{\nu\rho}\gamma_\mu + \gamma_{\mu\nu\rho})$, daß

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\Sigma_{\mu\nu}\gamma_\rho\chi &= \frac{1}{2i}(\eta_{\nu\rho}\bar{\psi}\gamma_\mu\chi - \eta_{\mu\rho}\bar{\psi}\gamma_\nu\chi + \bar{\psi}\gamma_{\mu\nu\rho}\chi) \\ &= \frac{1}{2i}(-\eta_{\nu\rho}\bar{\chi}\gamma_\mu\psi + \eta_{\mu\rho}\bar{\chi}\gamma_\nu\psi + \bar{\chi}\gamma_{\mu\nu\rho}\psi) \\ &= \bar{\chi}\gamma_\rho\Sigma_{\mu\nu}\psi \end{aligned} \quad (5.167)$$

ist.

5.3.2 Invarianz unter Supersymmetrie-Transformationen in vier Dimensionen

Die infinitesimalen Supersymmetrie-Transformationen der vollen vierdimensionalen Super-Yang-Mills-Theorie sind

$$\delta_\alpha A_\mu = i\bar{\alpha}\gamma_\mu\Psi \quad (5.168)$$

$$\delta_\alpha\Psi = iF^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\alpha \quad (5.169)$$

$$\delta_\alpha\bar{\Psi} = -i\bar{\alpha}F^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}. \quad (5.170)$$

Dabei hat die Lagrangedichte die Form

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\text{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\text{tr}\bar{\Psi}\not{D}\Psi. \quad (5.171)$$

Die Variation von \mathcal{L} durch eine infinitesimale Supersymmetrie-Variation berechnet sich dann gemäß

$$\delta_\alpha\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{tr}F^{\mu\nu}\delta_\alpha F_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\text{tr}\delta_\alpha\bar{\Psi}\not{D}\Psi + \frac{i}{2}\text{tr}\bar{\Psi}\delta_\alpha(\not{D}\Psi), \quad (5.172)$$

wobei

$$\delta_\alpha F_{\mu\nu} = D_\mu\delta_\alpha A_\nu - D_\nu\delta_\alpha A_\mu \quad (5.173)$$

und

$$\delta_\alpha\not{D}\Psi = \not{D}\delta_\alpha\Psi - ig\gamma^\mu[\delta_\alpha A_\mu, \Psi] \quad (5.174)$$

ist. Insgesamt ergibt sich damit für die Variation

$$\begin{aligned} \delta_\alpha\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\text{tr}F^{\mu\nu}(D_\mu\delta_\alpha A_\nu - D_\nu\delta_\alpha A_\mu) \\ &\quad + \frac{i}{2}\text{tr}(\delta_\alpha\bar{\Psi})\not{D}\Psi \\ &\quad + \frac{i}{2}\text{tr}\bar{\Psi}(\not{D}(\delta_\alpha\Psi) - ig\gamma^\mu[\delta_\alpha A_\mu, \Psi]), \end{aligned} \quad (5.175)$$

und wenn man (5.173) und (5.174) einsetzt über (5.167)

$$\begin{aligned} \delta_\alpha\mathcal{L} &= -i\text{tr}F^{\mu\nu}\bar{\alpha}\gamma_\nu D_\mu\Psi + \frac{1}{2}\text{tr}F^{\mu\nu}\bar{\alpha}\Sigma_{\mu\nu}\gamma_\rho D^\rho\Psi \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial^\rho\text{tr}F^{\mu\nu}\bar{\alpha}\Sigma_{\mu\nu}\gamma_\rho\Psi + \frac{1}{2}\text{tr}F^{\mu\nu}\bar{\alpha}\Sigma_{\mu\nu}\gamma_\rho(D^\rho\Psi) \\ &\quad + \frac{i}{2}g\text{tr}\bar{\Psi}\gamma^\mu[\bar{\alpha}\gamma_\mu\Psi, \Psi]. \end{aligned} \quad (5.176)$$

Die kovariante Ableitung wirkt auf ein Produkt von liealgebrawertigen Feldern gemäß (3.12) nach Darstellungen und ist damit unabhängig von der Darstellung des konkreten Feldes

immer eine Derivation, da die Δ_a Funktionalableitungen sind. Nach einer umfangreichen Rechnung ergibt sich mit dieser Argumentation schließlich

$$\delta_\alpha \mathcal{L} = -\frac{i}{2} \partial^\rho \text{tr} F^{\mu\nu} \bar{\alpha} \left(\eta_{\mu\rho} \gamma_\nu + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu\rho} \right) \Psi + \frac{i}{2} g \text{tr} \bar{\Psi} \gamma^\mu [\bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi, \Psi]. \quad (5.177)$$

Nun muß noch gezeigt werden, daß der Term

$$\text{tr} \bar{\Psi} \gamma^\mu [\bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi, \Psi] \stackrel{\text{adj. Darstellung}}{=} f_{abc} (\bar{\Psi}^c \gamma^\mu \Psi^b) (\bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi^a) \quad (5.178)$$

verschwindet. Dabei wird der Teil $\Psi^b \bar{\alpha}$ als Matrix interpretiert, die man mit Hilfe der Fierz-Identität (5.164) zerlegen kann. Weiterhin nutzt man, daß wegen (2.72) für Majorana-Spinoren mit $\varepsilon = \eta = 1$ und $t = 1$

$$\bar{\Psi}^a \gamma^{(n)} \Psi^b = \bar{\Psi}^b \gamma^{(n)} \Psi^a, \quad n = 0, 3, 4 \quad (5.179)$$

gilt. Aus der Clifford-Algebra (2.46) ergibt sich durch Indexziehen $\{\gamma_\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta_\mu^\nu$ und damit über $\{\gamma_\mu, \gamma^\mu\} = 2D = 2\gamma_\mu \gamma^\mu$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = D. \quad (5.180)$$

Weiterhin erhält man unter Ausnutzung der Clifford-Algebra für die Kontraktion zweier γ -Matrizen mit einer eingeschobenen γ -Matrix

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu + 2\eta^{\mu\nu} \gamma_\mu \\ &= -\gamma^\nu D + 2\gamma^\nu = (2 - D)\gamma^\nu \end{aligned} \quad (5.181)$$

und für die Kontraktion zweier γ -Matrizen mit einem eingeschobenen zweifachen Gamma-Produkt

$$\gamma^\mu \gamma^{\sigma\rho} \gamma_\mu = D\gamma^{\sigma\rho} - 4\gamma^{\sigma\rho} = (D - 4)\gamma^{\sigma\rho}. \quad (5.182)$$

Zusätzlich erhält man aus Kontraktionen mit einer eingeschobenen γ_* -Matrix

$$\gamma^\mu \gamma_* \gamma_\mu = -\gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_* = -D\gamma_* \quad (5.183)$$

und bei einem eingeschobenen $\gamma_* \gamma^\nu$ -Produkt

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_* \gamma^\nu \gamma_\mu &= -\gamma^\mu \gamma_* \gamma_\mu \gamma^\nu + 2\gamma^\mu \gamma_* \delta_\mu^\nu \\ &= D\gamma_* \gamma^\nu + 2\gamma^\nu \gamma_* \\ &= (D - 2)\gamma_* \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (5.184)$$

Über die Verjüngungsrelationen (5.180) bis (5.184) und

$$\gamma^\mu \Psi^b \bar{\alpha} \gamma_\mu \stackrel{D=4}{=} \frac{1}{4} \left(-4\bar{\alpha} \Psi^b + 2(\bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi^b) \gamma^\mu - 2(\bar{\alpha} \gamma_* \gamma_\mu \Psi^b) \gamma_* \gamma^\mu + 4(\bar{\alpha} \gamma_* \Psi^b) \gamma_* \right) \quad (5.185)$$

läßt sich (5.178) gemäß

$$\begin{aligned}
 f_{abc}(\bar{\Psi}^c \gamma^\mu \Psi^b)(\bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi^a) &= f_{abc}(\bar{\Psi}^c \gamma^\mu \Psi^b \bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi^a) \\
 &= f_{abc} \left(-\bar{\alpha} \Psi^b \bar{\Psi}^c \Psi^a + \frac{1}{2}(\bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi^b)(\bar{\Psi}^c \gamma^\mu \Psi^a) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(\bar{\alpha} \gamma_* \gamma_\mu \Psi^b)(\bar{\Psi}^c \gamma_* \gamma^\mu \Psi^a) + (\bar{\alpha} \gamma_* \Psi^b)(\bar{\Psi}^c \gamma_* \Psi^a) \right)
 \end{aligned} \tag{5.186}$$

entscheidend vereinfachen. Da aufgrund von (5.179) und wegen der Antisymmetrie der Strukturkonstanten der erste, dritte und vierte Term verschwinden, erhält man

$$\begin{aligned}
 f_{abc}(\bar{\Psi}^c \gamma^\mu \Psi^b)(\bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi^a) &= \frac{1}{2} f_{abc}(\bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi^b)(\bar{\Psi}^c \gamma^\mu \Psi^a) \\
 &= \frac{1}{2} f_{bac}(\bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi^a)(\bar{\Psi}^c \gamma^\mu \Psi^b) \\
 &= -\frac{1}{2} f_{abc}(\bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi^a)(\bar{\Psi}^c \gamma^\mu \Psi^b),
 \end{aligned} \tag{5.187}$$

woraus

$$f_{abc}(\bar{\Psi}^c \gamma^\mu \Psi^b)(\bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi^a) = \text{tr} \bar{\Psi} \gamma^\mu [\bar{\alpha} \gamma_\mu \Psi, \Psi] = 0 \tag{5.188}$$

folgt. In der infinitesimalen Supersymmetrie-Variation bleibt dann nur noch

$$\delta_\alpha \mathcal{L} = -\frac{i}{2} \partial^\rho \text{tr} F^{\mu\nu} \bar{\alpha} \left(\eta_{\mu\rho} \gamma_\nu + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu\rho} \right) \Psi, \tag{5.189}$$

was einer totalen Divergenz entspricht. Diese Rechnungen übertragen sich ohne weiteres auf die kompaktifizierte Theorie.

6 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der numerischen Simulationen präsentiert. Es ist in zwei Teile untergliedert.

Im ersten Teil werden Testrechnungen, wie z.B. Wirkungserwartungswerte der freien Theorie, Massen der bosonischen Theorie, Massen der Fermionen ohne Wechselwirkung usw. verifiziert. Der zweite Teil behandelt physikalische Aussagen, wie den 't Hooft-Limes und die Supersymmetrie.

Die numerischen Simulationen wurden mit einem selbstgeschriebenen Programm durchgeführt. Die Kernfunktionalität des Programms, wie Gitterverwaltung, Auswertung der Feldkonfigurationen usw. wird durch die Programmbibliothek **jenLaTT** zur Verfügung gestellt. Algorithmen wie der Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus für die Kompaktifizierungsskalare und der Eichfeld-Metropolis-Algorithmus wurden durch den Verfasser selbst implementiert, ebenso die $SU(N_c)$ -Funktionalität und die Implementierung der Fermionen. Die Auswertungsprogramme basieren, sofern es sich um einfache Mittelwertbildungen handelt, auf *Templates*, die von jenLaTT zur Verfügung gestellt werden. Diese wurden durch eigene Suszeptibilitätsberechnungen erweitert. Messungen der Massen sowohl der bosonischen als auch der fermionischen Freiheitsgrade mit den weiter unten dargelegten Methoden mußten selbst implementiert werden, da diese für jede Theorie unterschiedlich sind. Dabei wurden durch den Autor Programme in „Octave“ geschrieben, um die erzeugten Daten mit Hilfe der Jackknife-Methode auszuwerten.

Alle durch den Verfasser selbst implementierten Algorithmen und Programmteile wurden ausführlichen Tests unterzogen, deren Ergebnisse für die *update*-Algorithmen und die freien Fermionen im Anhang B und für die Yukawa-gekoppelten Fermionen teilweise im Abschnitt 6.3.2 aufgelistet sind.

6.1 Performance-Analyse zur Berechnung der Pfaffschen Determinante

Die in Abschnitt 4.5.2 vorgestellte Berechnung der Pfaffschen Determinante ist, trotz des optimierten Algorithmus, immer noch langsamer als die Berechnung der Determinante mit Hilfe von LAPACK, wie Abb. 6.1 zeigt. Ansonsten ist jedoch eindeutig zu erkennen, daß der in [CK03] vorgeschlagene Algorithmus der langsamste ist und der von [JC06] sowohl in der unoptimierten Form als auch in optimierten Form wesentlich schneller sind. Die naiven Komplexitätsanalysen lieferten jedoch beispielsweise durch Nichtberücksichtigung veränderlicher Schleifen-Längen zu optimistische Ergebnisse für den vorgenannten Algorithmus, wie anhand der *Fit*-Daten in der Abbildung zu sehen ist.

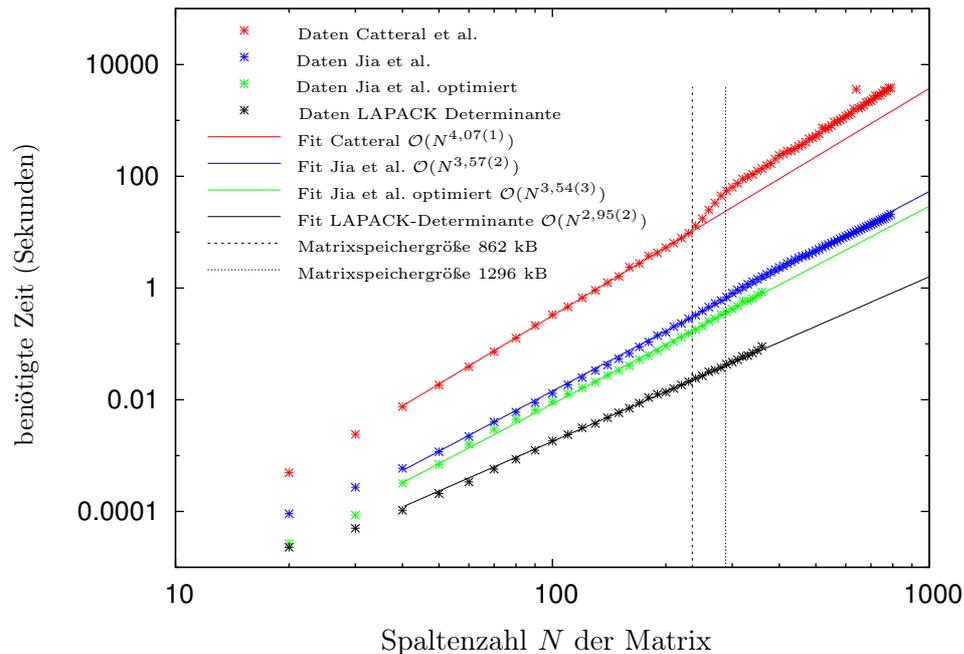


Abbildung 6.1: Performance-Analyse verschiedener Verfahren zur Berechnung des Pfaffschen und Vergleich mit der LAPACK-Determinante. *Fits* wurden nur in den linearen Bereichen durchgeführt, Angabe der Fehler sind von „gnuplot“ berechnete Fitfehler.

Die Abweichung der Datenpunkte vom *Fit* in der rot gekennzeichneten Kurve in Abb. 6.1 ist auf sogenannte **Cache-Effekte** zurückzuführen. Das bedeutet, daß die Matrizen zu groß für den *Cache* des Computers waren und deshalb in den RAM geschrieben wurden, welcher größere Zugriffszeiten besitzt. Der Computer, auf welchem die Analyse durchgeführt wurde, hatte gemäß `/proc/cpuinfo` eine *Cache*-Größe von 1024 kB. Diese Aussage stützt sich darauf, daß man in Abb. 6.1 erkennt, daß der Anstiegswechsel zwischen den Spaltenzahlen 235 und 288 liegt. Dies entspricht beim Matrixelementtyp `complex<double>` (Größe 16 Byte) Matrixspeichergrößen von 862 kB bis 1296 kB. Bei allen anderen Algorithmen waren die *Cache*-Effekte offensichtlich zu vernachlässigen.

6.2 Bosonischer Sektor

6.2.1 Wirkungserwartungswerte

Die folgenden numerischen Ergebnisse dienen hauptsächlich als Konsistenztest der in Abschnitt 5.1.3 dargelegten freien Theorie. Es wird versucht, die Ergebnisse (5.39), (5.40) und (5.41) zu verifizieren. Als Testtheorie diente eine $SU(3)$ -Theorie mit $s = 3$ Kompaktifizierungsskalaren.

Die Werte wurden erst ab einer Gitterpunktzahl von $L = 10$ aufgenommen, um bei $L < 10$ *finite-size*-Effekte auszuschließen. Man sieht in Abb. 6.2, daß die Nullmodenzahl des Gitter-Laplace-Operators mit dem in (5.39) berechneten Ergebnis übereinstimmt.

Anschließend wurde versucht, die Nullmodenzahl auch bei der freien Theorie mit Eichfeld

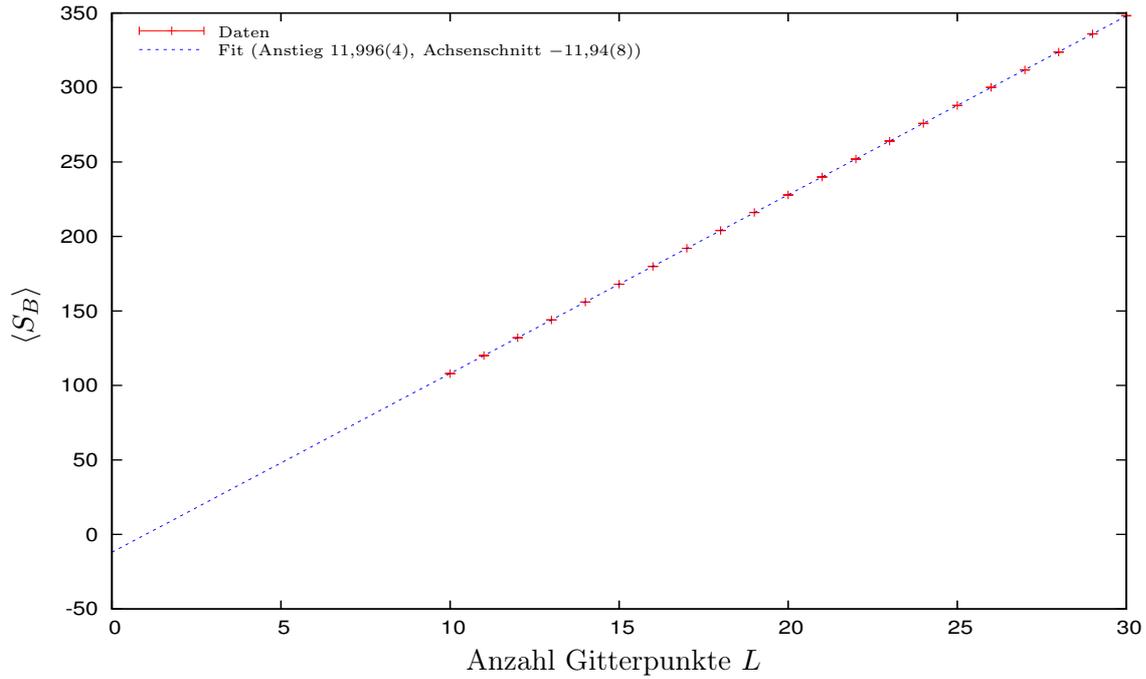


Abbildung 6.2: Wirkungserwartungswert der freien Theorie ohne Eichfeld und ohne Masse über Gittervolumen für $N_c = 3$, $s = 3$. Fehlerbalken sind in der Größe der Datenpunkte. Gemäß (5.39) sollte $\langle S_B \rangle = 12 \cdot (L - 1)$ sein (10^5 Konfigurationen davon 10^4 Thermalisierung).

zu verifizieren. Die Gleichungen (5.37) und (5.38) zeigen, daß die Anzahl der Nullmoden bei eingeschaltetem Eichfeld $N_c - 1$ beträgt, d.h. mit dem Rang der Gruppe übereinstimmt. Für die eichfixierte Theorie kann man nicht erwarten, daß die Zahl der Nullmoden $N_c - 1$ beträgt, denn die Dynamik der Kompaktifizierungsbosonen fordert, daß das Feld in der freien Theorie konstant ist. Dies wird durch den *Polyakov-Loop* und die Periodizität der Randbedingungen zwischen mindestens zwei Gitterpunkten nicht gewährleistet. Daraus resultiert, daß sich das Eichfeld im Verlauf der Monte-Carlo-Zeit zu den Zentrumselementen hinbewegt, wodurch die Anzahl der Nullmoden $N_c^2 - 1$ ist. Da aber die Wahrscheinlichkeit, ein Zentrumselement zu erreichen, aufgrund der Struktur des Haarmaßes sehr klein ist, kann man die $N_c^2 - 1$ Nullmoden nie genau messen. Es ist zu erwarten, daß die extrapolierte Zahl der Nullmoden, je nachdem, wie weit man sich dem Zentrumselement nähert, zwischen $N_c - 1$ und $N_c^2 - 1$ liegt.

In Abb. 6.3 ist zu sehen, daß die erwartete Nullmodenzahl umso besser erreicht wird, je kleiner die Metropolis-Schrittweite gewählt wird. Die blau gekennzeichneten Datenpunkte sind diejenigen Werte, die bei einem Start des Eichfeldes von einem Zentrumselement aus (Kaltstart) berechnet worden sind. Die Nullmodenzahl $N_c^2 - 1$ wird deshalb nicht erreicht, weil das Eichfeld durch den Metropolis-Schritt vom Zentrumselement wegbewegt wird. Der größte Metropolis-Schritt bei einem Warmstart des Eichfeldes dagegen zeigt, daß sich im Rahmen der Fehlertoleranz die Nullmodenzahl der freien Theorie mit Eichfeld ohne Erreichen eines Zentrumselements ergibt. Die Nullmodenzahl wurde durch Extrapolation des Wirkungser-

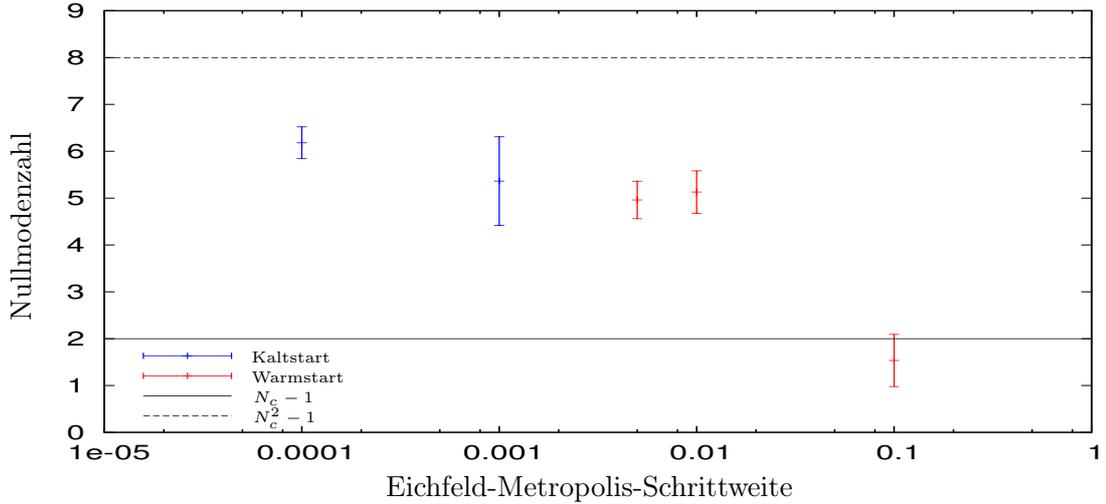


Abbildung 6.3: Extrapolierte Wirkungserwartungswerte für $L = 0$ (Nullmodenzahl) im Falle von $N_c = 3$, $s = 3$ gemäß (5.40) (10^5 Konfigurationen davon 10^4 Thermalisierung)

wartungswertes der freien Theorie ohne Masse mit Eichfeld (5.40) zu $L = 0$ berechnet¹.

6.2.2 Extrahierte Massen der freien Theorie ohne Eichfeld

Zur Demonstration der Massenextraktion wurden verschiedene Simulationen mit 10^5 Konfigurationen der freien Theorie ohne Eichfeld, mit $m_B = 0,5$ und der Eichgruppe $SU(3)$ mit $s = 3$ Kompaktifizierungsbosonen durchgeführt. Außerdem sollte geprüft werden, ob die Massenextraktion die erwarteten Werte liefert. In der Theorie ohne Eichfeld wird der Paralleltransportpropagator $\langle \text{tr } \mathcal{P}_{xy}^\dagger \Phi_{x,i} \mathcal{P}_{xy} \Phi_{y,j} \rangle$ zu einem Propagator $\langle \text{tr } \Phi_{x,i} \Phi_{y,j} \rangle$. In Abb. 6.4 wird das Verfahren der Massenextraktion anhand der freien Theorie demonstriert. Hier wurde ein Gitter von $L = 20$ Gitterpunkten verwendet, da unterhalb dieser Gittergröße nicht mehr genügend Punkte zum *Fitten* der linearen Funktion verbleiben.

Sowohl der „gnuplot“-*Fit* als auch die Berechnung der Masse über die Jackknife-Methode aus den Zeitreihen der in Abb. 6.4 dargestellten Korrelationsfunktion weisen Diskrepanzen gegenüber der Masse $m = 0,5$ auf, die als Parameter für diese Theorie eingestellt wurde. Dieser Effekt beruht darauf, daß die Propagatoren im Kontinuum und auf dem Gitter unterschiedliche Strukturen haben. Der Propagator einer freien, skalaren, euklidischen Kontinuumstheorie im Impulsraum ist

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (6.1)$$

und hat dementsprechend den Pol bei $\mp ip_{\text{Pol}} = m = m_{\text{eff}}$. Die effektive Masse entspricht also der freien Masse. Der Gitterpropagator für die freie Theorie ohne Eichfeld im Impulsraum hingegen ist wegen der Vorwärtsableitung auf dem Gitter durch

$$G_L(p) = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{p}{2} + m^2} \quad (6.2)$$

¹Die hier angegebenen Fehler sind die *Fit*-Fehler, die aus dem linearen *Fit* mit „gnuplot“ berechnet wurden.

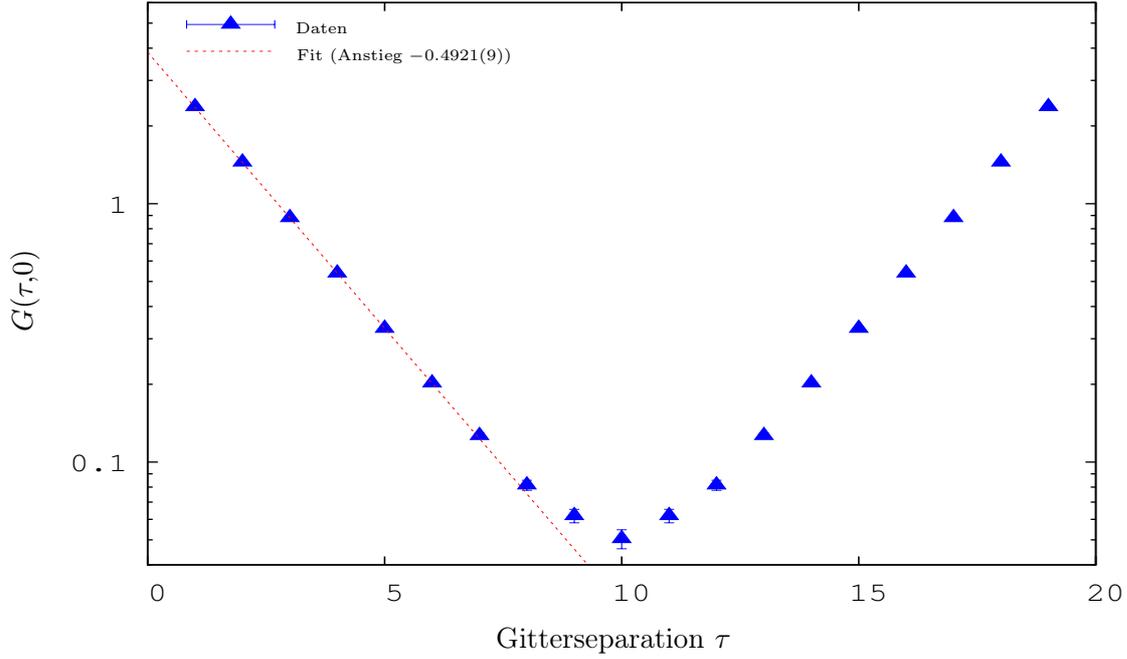


Abbildung 6.4: Zweipunktsfunktion $\langle \text{tr } \Phi_1(\tau) \Phi_1(0) \rangle$ für $L = 20$. Fehlerbalken zeigen Jackknife-Fehler auf Zweipunktsfunktion. Massenbestimmung mit Jackknife-Methode $m_{\text{eff}} = 0,492(3)$. Linearitätsbereich für Jackknife-Methode zwischen 2. und 7. Gitterpunkt. Dieser Bereich wurde auch für den *Fit* mit „gnuplot“ benutzt.

gemäß (5.31) gegeben. Dies führt dazu, daß der Pol von m verschieden ist, denn

$$\mp ip_{\text{Pol}} = 2 \operatorname{arsinh} \left(\frac{m}{2} \right) = m_{\text{eff}}. \quad (6.3)$$

Für $m = 0,5$ erhält man $m_{\text{eff}} \approx 0,495$ was mit dem extrahierten Wert in Abb. 6.4 im Rahmen der Fehlertoleranz übereinstimmt. Sowohl die effektive Masse als auch der Massenparameter sind zu physikalischen Massen in Beziehung zu setzen. Der Kontinuumslikes muß so durchgeführt werden, daß die physikalischen Massen konstant bleiben. Die physikalische Masse m_{phys} steht durch die Gitterkonstante

$$a = R/L \quad (6.4)$$

(R physikalische Boxgröße) über

$$m = m_{\text{phys}} a = m_{\text{phys}} R/L \quad (6.5)$$

mit der Gittermasse in Beziehung. Setzt man dies in Gleichung (6.3) ein, erhält man

$$m_{\text{phys,eff}} a = 2 \operatorname{arsinh} \left(\frac{m_{\text{phys}} a}{2} \right). \quad (6.6)$$

Nun wird über $M = m_{\text{phys}} a_{\text{ref}}$ und $M_{\text{eff}} = m_{\text{phys,eff}} a$ die physikalische Masse zugunsten einer Referenzgittermasse M eliminieren. Dies hat seine Ursache darin, daß es keinerlei physikalische Skala gibt, die die physikalischen Massen oder die Boxgröße fixiert. Aus der Beziehung

(6.3) erhält man durch Eliminieren der physikalischen Massen die Abhängigkeit

$$M_{\text{eff}} \frac{a}{a_{\text{ref}}} = 2 \operatorname{arsinh} \left(\frac{M}{2} \frac{a}{a_{\text{ref}}} \right), \quad (6.7)$$

welche die gemessene Referenzmasse M_{eff} mit Hilfe der Referenzmasse M und dem Verhältnis der Gitterkonstanten ausdrückt. In dieser Gleichung sieht man, daß $\lim_{a \rightarrow 0} M_{\text{eff}} = M$ ist. Das Verhältnis der Gitterkonstanten kann man durch die Anzahl der Gitterpunkte L bzw. L_{ref} über

$$a_{\text{ref}} L_{\text{ref}} = a L = R \quad (6.8)$$

ausdrücken, da die Boxgröße R im Kontinuumsimes konstant bleiben soll. Zur Vereinfachung ist es sinnvoll, die Abkürzung

$$\tilde{a} = \frac{a}{a_{\text{ref}}} = \frac{L_{\text{ref}}}{L} \quad (6.9)$$

einzuführen, welche direkt proportional zur Gitterkonstante ist. Somit ist

$$M_{\text{eff}} = 2\tilde{a}^{-1} \operatorname{arsinh} \left(\frac{M\tilde{a}}{2} \right) \quad (6.10)$$

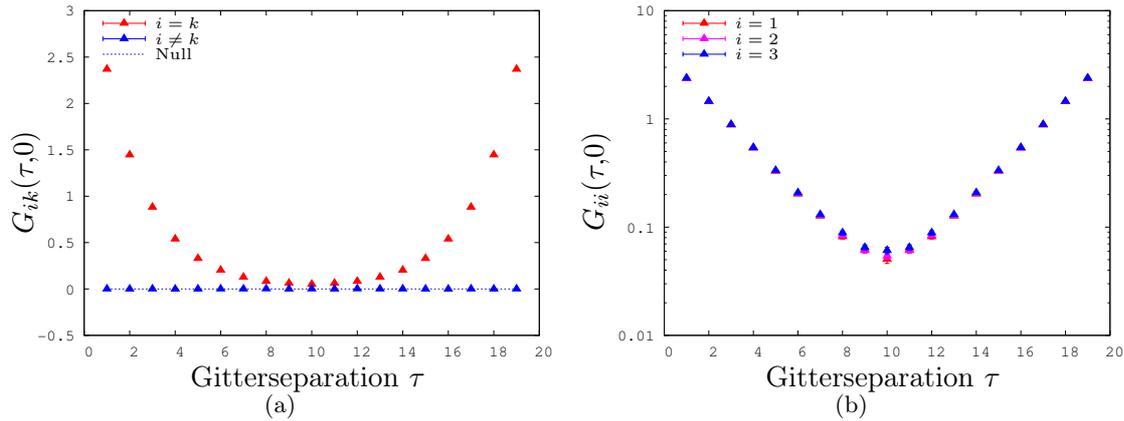
der gesuchte Ausdruck für die gemessene Referenzmasse, der sich gemäß

$$\lim_{L \rightarrow \infty} M_{\text{eff}} = \lim_{\tilde{a} \rightarrow 0} M_{\text{eff}} = M \quad (6.11)$$

verhält. Die zu L gehörige Gittermasse ist $m = ML_{\text{ref}}/L = M\tilde{a}$, muß also skaliert werden. Ebenso ist die zu L gehörige effektive Gittermasse gemäß $M_{\text{eff}} = m_{\text{eff}}\tilde{a}^{-1}$ an die Gitterlänge anzupassen.

Der Test der Beziehung (6.10) läuft folgendermaßen ab: Man fixiert einen Wert der Referenzgittermasse M (hier $M = 0,5$) bei einer Referenzgitterlänge L_{ref} (hier $L_{\text{ref}} = 20$) nach den oben angegebenen Kriterien (4.57) $1 < M L_{\text{ref}} < L_{\text{ref}}$. Anschließend führt man verschiedenen Simulationen bei Gitterlängen $L \neq L_{\text{ref}}$ durch und stellt deren Massenparameter gemäß $m = M\tilde{a}$ ein. Sind die Simulationen abgeschlossen, mißt man die effektiven Massen m_{eff} , die man über $M_{\text{eff}} = m_{\text{eff}}\tilde{a}^{-1}$ wieder auf die Referenzgitterlänge bezieht. In der freien Theorie ohne Eichfeld ist der Verlauf durch (6.10) analytisch gegeben. Die Ergebnisse für die Theorie ohne Eichfeld und die Theorie mit Eichfeld werden im Abschnitt 6.2.3 miteinander verglichen.

Zuvor werden die verschiedenen Korrelatoren im verglichen. Dabei wird im Zusammenhang mit $\langle \operatorname{tr} \Phi_i \Phi_i \rangle$ von **Selbstkorrelatoren** oder **Zweipunktsfunktionen** und bei $\langle \operatorname{tr} \Phi_i \Phi_k \rangle, i \neq k$ von **Kreuzkorrelatoren** gesprochen. In der freien Theorie wird erwartet, daß die Kreuzkorrelatoren verschwinden, da keine Wechselwirkungen zwischen den unterschiedlichen Kompaktifizierungsskalaren existieren. Eine weitere Verifikation der Simulationen und der Massenmessung soll durch den Vergleich der insgesamt drei Selbstkorrelatoren gegeben sein, die im Rahmen der Fehler identisch sein müssen, da sie in der Kontinuumstheorie völlig gleich behandelt werden. Abb. 6.5 bestätigt dies.

Abbildung 6.5: Korrelatoren der freien Theorie ohne Eichfeld für $L = 20$.

6.2.3 Extrahierte Massen der freien Theorie mit Eichfeld

Die extrahierten Massenwerte wurden aufgrund der obigen Diskussion für verschiedene Gittergrößen, mit Eichfeld und ohne Eichfeld, verglichen. Je größer die Gitterlänge L in Verbindung mit geeignet skalierten Massen wird, umso kleiner wird $\tilde{a} \sim a$ und umso mehr nähert sich die Theorie der Kontinuumstheorie, in der Gitterartefakte verschwinden. Insbesondere sollte sich im Kontinuum als effektive, gemessene Masse $M_{\text{eff}} = 0,5$ ergeben.

In Abb. 6.6 ist ersichtlich, daß aufgrund der Skalierung mit zunehmender Gittergröße die Fehler der Massen immer größer werden. Weiterhin ist zu sehen, daß das Eichfeld innerhalb der Fehlertoleranz keinen Einfluß auf die gemessenen Massen hat. Die Werte bei $\tilde{a} = 0,5$ und $\tilde{a} = 1$ sind mit 10^5 Konfigurationen bei einer Thermalisierung von 10^4 Konfigurationen gemessen worden. Bei $\tilde{a} = 2$ und $\tilde{a} = 0,8$ sind die Werte hingegen mit 10^6 Konfigurationen und einer Thermalisierung von 10^5 gemessen worden. Allerdings war das Gitter mit $L = 10$ bei dieser Masse so klein, daß im Massen-*Fit* nur noch drei Punkte berücksichtigt werden konnten.

6.2.4 Propagatoren der vollen bosonischen Theorie ohne Eichfeld

Dieser Abschnitt stellt die Korrelatoren der bosonischen Theorie mit Wechselwirkung, aber ohne Eichfeld, dar. Abb. 6.7a zeigt, daß es im Rahmen der Fehlertoleranz in der starkgekoppelten Φ^4 -Theorie keine Kreuzkorrelationen gibt. In Abb. 6.7b ist zu sehen, daß in der wechselwirkenden Theorie auch die Kompaktifizierungsbosonen durch die Wechselwirkung vollkommen gleichberechtigt behandelt werden. Es gibt also in der wechselwirkenden Theorie, soweit das hier festgestellt wurde, keine spontane Brechung der $SO(3)$ -Symmetrie unter den Kompaktifizierungsbosonen. Die Kopplungsstärke α_L wurde so gewählt, daß die Gittermassen das Kriterium (4.57) erfüllen.

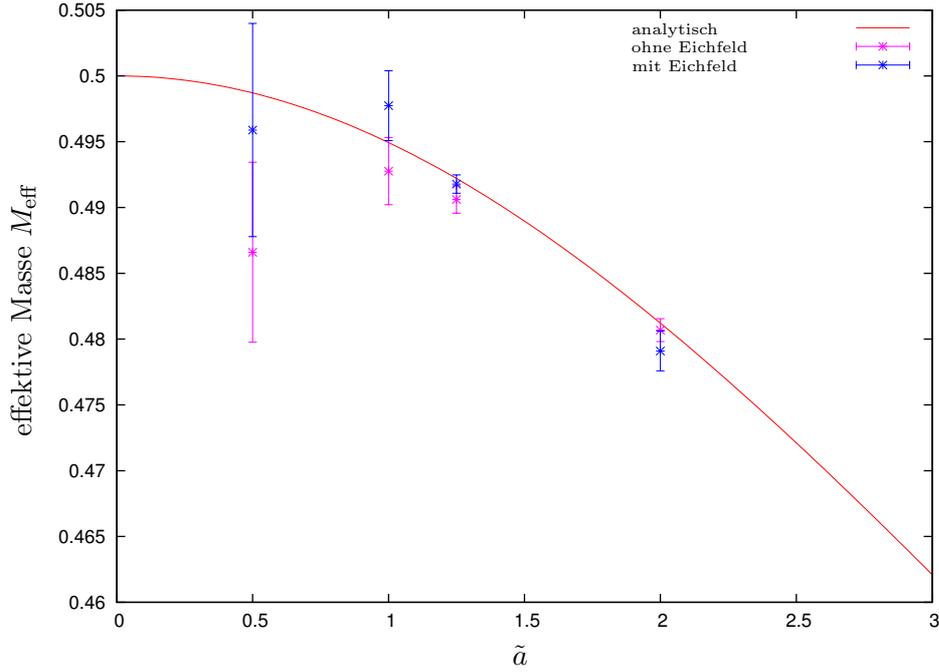


Abbildung 6.6: Vergleich der effektiven, gemessenen und skalierten Massen M_{eff} auf verschiedenen Gittern in Relation zur Referenzmasse $M = 0,5$ mit und ohne Eichfeld bei $L_{\text{ref}} = 20$ mit 10^5 bzw. 10^6 Konfigurationen.

6.2.5 Kontinuumslices für eine $SU(2)$ -Theorie mit $\beta = 8$

Um zu verifizieren, daß man mit $\beta = \text{const}$ einen definierten Kontinuumslices durchführen kann, wurde bei festgehaltenem β für eine $SU(2)$ -Theorie mit der Gitterkopplung

$$\alpha_L = \frac{N_c L^3}{\beta^3} \quad (6.12)$$

das Gitter immer weiter vergrößert. Dabei wurde untersucht, wie sich die Gittermasse in Abhängig vom Verhältnis von Gitterkonstante zu Boxgröße

$$\frac{a}{R} = \frac{a}{aL} = \frac{1}{L} \quad (6.13)$$

verhält. Im Kontinuumslices sollte die effektive Masse für $1/L \rightarrow 0$ gegen Null gehen. Ausgangspunkt dafür war die Überlegung, daß

$$mL = m_{\text{phys}}R. \quad (6.14)$$

Falls $m_{\text{phys}}R > 1$ ist m_{phys} unabhängig von R und damit ist

$$m = m_{\text{phys}}R/L \quad (6.15)$$

ein linearer Zusammenhang, wenn sich β als konstanter Parameter für einen Kontinuumslices eignet. Man sieht an den *Fit*-Daten in 6.8, daß das Produkt

$$m_{\text{phys}}R = mL > 1 \quad (6.16)$$

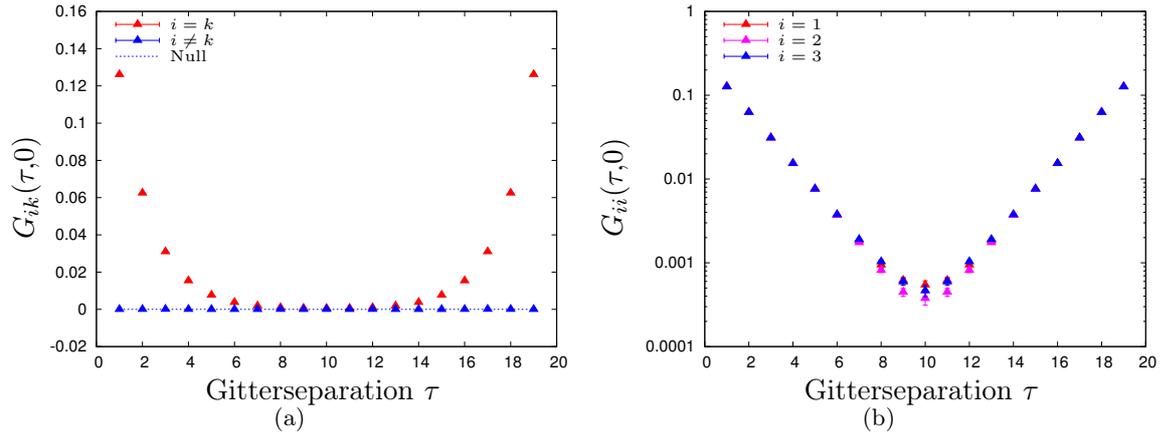


Abbildung 6.7: Selbstkorrelatoren und Kreuzkorrelatoren der wechselwirkenden Theorie ohne Eichfeld für $L = 20$ und $\alpha_L = 10$ (10^6 Konfigurationen davon 10^5 Thermalisierung).

ist. Dies bedeutet, daß die Korrelationslängen der Teilchen, auf das Gitter „passen“. Durch den linearen Verlauf sowohl für fixiertes β als auch der bosonischen Masse bei änderlichem β in Abb. 6.9 ist es gerechtfertigt, β für einen Kontinuumslimites zu fixieren und die Gitterlänge einfach zu vergrößern. Man muß dennoch β so wählen, daß die Gittermassen auf das Gitter passen. Für $\beta = 1$ in Abb. 6.9 ist $mL < 1$, womit das Teilchen nicht mehr auf das Gitter „paßt“. Außerdem ist ersichtlich, daß die Massen bei änderlichem β nahezu unabhängig von N_c sind.

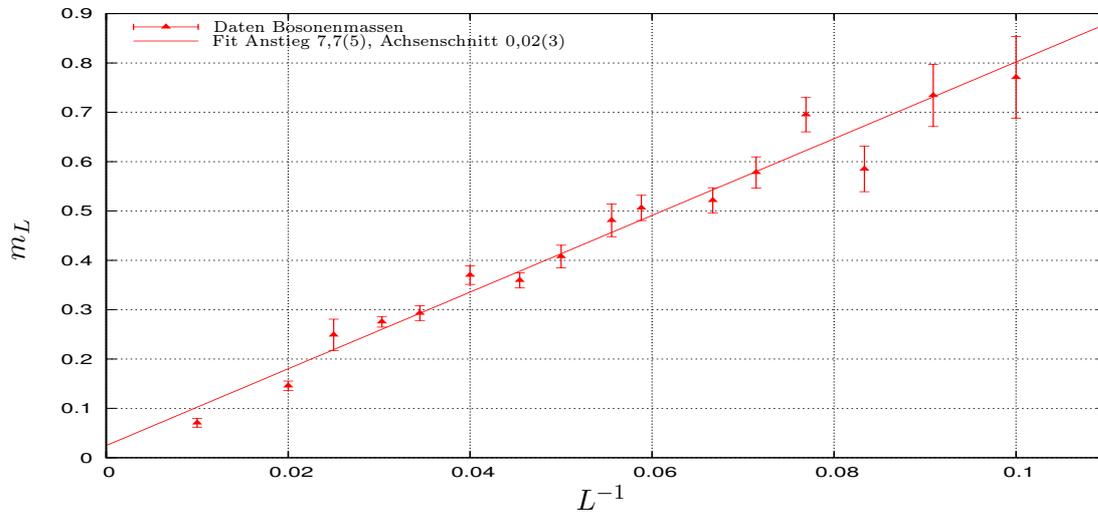


Abbildung 6.8: Kontinuumslimites der vollen bosonischen Theorie mit $SU(2)$ -Eichgruppe.

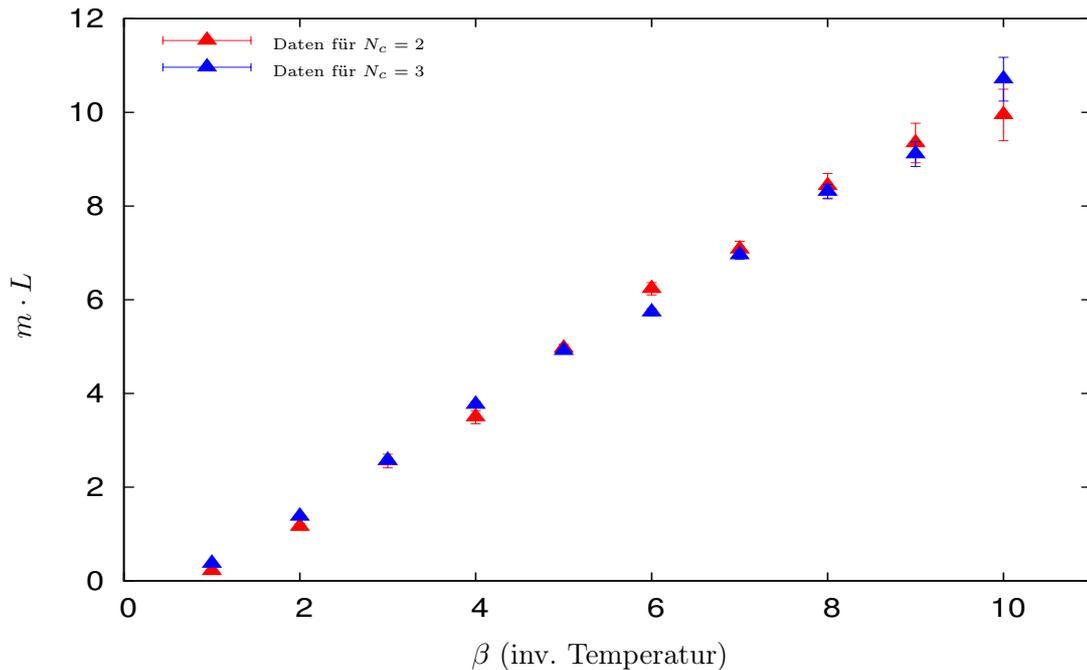


Abbildung 6.9: β -Abhängigkeit der Bosonenmasse, skaliert mit der Gittergröße.

6.2.6 't Hooft-Limes der vollen bosonischen Theorie für $0,2 \leq \beta \leq 2$

Im 't Hooft-Limes werden die bosonische Wirkung, der Betrag der Spur des *Polykov-Loops* und die Suszeptibilität des *Polykov-Loops* gemessen. Diese werden für verschiedene N_c aufgetragen und interpretiert.

Wie in Abb. 6.10 zu sehen ist, nimmt der subtrahierte bosonische Wirkungserwartungswert für große N_c annähernd den in Abschnitt 3.4 vorhergesagten und in [CW07] gezeigten Verlauf. Für kleine β , also in der Hochtemperaturphase, ist die subtrahierte Wirkungserwartungswert β -unabhängig was bedeutet, daß gemäß (5.46) die subtrahierten innere Energie proportional zu $1/\beta$ ist. Weiterhin sieht man, daß $\langle s_B \rangle$ für große N_c von N_c annähernd unabhängig wird, was bedeutet, daß die innere Energie proportional zu N_c^2 ist.

Die Graphen in Abb. 6.11 bestätigen, daß im Limes $N_c \rightarrow \infty$ ein Phasenübergang erster Art für den Betrag der Spur des *Polykov-Loops* zu erwarten ist. Der Übergang zwischen Hochtemperatur- und Niedertemperaturphase nähert sich immer mehr einer Diskontinuität an. Auch der Suszeptibilitätsgraph in Abb. 6.12 zeigt ein Verhalten, welches vermuten läßt, daß die Suszeptibilität für $N_c \rightarrow \infty$ bei $\beta = \beta_c = 0,8 \pm 0,1$ divergiert.

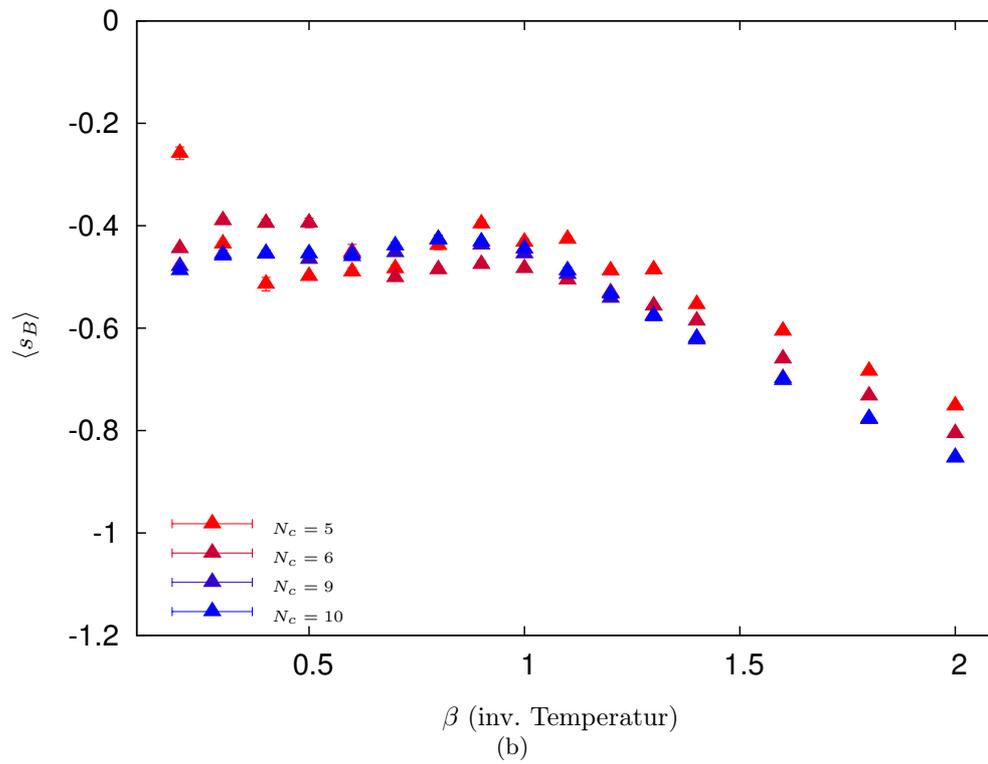
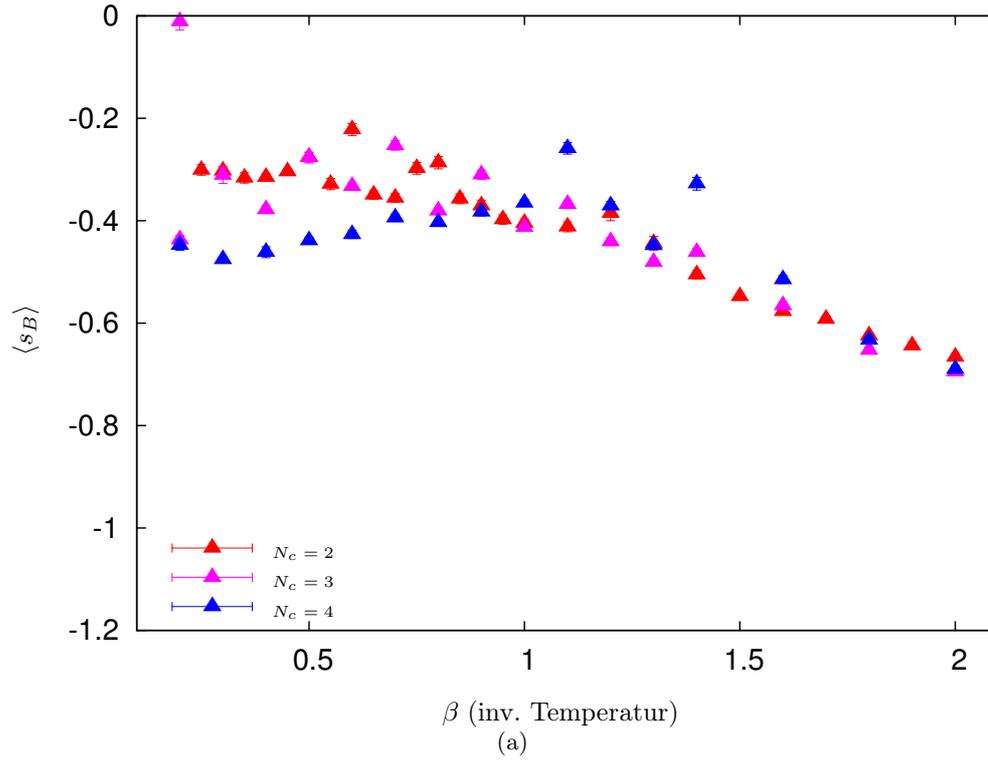


Abbildung 6.10: 't Hooft-Limes $2 \leq N_c \leq 10$ für den bosonischen Wirkungserwartungswert $\langle s_B \rangle$

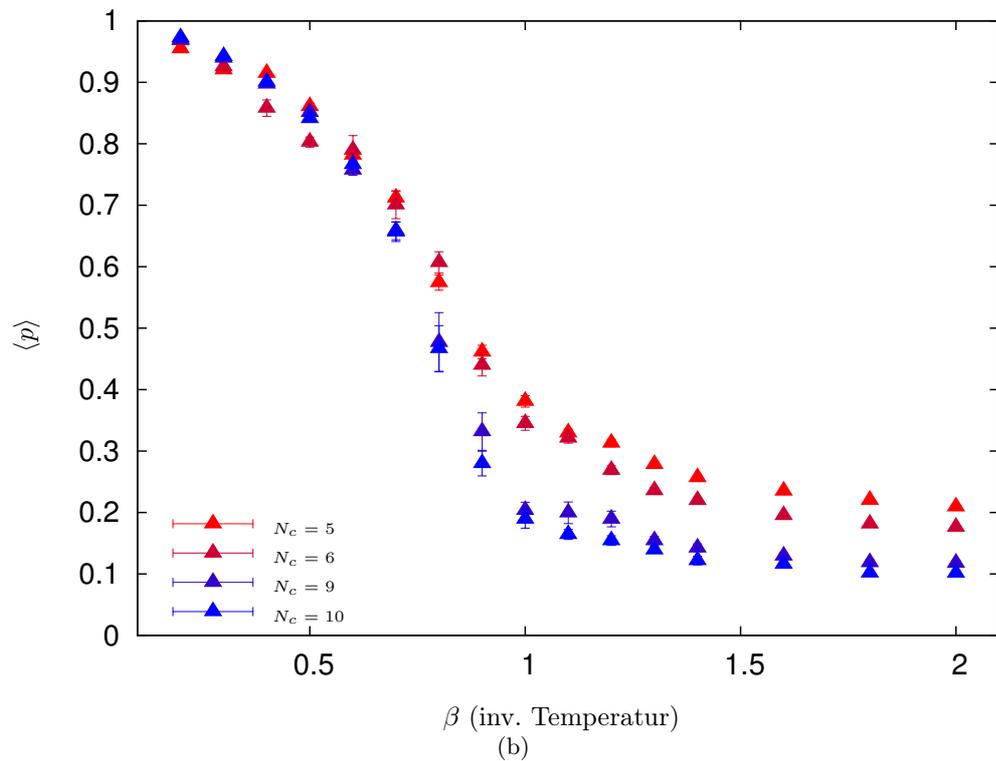
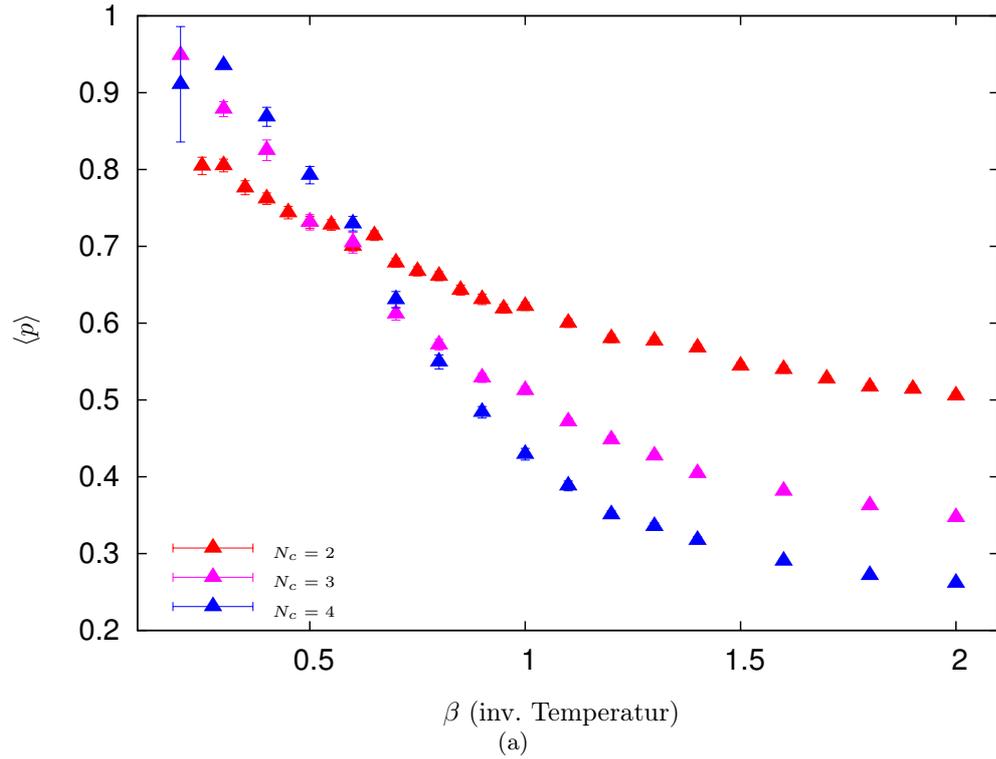


Abbildung 6.11: 't Hooft-Limes für $2 \leq N_c \leq 10$ für den Erwartungswert des Betrags der Spur des *Polyakov-Loops* $\langle p \rangle$

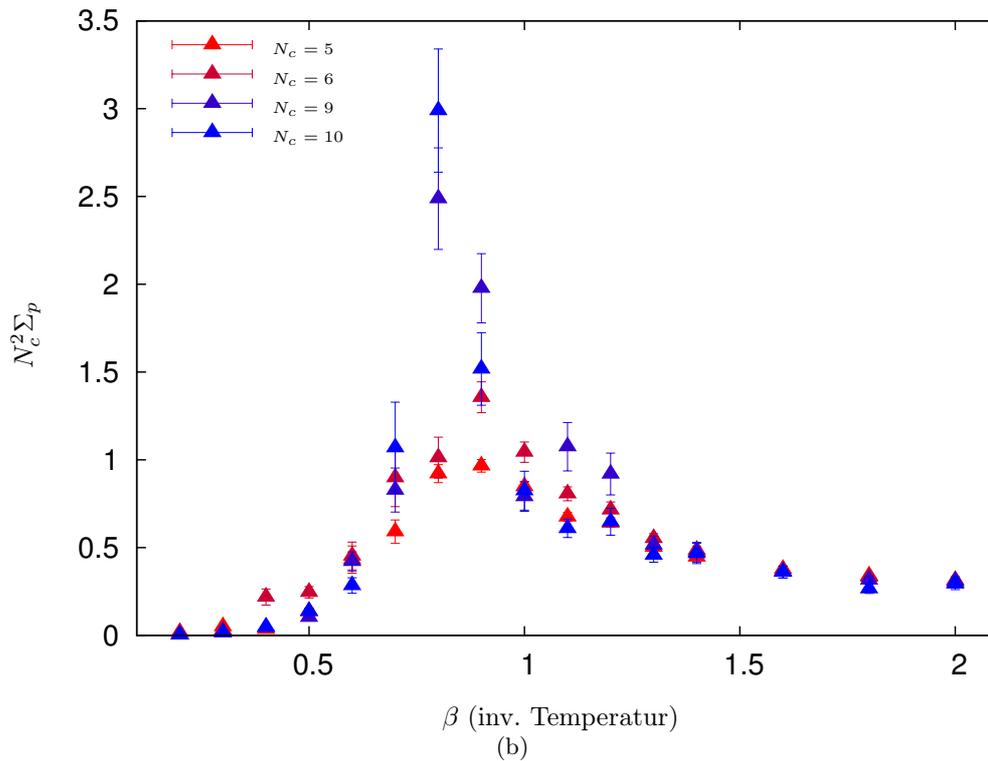
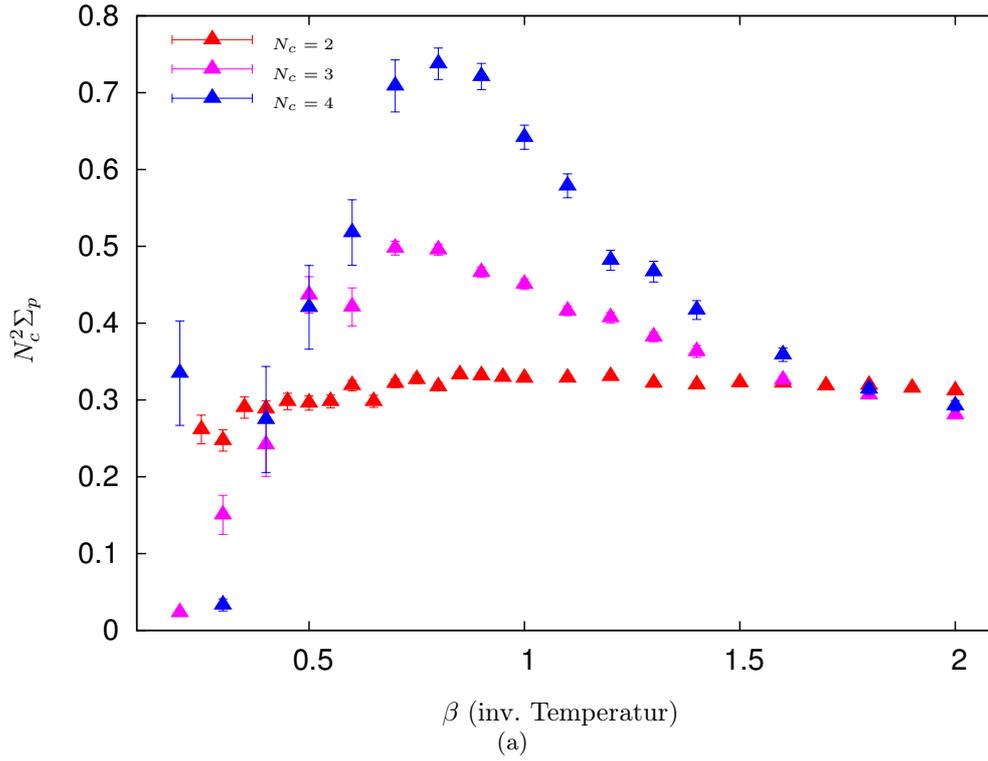


Abbildung 6.12: 't Hooft-Limes für $2 \leq N_c \leq 10$ für die mit N_c^2 skalierte Suszeptibilität des *Polykov-Loops* $N_c^2 \Sigma_p = N_c^2 (\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2) = \langle |\text{tr } \mathcal{P}|^2 \rangle - \langle \text{tr } \mathcal{P} \rangle^2$.

6.3 Fermionischer Sektor

6.3.1 Extrahierte Fermionenmassen der freien Theorie

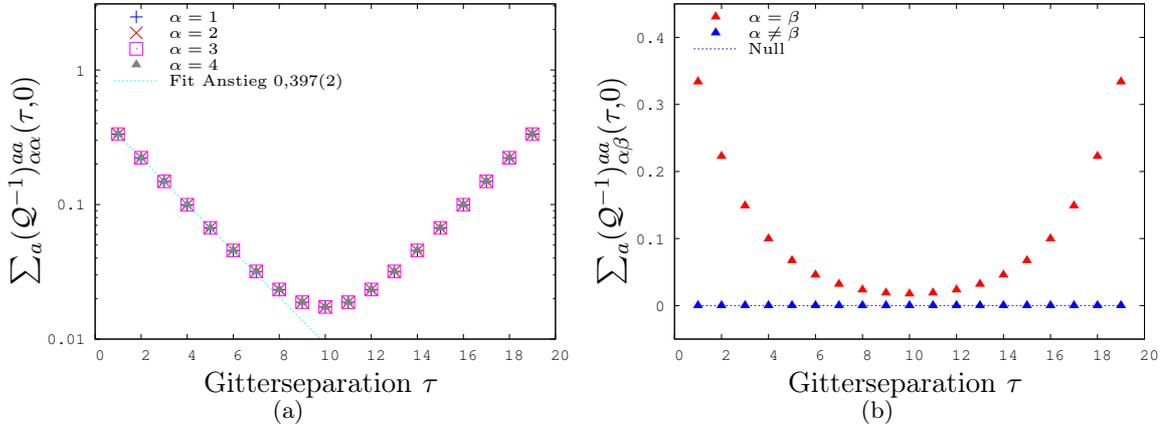


Abbildung 6.13: Selbstkorrelatoren und Kreuzkorrelatoren der Fermionen in einer $SU(3)$ -Theorie ohne Yukawa-Kopplung und ohne Eichfeld für $m_L^F = 0,5$.

Die mit Hilfe der Daten in Abb. 6.13a berechnete effektive Masse der Fermionen ist genau wie bei den Kompaktifizierungsbosonen von $m_F = 0,5$ verschieden. Dies begründet sich wie in der freien bosonischen Theorie, mit dem vom Kontinuumspropagator abweichenden Gitterpropagator. Allerdings hat dieser eine andere Struktur als in der bosonischen Theorie. Diese kann man an den in 5.2.3 hergeleiteten Eigenwerten, zum Beispiel (5.148) entnehmen. Demzufolge ist die Masse

$$m_{\text{eff}}^F = -ip_{\text{Pol}}, \quad (6.17)$$

wenn p_{Pol} derjenige Impuls ist, bei dem der Eigenwert Null wird. Löst man (5.148) nach $-ip_{\text{Pol}}$ auf, erhält man

$$m_{\text{eff}}^F = -\log(2\kappa) = \log(m^F + r). \quad (6.18)$$

Für $m^F = 0,5$ und $r = 1$ ergibt sich $m_{\text{eff}}^F = 0,405$, was gut mit dem aus dem *Fit* entnommenen Wert übereinstimmt und die Diskrepanz erklärt. Drückt man nun die Gittergrößen durch physikalische Größen aus, erhält man ähnlich wie im bosonischen Sektor

$$m_{\text{phys,eff}}^F a = \log(m_{\text{phys}}^F a + r) \quad (6.19)$$

und kann über $m_{\text{phys}}^F a = m^F$ und $m_{\text{phys}}^F a_{\text{ref}} = M^F$ die physikalische Masse wieder zugunsten einer Referenzmasse gemäß

$$M_{\text{eff}}^F = \tilde{a}^{-1} \log(M^F \tilde{a} + r) \quad (6.20)$$

eliminieren. Durch Abb. 6.14 wird diese Gleichung bestätigt und man sieht, daß für $L \rightarrow \infty$ also $\tilde{a} \rightarrow 0$ der Wert $M_{\text{eff}}^F = 0,5$ erreicht wird.

Die Werte für die Theorie ohne Eichfeld besitzen keine Fehler, weil die Fermionenmatrix in diesem Fall keinerlei Fluktuationen durch die Kopplung an Eichfeld oder Kompaktifizierungsbosonen unterworfen ist. In der Theorie mit Eichfeld sind die Fluktuationen relativ klein, aber man sieht, daß die Masse im Kontinuum tendenziell größer ist als in der freien Theorie.

Die Abb. 6.13b zeigt, daß auch bei den Fermionen Kreuzkorrelatoren den Wert Null annehmen und der Abfall der Selbstkorrelatoren ein Maß für die Masse bzw. Grundzustandsenergie darstellen.

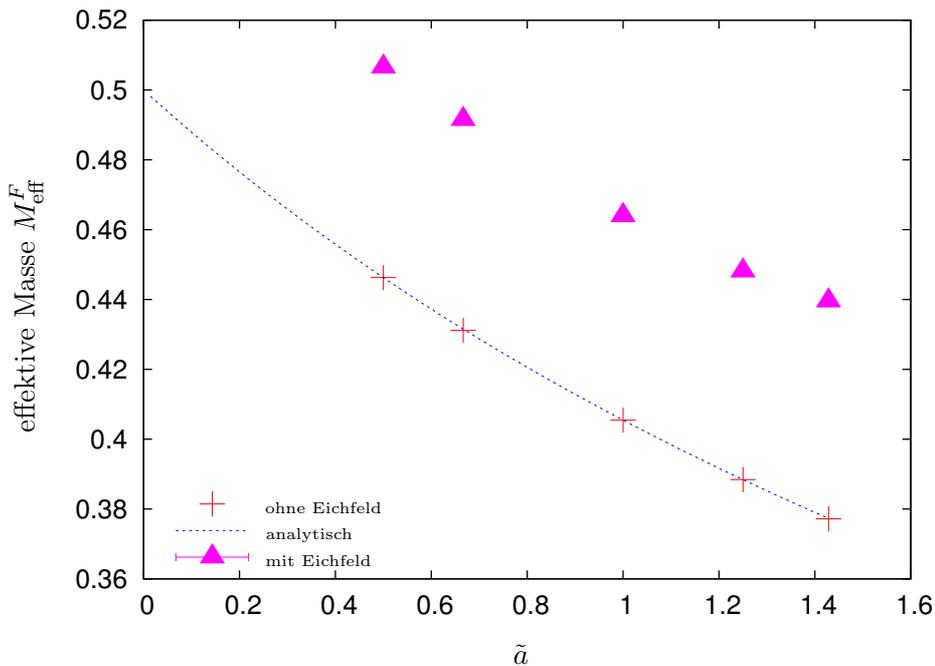


Abbildung 6.14: Vergleich der effektiven, gemessenen und skalierten Massen M_{eff}^F auf verschiedenen Gittern in Relation zur Referenzmasse $M^F = 0,5$ und Referenzgitterlänge $L_{\text{ref}} = 20$ mit Eichfeld und ohne Eichfeld (ohne Eichfeld 100 Konfigurationen, mit Eichfeld 1000 Konfigurationen). Fehlerbalken in der Größe der Datenpunkte.

6.3.2 Analyse der Instabilitäten

In diesem Abschnitt werden die Instabilitäten der Simulationen mit Fermionen untersucht. Dafür wurde eine $SU(2)$ -Theorie mit $\beta = 8$ auf einem $L = 15$ Gitter simuliert und nach Anzeichen für Instabilitäten gesucht. In allen mit Fermionen durchgeführten Simulationen wurden Instabilitäten identifiziert, wenn die effektive Wirkung, über der Monte-Carlo-Zeit aufgetragen, für ein thermalisiertes System plötzliche „Einbrüche“ zu verzeichnen hatte.

In Abb. 6.15 sind zur Dokumentation dieser „Einbrüche“ die verschiedenen Teile der Wirkung gegen die Monte-Carlo-Zeit aufgetragen. Man sieht, daß die Wirkung S_{pot} nicht auf Null absinkt. Dies wäre ein Indiz dafür, daß die Simulation in die flachen Richtungen des bosonischen Potentials getrieben wird. An den Graphen ist ersichtlich, daß die „Einbrüche“ in der effektiven Wirkung hauptsächlich von der Fermionenwirkung $S_{\text{ferm}} = -1/2 \log \det \tilde{Q}$

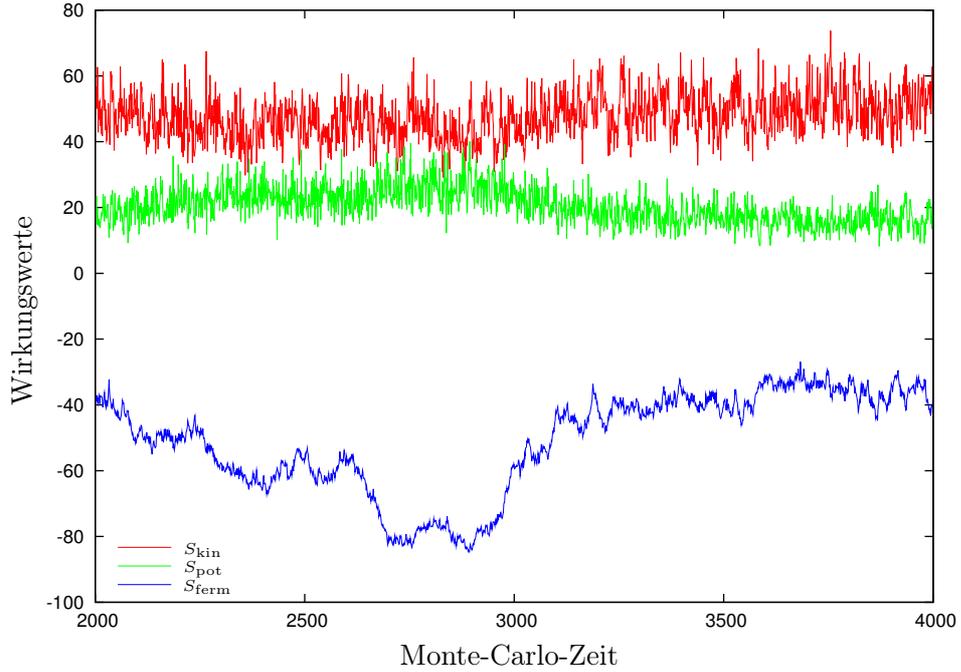


Abbildung 6.15: Wirkungsanteile in der Umgebung einer Instabilität über der Monte-Carlo-Zeit aufgetragen

herrühren, da die bosonische Wirkung $S_B = S_{\text{kin}} + S_{\text{pot}}$ (bis auf Fluktuationen) konstant bleibt. Dieser durch die Fermionendeterminante verursachte „Einbruch“ deutet darauf hin, daß eine weitere Analyse des Spektrums von \tilde{Q} sinnvoll ist.

In Abb. 6.16 sind zunächst sowohl im stabilen Bereich als auch im instabilen Bereich 500 Spektren von \tilde{Q} übereinander gelegt, damit man ein vollständiges Bild über die Verteilungsschwerpunkte des Spektrums in den beiden Bereichen hat.

Man sieht, daß das Spektrum im stabilen Bereich (grün) wesentlich schmäler ist, als im instabilen Bereich (rot). Weiterhin ist ersichtlich, daß der Teil des Spektrums, der zum freien Dirac-Operator mit Eichfeld gehört (also auch ohne Yukawa-Kopplung vorhanden ist), im instabilen Bereich zu den Eigenwerten des freien Dirac-Operators ohne Eichfeld (blaue Kreuze) getrieben wird. Da der freie Dirac-Operator ohne Eichfeld (im masselosen Fall) gemäß (5.148) einen $4(N_c^2 - 1)$ -fach entarteten Nulleigenwert besitzt, wird das Spektrum im instabilen Bereich auch Eigenwerte haben, die fast Null sind. Allerdings zeigt Abb. 6.16 keine Zeitauflösung in der Monte-Carlo-Zeit. Deshalb sind sowohl die Imaginärteile (zur Dokumentation der Breite des Spektrums) als auch die Realteile (zur Dokumentation der Annäherung an den Nulleigenwert) des Spektrums in Abb. 6.17 und Abb. 6.18 über der Monte-Carlo-Zeit aufgetragen.

Durch die Breite des Spektrums und der Annäherung an die Nullmode ist zu erwarten, daß die Instabilität in der Simulation sowohl auf die Konditionszahl

$$\kappa(\tilde{Q}) = \frac{\max |\lambda(\tilde{Q})|}{\min |\lambda(\tilde{Q})|} \quad (6.21)$$

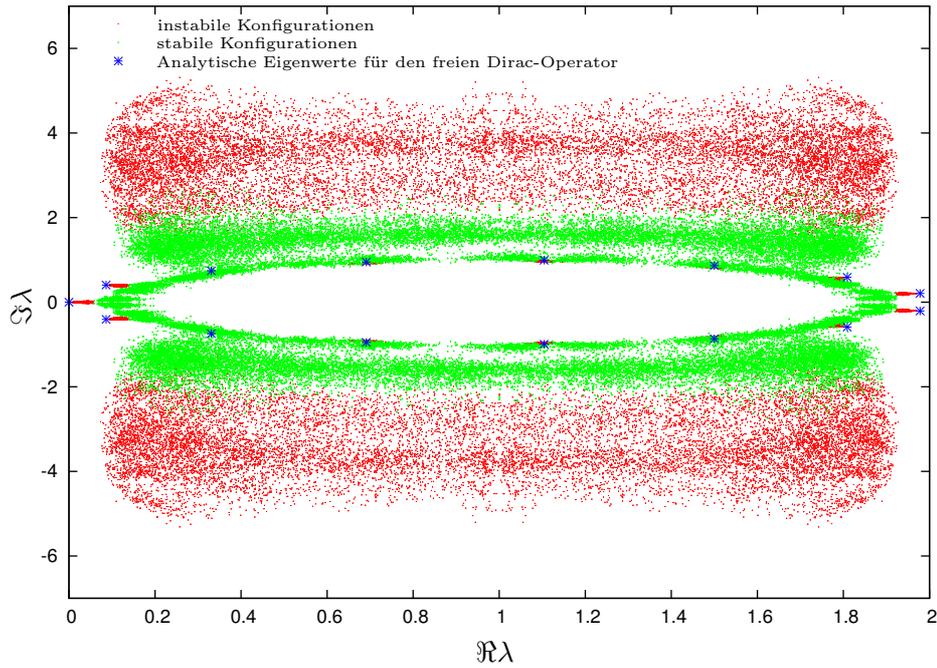


Abbildung 6.16: Vergleich der Spektren des Dirac-Operators in einem stabilen (Konfigurationen 3500-4000) und einem instabilen Bereich (Konfigurationen 2500-3000) der Monte-Carlo-Simulation

und auf die Inversionsverletzung

$$v(\tilde{Q}) = \frac{1}{\text{Zeilen}(\tilde{Q}) \cdot \text{Spalten}(\tilde{Q})} \sum_{a,b} \left(\left| (\tilde{Q} \cdot \tilde{Q}^{-1})_{ab} - \delta_{ab} \right| \right) \quad (6.22)$$

Auswirkungen hat. Die Inversionsverletzung ist dabei ein Maß für die mittlere, elementweise Abweichung von $\tilde{Q} \cdot \tilde{Q}^{-1}$ von $\mathbf{1}$ und ist bei einer exakten Inversion Null. Dies ist für den Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus wichtig, da in die Wirkung (5.152) \tilde{Q} und in die Kraft (5.157), die im Algorithmus zur Wirkung gehört, \tilde{Q}^{-1} eingeht. Erwartungsgemäß führen eine große Konditionszahl und eine große Inversionsverletzung zu einer kleineren Akzeptanzrate.

Man sieht in Abb. 6.19, daß genau im Bereich der Instabilität die Konditionszahl schlechter und $v(\tilde{Q})$ größer wird. Um die obige Aussage über die Akzeptanzraten zu verifizieren, wurden sowohl $\{\exp(-\Delta H), 1\}$ für den HMC, als auch die Akzeptanz des Eichfeld-Metropolis-Algorithmus nach 10 Versuchen für jede Konfiguration in einer Textdatei gespeichert. Nun wurde ein Maß für die momentane Akzeptanz benötigt. Dazu wurde die Eichfeldakzeptanz über 30 Konfigurationen gemittelt und beim Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus wurde die exponentierte, durch Eins begrenzte Energieerhaltungsverletzung über 30 Konfigurationen gemittelt. Dieser Schritt wurde getätigt, weil die totale Akzeptanzrate, dadurch daß über die ganze Monte-Carlo-Zeit gemittelt wird, gegenüber Schwankungen in der momentanen Akzeptanzwahrscheinlichkeit unempfindlich ist. Abb. 6.20 zeigt die über Blöcke von 30 Konfigurationen gemittelte Akzeptanzrate für Eichfeld und Kompaktifizierungsbosonen. Man sieht, daß bei Auftreten der Instabilität die Akzeptanz des Eichfeldes stark abfällt, während der Abfall

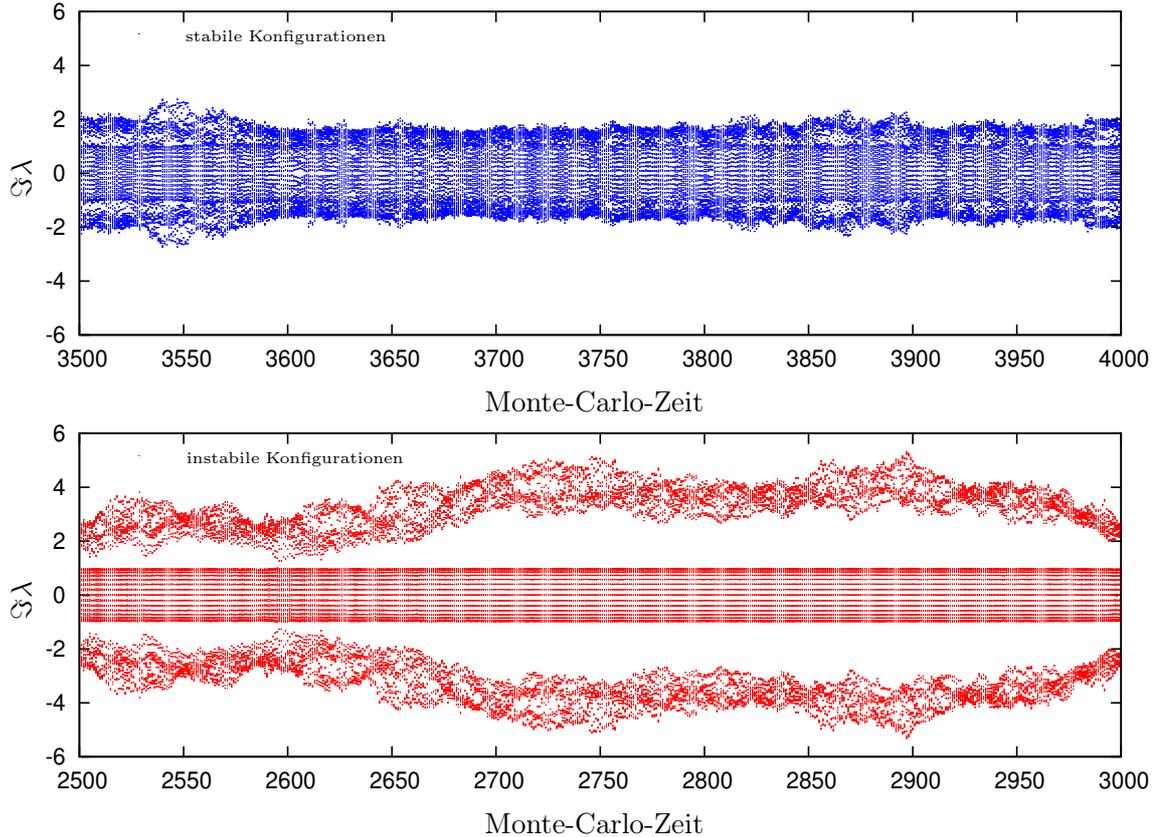


Abbildung 6.17: Vergleich der Imaginärteile des Spektrums in einem stabilen und einem instabilen Bereich der Monte-Carlo-Simulation über der Monte-Carlo-Zeit aufgetragen

der Akzeptanz (oder die Zunahme der Energieverletzung) bei den Kompaktifizierungsbosonen durch fastsinguläre Matrizen nicht sehr groß ist. Dies deckt sich mit der Abweichung von $v(\tilde{Q})$ von Null in Abb. 6.19, die noch in den Grenzen der Gleitkommagenauigkeit liegt. Eine große Schwierigkeit im Zusammenhang mit diesen Instabilitäten war die Nichtreproduzierbarkeit derselben. Auch eine größere Statistik war nicht immer zielführend, da die Simulation sich recht lange in einem instabilen Bereich aufhalten konnte, womit Mittelungsprozesse nicht mehr sinnvoll waren. Ein weiteres Problem war, daß die Instabilitäten bei der Massenextraktion zu großen Fluktuationen in den Zeitreihen der Korrelationsfunktionen geführt haben, wodurch die Fehler der extrahierten Massen sehr groß wurden. Es konnte nicht ermittelt werden, wie diese Instabilitäten (außer durch Einführung einer Fermionenmasse) vermieden werden können.

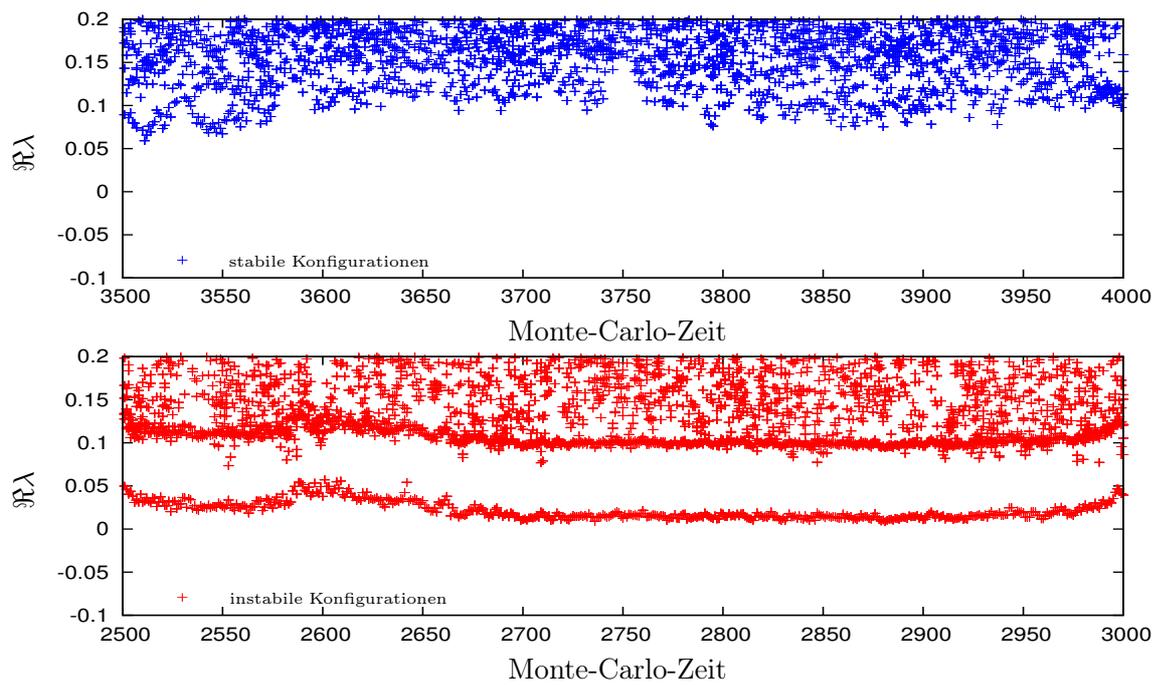


Abbildung 6.18: Vergleich der Realteile des Spektrums in der Nähe der Null in einem stabilen und einem instabilen Bereich der Monte-Carlo-Simulation über der Monte-Carlo-Zeit aufgetragen

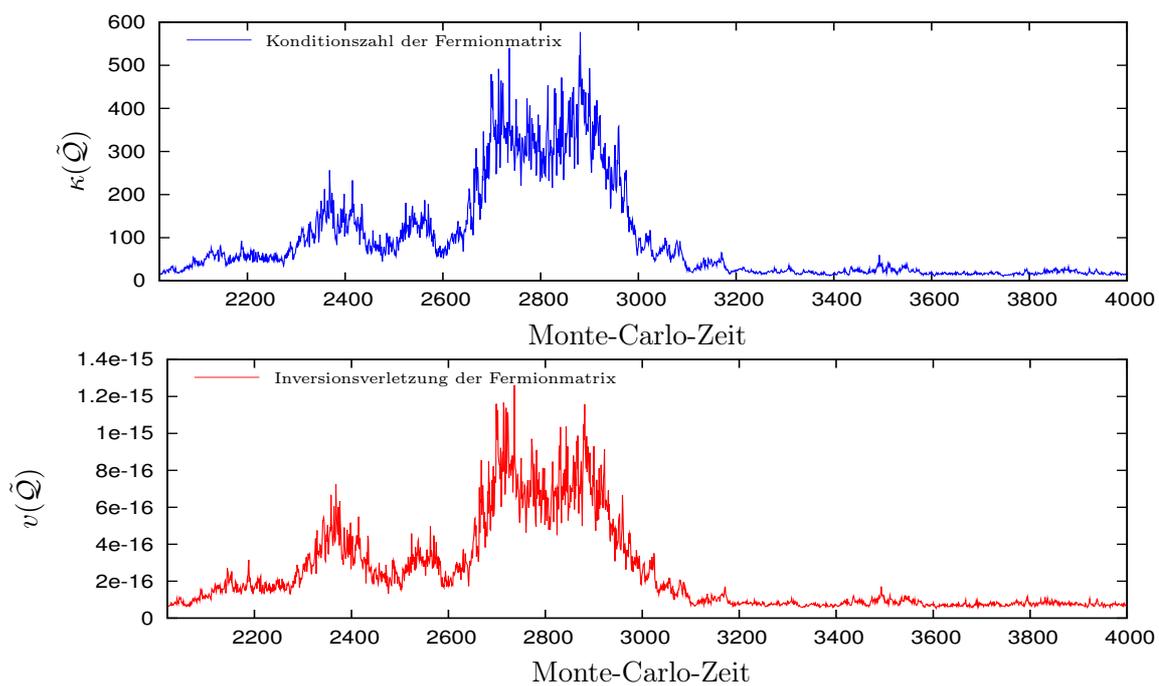


Abbildung 6.19: Inversionsverletzung $v(\tilde{Q})$ der Fermionenmatrix und Konditionszahl $\kappa(\tilde{Q})$ über der Monte-Carlo-Zeit aufgetragen

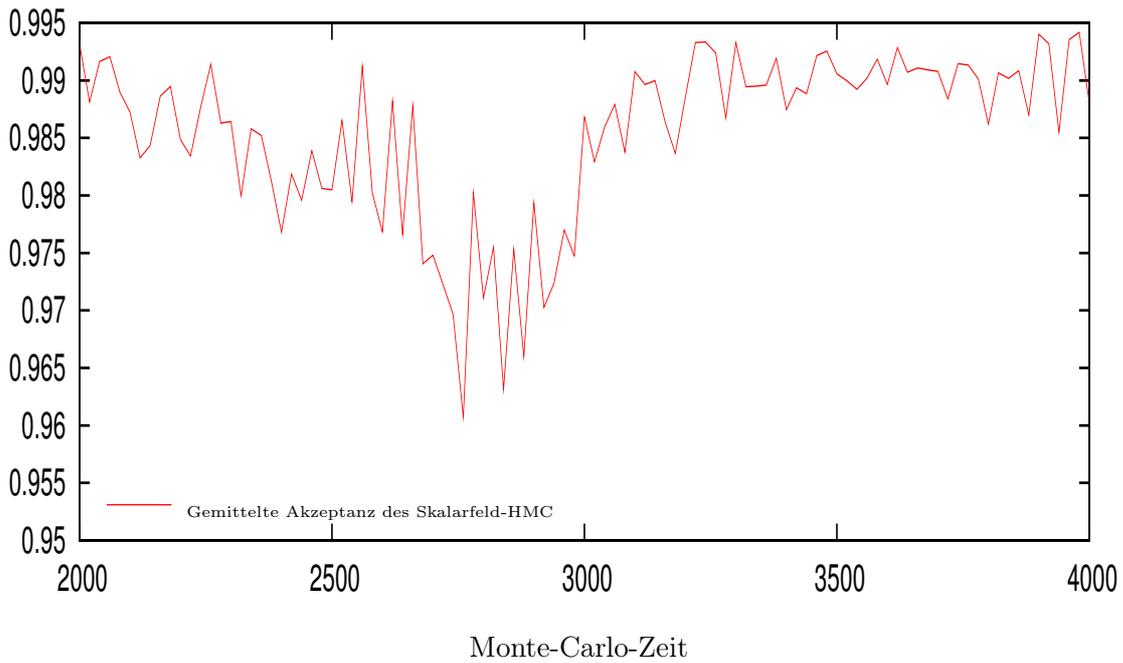
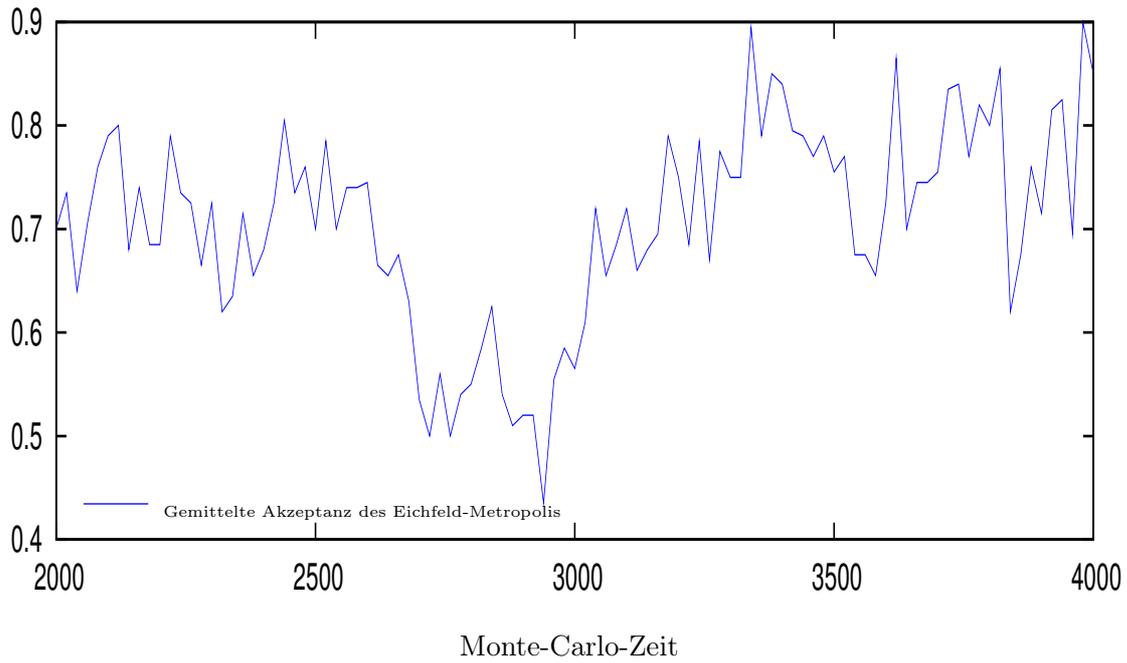


Abbildung 6.20: Gemitteltetes $\max\{\exp(-\Delta H), 1\}$ bei Skalarfeld und gemittelte Akzeptanzrate nach 10 Versuchen für Eichfeld in der Umgebung einer Instabilität über der Monte-Carlo-Zeit aufgetragen (Mittelung bedeutet: über einen Block von 30 Konfigurationen gemittelt)

6.3.3 Vergleich bosonische und volle $SU(4)$ -Theorie mit Fermionen

Nachdem im letzten Abschnitt die Instabilitäten analysiert wurden, die durch die fermionischen Freiheitsgrade eingeführt worden sind, werden trotzdem einige Ergebnisse der $SU(4)$ -Theorie mit Fermionen präsentiert. Diese konnte auf einem Gitter mit 5 Gitterpunkten gerade noch bei vernünftigem Zeitaufwand simuliert werden. Zuerst werden hier die Thermalisierungen in Abhängigkeit von β angegeben und dargestellt, welche Simulationen instabil waren.

β	Thermalisierung
0,2	keine (instabil)
0,3	25000
0,4	70000 (instabil)
0,5	25000
0,6	25000
0,7	25000 (instabil)
0,8	25000
0,9	25000
1,0	25000
1,1	40000
1,2	40000
1,3	25000 (instabil)

Tabelle 6.1: Thermalisierung und Instabilität verschiedener β in der vollen $SU(4)$ -Theorie

Der Eintrag „instabil“ in Tab. 6.1 bedeutet, daß so viele Instabilitäten aufgetreten sind, daß eine Mittelwertbildung nicht sinnvoll gewesen ist, da das System nicht thermalisiert war. Trotzdem wurde versucht, aus den Daten durch Wegschneiden der Instabilitäten am Anfang Mittelwerte zu bilden. Die Daten wurden für 10^5 Konfigurationen mit der oben angegebenen Thermalisierung erzeugt. Bei $\beta = 0,2$ war das System auch nach 10^5 Konfigurationen nicht thermalisiert, daher wurde der Mittelwert nicht mit angegeben.

In Abb. 6.21 ist zu sehen, daß für kleinere β tendenziell weniger Instabilitäten auftreten. Dies ist damit zu erklären, daß der Faktor α_L durch die Reskalierung der Fermionfelder (5.71),(5.72) aus dem fermionischen Teil der Wirkung herausgefallen ist. Dadurch überwiegt für kleine β , was, je nach Gittergröße, großen α_L entspricht, die Dynamik der Bosonen, die bei weitem nicht so langreichweitig korreliert sind, wie die Fermionendeterminante.

Die Abb. 6.22 zeigt den Vergleich des Erwartungswertes der Spur des *Polyakov-Loops* für die rein bosonische und die Yukawa-gekoppelte Theorie. Man sieht, daß die Werte bei den β , die in Tab. 6.1 als „instabil“ markiert wurden, große Abweichungen vom erwarteten Verlauf der Kurve aufweisen. Grundsätzlich kann man durch die geringe Zahl an Meßpunkten und die großen Fehlerbalken nur sagen, daß der Verlauf der Kurve bei verschiedenen β von der Monotonie her der gleiche ist. Ob die Abweichungen am Anfang und Ende der Kurve aber Effekte sind, die durch die Fermionen eingeführt werden, oder aufgrund der Mittelwertbildung bei Auftreten von Instabilitäten derart von der bosonischen Theorie abweichen, darüber kann anhand dieser Daten keine Aussage getroffen werden.

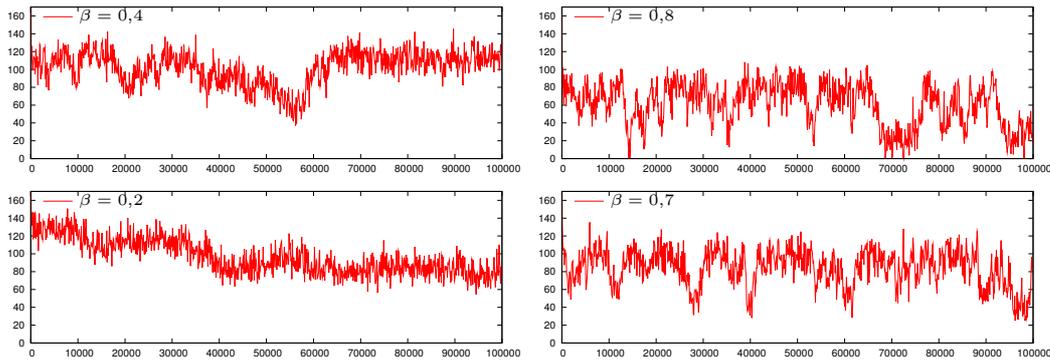


Abbildung 6.21: Vergleich der effektiven Wirkung der als „instabil“ markierten Simulationen für verschiedene β über der Monte-Carlo-Zeit aufgetragen

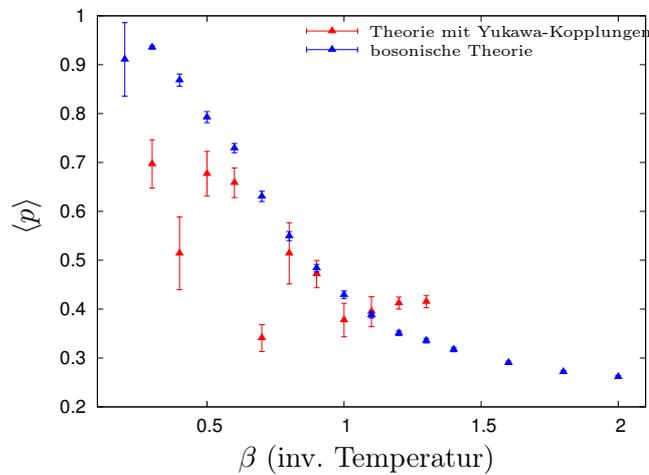


Abbildung 6.22: Vergleich von $\langle p \rangle$ der bosonischen und der Yukawa-gekoppelten Theorie für verschiedene β

6.4 Supersymmetrie einer $SU(2)$ -Theorie

Trotz der oben angesprochenen Instabilitäten wurde versucht, die Massenverhältnisse der bosonischen und fermionischen Freiheitsgrade zu extrahieren und so einen Anhaltspunkt für eine eventuell realisierte Supersymmetrie zu haben. Dazu wurde bei festgehaltenem $\beta = 8$ der Kontinuumslikes einer $SU(2)$ -Theorie für immer größere Gitter durchgeführt und die Massen bzw. das Verhältnis m_B/m_F gemessen, welches mit dem physikalischen Verhältnis übereinstimmt, da sich die Gitterkonstanten herauskürzen. Die $SU(2)$ -Eichgruppe wurde gewählt, weil die Fermionenberechnungen sehr zeitaufwendig sind.

In Abb. 6.23 sieht man, daß die Massen zwar prinzipiell einen linearen Verlauf nehmen, aber ab $L^{-1} \approx 0,04$ das Produkt $m L \approx 1$ wird und somit die relevanten Längen nicht mehr auf das Gitter „passen“. Die Fortsetzung ins Kontinuum ist damit in dieser Art nicht möglich gewesen. Auch ein größeres β (für stärkere Kopplung, also größere dynamische Massen) und mehr

Statistik führten zu keinen Verbesserungen, da bei diesen Simulationen mehr Instabilitäten auftraten und die Mittelwertbildung nicht mehr sinnvoll gewesen ist.

Mit den Daten aus Abb. 6.23 wurden in Abb. 6.24 die Massenverhältnisse und die subtrahierte bosonische Wirkung aufgetragen. Letztere sollte laut [CW07] im Kontinuumsimes gegen Null gehen und somit anzeigen, daß die Simulation die Supersymmetrie respektiert, weil sie einem Verschwinden der Grundzustandsenergie entspricht. Allerdings sieht man, daß die subtrahierte bosonische Wirkung zwar recht nah an der Null liegt, aber dennoch nicht um die Null herum streut, sondern die positiven Werte bevorzugt auftreten. In [CW07, S. 25, Abb. 5] werden auch Kontinuumsextrapolationen von $\langle s_B \rangle$ dargestellt, wobei durchgängig $\langle s_B \rangle < 0$ ist. Die Abweichungen liegen jedoch in derselben Größenordnung wie in dem hier dargestellten Graphen.

Auch die Massenverhältnisse streuen sehr stark um die Eins herum, weshalb man aus diesen Daten noch nicht schlußfolgern kann, daß die hier simulierte Gittertheorie supersymmetrisch ist. Beide Größen wurden aufgrund der oben genannten Schwierigkeiten nur bis zu $L \approx 25$ ($L^{-1} \approx 0,04$) aufgetragen.

Bei allen, mit Fermionen durchgeführten Simulationen, wurde über eine Messung der Pfaffschen Determinante verifiziert, daß kein Vorzeichenproblem vorliegt. Die Vorzeichen-erwartungswerte waren alle exakt ± 1 . Dies kann laut [CW07] damit begründet werden, daß keiner der Eigenwerte der Fermionenmatrix (auch beim Auftreten von Instabilitäten) einen Nulldurchgang hat und für einen Wechsel des Vorzeichens der Pfaffschen Determinante die Determinante der Fermionenmatrix mindestens einmal Null sein muß.

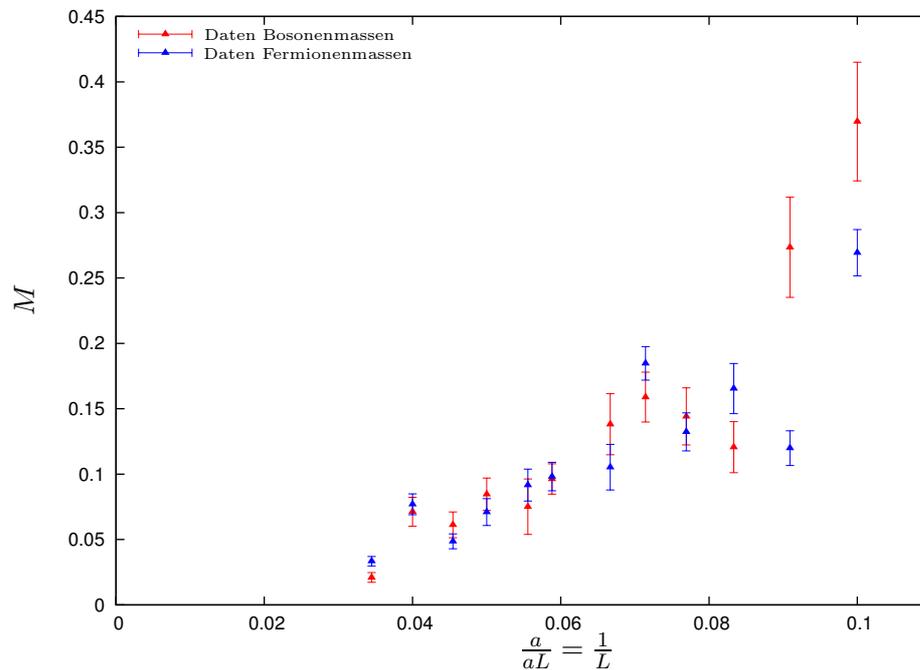


Abbildung 6.23: Bosonische und fermionische Gittermassen beim Übergang ins Kontinuum für $SU(2)$ -Eichtheorie (10^4 Konfigurationen davon 10^3 Thermalisierung).

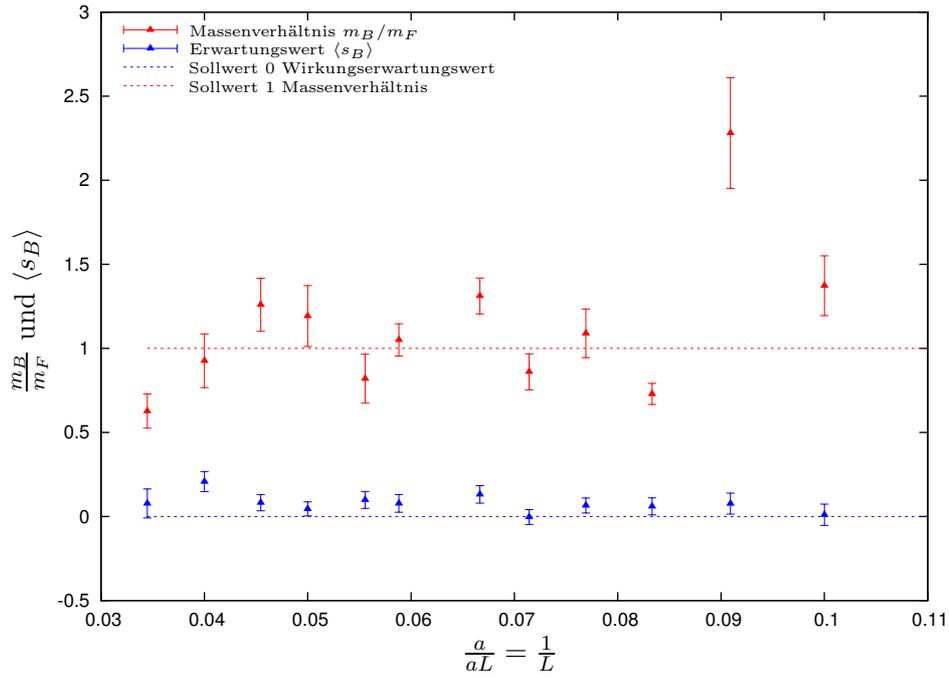


Abbildung 6.24: Dokumentation der Massenverhältnisse und bosonischen subtrahierten Wirkungserwartungswerte im Kontinuumslimites für $SU(2)$ -Eichtheorie (10^4 Konfigurationen davon 10^3 Thermalisierung).

7 Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde eine auf eine Dimension kompaktifizierte, vierdimensionale $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie untersucht. Nach der Kompaktifizierung wurde zum Zweck der Simulation eine Wickrotation durchgeführt. Dabei wurde analytisch untersucht, wie sich die Majorana-Fermionen der ursprünglichen Minkowski-Theorie in eine euklidische Theorie übertragen.

Weiterhin wurden analytisch Wirkungserwartungswerte, Eigenwertspektren der freien Gitteroperatoren und die Kräfte des Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus berechnet. Zusätzlich wurde eine Ein-Schleifen-Näherung der rein bosonischen und der vollen Theorie angegeben, in der gezeigt wird, daß die behandelten kompaktifizierten Theorien keine Infrarotdivergenzen aufweisen.

Im numerischen Abschnitt wurden zunächst die berechneten Wirkungserwartungswerte und die Nullmodenzahlen der jeweiligen freien Gitteroperatoren verifiziert. Dabei zeigte sich, daß dies für den eichfixierten Fall nur schwer möglich ist.

Die Massenextraktion wurde anhand einer freien Theorie mit Eichfeld und ohne Eichfeld im bosonischen und fermionischen Sektor verglichen. Dieser Vergleich wurde anhand einer Kontinuumsextrapolation durchgeführt und lieferte innerhalb der Fehlertoleranz die erwarteten Werte (bis auf das $L = 40$ Gitter im bosonischen Sektor). Im Rahmen dieser Kontinuumsextrapolation ist gezeigt worden, daß das Eichfeld auf die Masse der Kompaktifizierungsskalare keinen Einfluß hat. Bei den Massen der Fermionen hingegen, führte es zu tendenziell größeren Werten.

Über die Darstellung von Kreuzkorrelatoren und Selbstkorrelatoren wurde geprüft, ob Fermionen und Bosonen verschiedener *Flavours* und Kompaktifizierungsrichtungen untereinander in Wechselwirkung treten. Dies wurde sowohl in der freien Theorie als auch in der wechselwirkenden bosonischen Theorie ohne Eichfeld untersucht. In allen vorgenannten Fällen ergab sich, daß zwischen verschiedenen Fermionen-*Flavours* und verschiedenen Kompaktifizierungsskalaren keine Wechselwirkungen bestehen.

Durch eine Massenextraktion der Kompaktifizierungsskalare der vollen bosonischen Theorie mit Eichfeld ergab sich, daß $\beta = \text{const}$ einen definierten Kontinuumslikes und einen definierten 't Hooft-Limes durchzuführen gestattet. Die extrahierten Massen waren im Rahmen der Fehlertoleranz N_c -unabhängig und zeigten eine lineare Abhängigkeit von β bzw. $1/L \sim a$.

In der rein bosonischen Theorie wurde der 't Hooft-Limes bis $N_c = 10$ durchgeführt. Dabei wurde untersucht, wie sich die Erwartungswerte der subtrahierten Wirkung $\langle s_B \rangle$, des Betrags der Spur des *Polyakov-Loops* $\langle p \rangle$ und die mit N_c^2 skalierte Suszeptibilität von p , $N_c^2 \Sigma_p$, in Abhängigkeit von β verhalten. Es wurde festgestellt, daß $\langle s_B \rangle$ für $\beta < \beta_c \approx 0,8 \pm 0,1$ nahezu konstant wird und für $\beta > \beta_c$ eine lineare Abhängigkeit von β zeigt. Dies zeigte sich nur bei hinreichend großen Eichgruppen mit $N_c \geq 5$. Weiterhin wurde deutlich, daß sich $\langle p \rangle$ für $\beta < \beta_c$ immer mehr dem Wert Eins nähert und für $\beta > \beta_c$ gegen den Wert eines haarmaßverteilten

Polyakov-Loops strebt und mit N_c an der Stelle $\beta \approx \beta_c$ das Sprungverhalten von $\langle p \rangle$ zunahm. Dies spiegelte sich auch in der Suszeptibilität wieder, die, nachdem sie mit N_c^2 skaliert worden war, an der entsprechenden Stelle immer höhere Werte annahm. Diese Indizien sprechen für den in der Literatur [CW07, A⁺06] postulierten Phasenübergang erster Art an der Stelle $\beta \approx \beta_c$ im 't Hooft-Limes $N_c \rightarrow \infty$.

Da die volle Theorie mit Fermionen in der Zeitreihe der effektiven Wirkung Instabilitäten aufwies, wurden auch diese im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersucht. Dabei sollten Implementierungsfehler ausgeschlossen werden. Dies geschah dadurch, daß für die freie Theorie das analytisch bekannte Spektrum des Gitter-Dirac-Operators mit dem Spektrum aus der Simulation verglichen wurde. Beide stimmten überein.

Weiterhin wurde der Gitter-Dirac-Operator der vollen Theorie sowohl mit „C++“ als auch mit „Octave“ für gewisse Werte des Eichfeldes und der Kompaktifizierungsskalaren erzeugt und die Spektren miteinander verglichen. Diese waren gemäß einer graphischen Analyse gleich.

Zusätzlich wurde numerisch untersucht, wie sich das Spektrum des vollen Gitter-Dirac-Operators in der Umgebung einer Instabilität verhält und wie sich diese auf die Güte der Simulation auswirkt. Dabei zeigte sich, daß in der Nähe der Instabilität das Spektrum zu den Eigenwerten des freien Gitter-Dirac-Operators ohne Eichfeld getrieben wird und die Kompaktifizierungsskalare derart angepaßt werden, daß das Spektrum in der imaginären Richtung breiter wird. Dies führt in der Folge zu einer größeren Konditionszahl der Fermionen-Matrix und damit zu einer kleineren Akzeptanzrate sowohl im Eichfeld-Metropolis-Algorithmus als auch im Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus. Es war zu beobachten, daß die Instabilitäten bei kleineren β abnahmen.

Zur Untersuchung der Supersymmetrie wurde eine Kontinuumsextrapolation für die volle Theorie mit Fermionen durchgeführt. Diese war aufgrund der Instabilitäten im Fermionen-sektor äußerst fehlerbehaftet. Dabei wurden Massenverhältnisse m_B/m_F und subtrahierte Wirkungserwartungswerte $\langle s_B \rangle$ in Abhängigkeit von einer der Gitterkonstanten proportionalen Größe gemessen. Die Massenverhältnisse streuten stark um den Wert Eins herum und $\langle s_B \rangle$ war meist oberhalb des Wertes Null. Anhand dieser Messungen konnte nicht beurteilt werden, ob die betrachtete Gittertheorie im Kontinuum supersymmetrisch wird.

7.2 Ausblick

Im Zusammenhang mit der Fortführung der vorliegenden Arbeit sollten die in Abschnitt 4.3 aufgezeigten Probleme einer Lösung zugeführt werden.

Nach Ansicht des Verfassers sollte als nächstes untersucht werden, ob die beobachteten Instabilitäten von der spezifischen Implementierung der Fermionen herrühren. In [CW07] wurden grundsätzlich andere Algorithmen zur Simulation der Fermionen genutzt und keinerlei Hinweis auf Instabilitäten der beobachteten Art gegeben, trotz der Tatsache, daß dort genauso wie in der vorliegenden Arbeit Wilson-Fermionen genutzt werden.

Weiterhin zeigte sich im Laufe der Untersuchungen, daß der Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus, ebenso wie der Eichfeld-Metropolis-Algorithmus bei $N_c = 10$ nur noch mit sehr kleinen Schrittweiten funktioniert. Hier könnte nach Ansicht des Verfassers ein Integrator höherer Ordnung für den Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus abhelfen. Auch der Eichfeld-Metropolis-Algorithmus könnte durch einen lokalen Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus ersetzt werden.

Zusätzlich zu den algorithmischen Verbesserungen, die sich anbieten, muß die Geschwin-

digkeit der Algorithmen erheblich gesteigert werden. Das Ziel im Rahmen einer Niederenergieversion der M-Theorie sind nach wie vor Simulationen mit $N_c \rightarrow \infty$ in $D = 10$ kompaktifizierten Super-Yang-Mills-Theorien, welche schon für $N_c \rightarrow 32$ in [AHNT08] durchgeführt worden sind.

Ebenso denkbar ist eine Erweiterung auf eine mehrdimensionale Kompaktifizierung, um Aussagen über die Phasenstruktur von Eichtheorien auf Tori für $N_c \rightarrow \infty$ aus [AMM⁺04, A⁺06] zu verifizieren.

A Konventionen

A.1 Bezeichnungen

Zeichen	Funktion
\mathcal{G}	Lie-Gruppe
\mathfrak{g}	Lie-Algebra
λ_a, T_a	Lie-Algebra-Generatoren
P, T	Pfadordnung und Zeitordnung
N_c	Spaltenzahl der Matrizen der Eichgruppe $SU(N_c)$
R	physikalische Gitterlänge
R_{ab}	adjungierte Darstellungen von $SU(N_c)$ -Matrizen
L	Anzahl der Gitterpunkte
A	A_0 -Komponente des Eichfeldes
Φ_i	Kompaktifizierungsskalare
a	Gitterkonstante
κ	Hopping-Parameter
$g(D)$	Eichkopplung der D -dimensionalen Eichtheorie
β	dimensionslose inverse Temperatur
α, α_L	in der Gittertheorie eine effektive Kopplungsstärke
\mathcal{P}	<i>Polyakov-Loop</i>
p	mit $1/N_c$ skaliertes Betrag der Spur von \mathcal{P}
$S_{B,F}$	bosonische und fermionische Wirkungsanteile
s_B	subtrahierte bosonische Wirkung
$\mathfrak{M}(n \times m, \mathbb{K})$	Menge aller $n \times m$ -Matrizen über \mathbb{K}
a, b, c, \dots	Farbindizes
i, j, k, \dots	Durchnummerierung der Kompaktifizierungsskalare
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	Spinor-Indizes
x, y, z	Gitter-Indizes

Innerhalb dieser Arbeit kommt es trotz aller Bemühungen gelegentlich zu Symbolüberschneidungen, daher ist die Tabelle nur so zu verstehen, daß dies die üblichen Bezeichnungen sind.

A.2 Verschiedenes

- Neu eingeführte Begriffe werden **fett** gedruckt.
- Englische Fachbegriffe, für die es keine adäquate Übersetzung gibt, werden *kursiv* gedruckt.
- Metrik in der vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit ist $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

A Konventionen

- In dieser Arbeit werden $c = \hbar = k_B = 1$ gesetzt.
- Lie-Algebra-Generatoren sind immer als hermitesch aufzufassen.
- Normierung der Generatoren: $\text{tr } \lambda_a \lambda_b = 2\delta_{ab}$.
- Auch wenn die wickrotierte Zeitkoordinate üblicherweise mit τ bezeichnet wird, so werden die Gittergrößen dennoch weiter mit einem Index x für den x -ten Gitterpunkt versehen. In den Zweipunktsfunktionen wird aber weiterhin von einer Separation τ gesprochen.

B Numerische Tests

Dieser Abschnitt stellt die Ergebnisse verschiedener Tests der verwendeten Algorithmen dar. Dabei fällt das Spektrum des diskretisierten Dirac-Operators ein wenig aus dem Rahmen, da es sich nicht direkt um einen Algorithmestest handelt, sondern um einen Test zur Erzeugung der Fermionenmatrix.

B.1 Energieerhaltung Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus

Wie aus [DKPR87] bekannt ist, erzeugt man im Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus mit Hilfe einer hamiltonschen Integration neue Feldkonfigurationen. Eine fundamentale Eigenschaft eines hamiltonschen Systems, in dem die Hamiltonfunktion H nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Erhaltung der Energie

$$\Delta H = H(q(0), p(0)) - H(q(\tau), p(\tau)) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Eine Verletzung der Energieerhaltung kann nur als systematischer Fehler durch die Zeitdiskretisierung $\Delta\tau$ der Integration des hamiltonschen Systems zustande kommen. Dabei unterscheidet man, je nach Art der Energieerhaltungsverletzung, verschiedene Integrationsverfahren. Der in dieser Arbeit verwendete Leap-Frog-Algorithmus ist ein Integrator zweiter Ordnung in dem

$$\Delta H = \mathcal{O}(\Delta\tau^2) \quad (\text{B.2})$$

ist (siehe zum Beispiel [Rot92]).

In diesem Abschnitt soll es darum gehen, die Energieerhaltungsverletzungen ΔH für verschiedene Parameter der Simulation zu vergleichen. Dabei werden doppeltlogarithmische Skalen gewählt, in denen ΔH gegen $\Delta\tau$ aufgetragen, für hinreichend kleine $\Delta\tau$ eine Gerade mit dem Anstieg zwei ist. Der Achsenschnitt dieser Geraden ist ein Maß für die systematischen Fehler. Ein kleiner Achsenschnitt bedeutet, daß man generell größere $\Delta\tau$ wählen kann und damit bei gleicher Integrationslänge τ die Schrittzahl verkleinern kann.

Zunächst werden die Theorien mit zunehmendem Grad an Wechselwirkung (zuerst frei, dann mit Φ^4 -Wechselwirkung, dann mit Yukawa-Kopplung) und ohne Eichfeld, mit eichfixiertem Eichfeld und nichteichfixiertem Eichfeld getestet. Dann werden die vollen Theorien für zwei verschiedene N_c im eichfixierten Fall gegeneinander verglichen. Dies stellt einen der Haupttests des verwendeten Algorithmus dar, weil die Energieerhaltungsverletzung nur die angegebenen Eigenschaften besitzt, wenn die HMC-Kraft aus der Wirkung durch eine Ableitung nach den Feldvariablen hervorgeht. Die folgenden Tests wurden auf einem Gitter mit $L = 5$ Gitterpunkten und mit einer Kopplung von $\alpha_L = 1$ durchgeführt.

B.1.1 Energieerhaltungsverletzung für die freie bosonische Theorie mit künstlicher Masse für die Bosonen

Der einfachste Test ist der einer freien Theorie ohne Φ^4 -Wechselwirkung und ohne Fermionen wobei hier die künstliche bosonische Masse m_B auf einen Wert ungleich Null gesetzt ist, damit

Theorie / <i>Fit</i> -Daten	Anstieg	Achsenschnitt
mit Eichfeld ohne Eichfixierung	1,999999(5)	2,09950(3)
mit Eichfeld mit Eichfixierung	1,9992(3)	0,018(2)
ohne Eichfeld	2,00019(7)	1,9456(5)

Tabelle B.1: *Fit*-Daten für die freie Theorie mit Masse

die Felder keine Infrarotdivergenzen aufweisen.

Abb. B.1 und Tab. B.1 zeigen, daß die Theorie mit Eichfixierung wesentlich weniger systematische Fehler als die Theorie ohne Eichfixierung oder die Theorie ohne Eichfeld aufweist. Die künstliche bosonische Masse wurde auf den Wert $m_B = 0,5$ gesetzt.

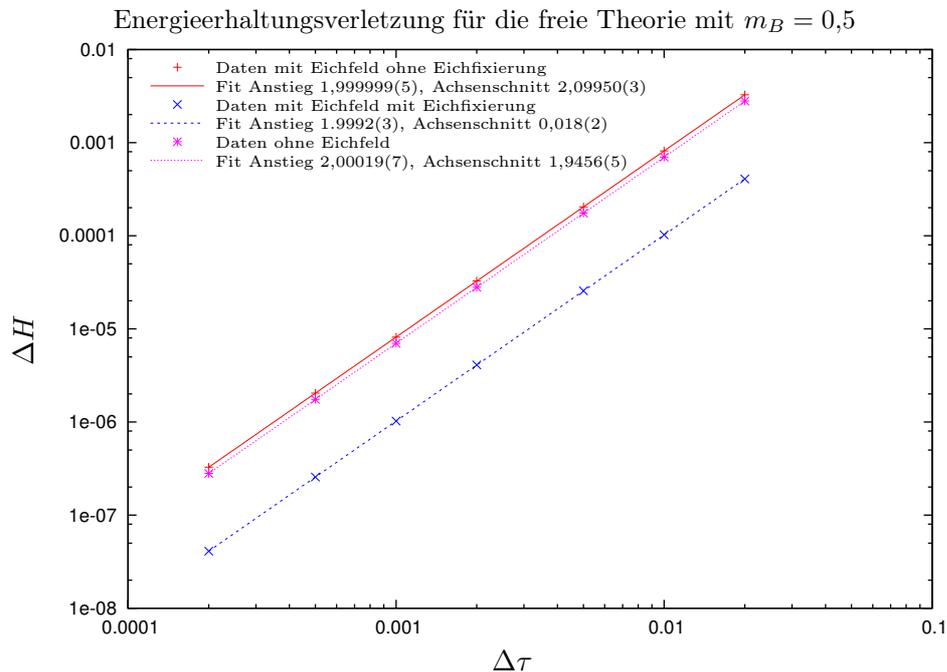


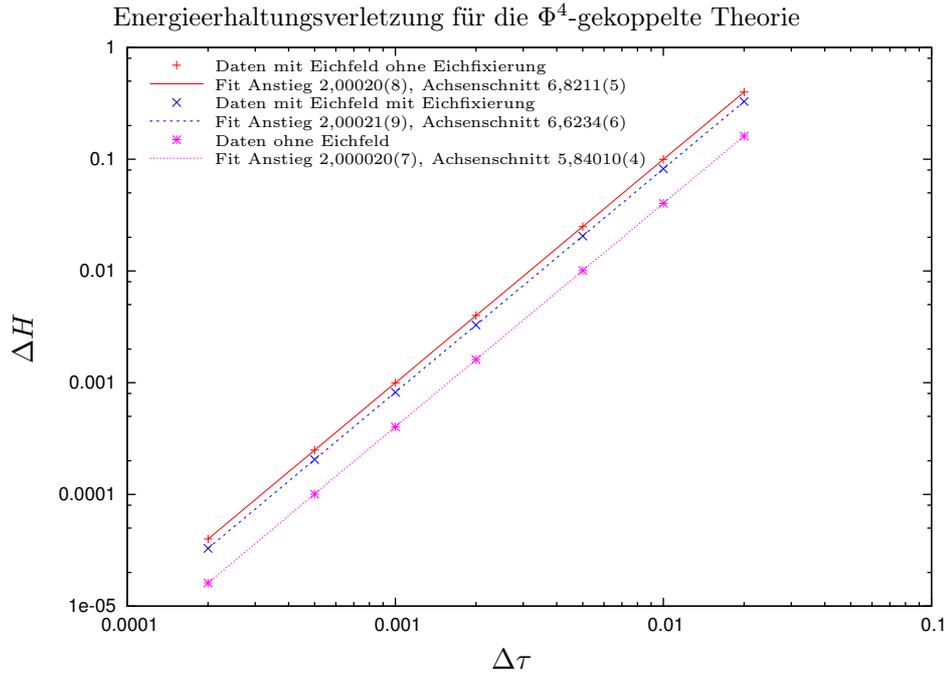
Abbildung B.1: Vergleich der Energieerhaltungsverletzungen für die freie Theorie mit künstlicher bosonischer Masse.

B.1.2 Energieerhaltungsverletzung für die Theorie mit Φ^4 -Wechselwirkung ohne künstliche Bosonenmasse

Nun wird die Φ^4 -Wechselwirkung hinzugenommen. Diese beseitigt zusätzlich die Infrarotdivergenzen wie man in Abschnitt 5.1.4 sieht.

In der bosonischen, wechselwirkenden Theorie gibt es gemäß Abb. B.2 und Tab. B.2 zwischen eichfixierter Theorie, nicht eichfixierter Theorie und Theorie ohne Eichfeld keine derart großen Diskrepanzen mehr, wie bei der freien Theorie. Allerdings sind die Achsenschnitte wesentlich größer als in der freien Theorie. Das bedeutet insbesondere, daß man kleinere $\Delta\tau$ wählen muß, um bei gleicher Schrittzahl eine vergleichbare Akzeptanzrate zu erhalten.

Theorie / <i>Fit</i> -Daten	Anstieg	Achsenschnitt
mit Eichfeld ohne Eichfixierung	2,00020(8)	6,8211(5)
mit Eichfeld mit Eichfixierung	2,00021(9)	6,6234(6)
ohne Eichfeld	2,000020(7)	5,84010(4)

 Tabelle B.2: *Fit*-Daten für die Φ^4 -Theorie ohne Masse

 Abbildung B.2: Vergleich der Energieerhaltungsverletzungen für die Theorie mit Φ^4 -Kopplung und ohne künstliche bosonische Masse.

B.1.3 Energieerhaltungsverletzung für die Theorie mit Φ^4 -Wechselwirkung und Fermionen mit Yukawa-Kopplung

In der wechselwirkenden Theorie mit Fermionen sind die Diskrepanzen zwischen der eichfixierten, der nicht eichfixierten und der eichfeldfreien Theorie ähnlich wie in der Theorie ohne Fermionen. Die Kopplung an die Fermionen vergrößert die Energieerhaltungsverletzung offenbar nicht viel mehr, wie man an den Achsenabschnitten und in Abb. B.3 und in Tab. B.3 sieht.

Theorie / <i>Fit</i> -Daten	Anstieg	Achsenschnitt
mit Eichfeld ohne Eichfixierung	2,00021(8)	6,9059(6)
mit Eichfeld mit Eichfixierung	2,0002(1)	6,7126(6)
ohne Eichfeld	2,00007(3)	5,9989(2)

Tabelle B.3: *Fit*-Daten für die Φ^4 -Theorie ohne Masse

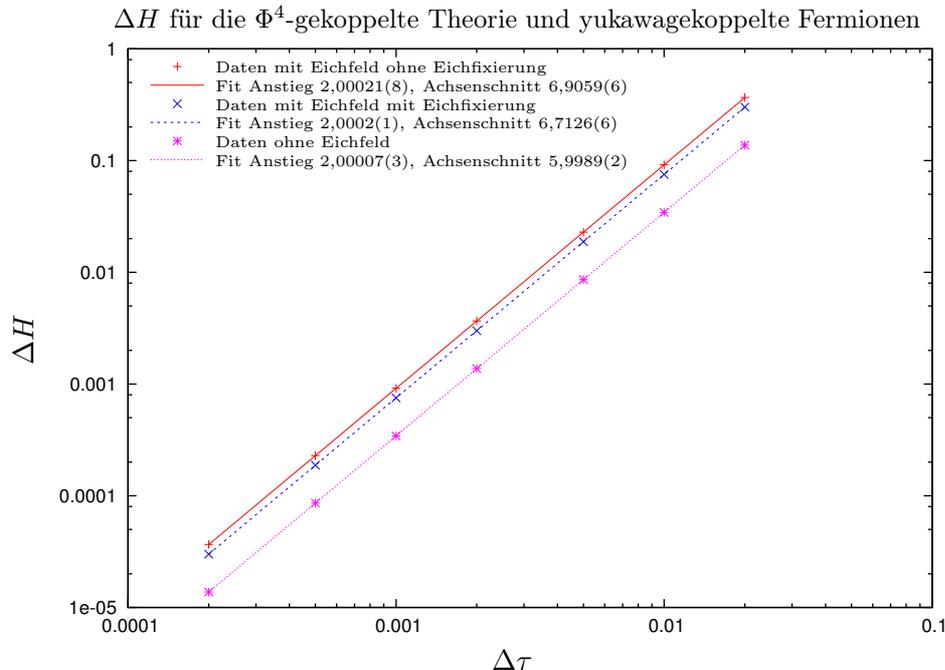


Abbildung B.3: Vergleich der Energieerhaltungsverletzungen für die Theorie mit Φ^4 - und Yukawa-Kopplung.

B.1.4 Vergleich der eichfixierten Theorie ohne Fermionen mit der eichfixierten Theorie mit Fermionen für $N_c = 3$, $N_c = 4$ und $N_c = 5$

In diesem Abschnitt wird die Energieerhaltungsverletzung für verschiedene N_c dargestellt um eine Aussage darüber zu treffen, wie sich die systematischen Fehler für größer werdende N_c verhalten.

Wie zu erwarten war, sind gemäß Abb. B.4 und Tab. B.4 die systematischen Fehler umso größer, je größer N_c wird. Das ist bei gleicher Gittergröße und gleicher Kopplung durch die höhere Anzahl an Freiheitsgraden zu erklären. Jedes der Kompaktifizierungsbosonen besitzt $N_c^2 - 1$ Komponenten, deren hamiltonsche Entwicklung numerischen Ungenauigkeiten unterworfen ist. Man sieht, daß durch die exakte Inversion der Fermionmatrix die Fermionen kaum einen Einfluß auf die systematischen Fehler haben. Dieser Einfluß sinkt sogar mit zunehmendem N_c , wie man den Differenzen der Achsenschnitte zwischen der Theorie ohne Fermionen und der Theorie mit Fermionen entnehmen kann.

Theorie / <i>Fit</i> -Daten	Anstieg	Achsenschnitt
$N_c = 3$, mit Fermionen	2,0002(1)	6,7126(6)
$N_c = 3$, ohne Fermionen	2,00021(9)	6,6234(6)
$N_c = 4$, mit Fermionen	2,0004(1)	8,3841(9)
$N_c = 4$, ohne Fermionen	2,0003(1)	8,3269(9)
$N_c = 5$, mit Fermionen	2,0003(1)	9,4693(9)
$N_c = 5$, ohne Fermionen	2,0003(1)	9,4386(9)

Tabelle B.4: *Fit*-Daten für die Φ^4 -Theorie ohne Masse mit Fermionen und ohne Fermionen, eichfixiert

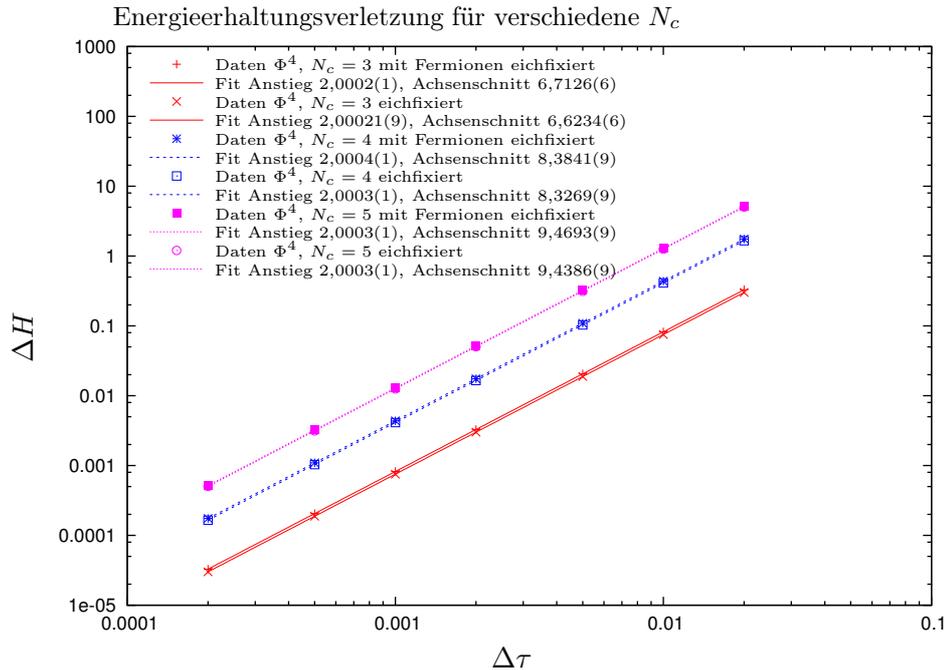


Abbildung B.4: Vergleich der systematischen Fehler der Theorien mit Φ^4 -Wechselwirkung der rein bosonischen Theorie und mit Yukawa-gekoppelten Fermionen bei eichfixiertem Eichfeld bei verschiedenen N_c .

B.2 Zeitreversibilität Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus

Da die Hamiltonfunktion nicht explizit zeitabhängig ist, kann man durch Ersetzen der Impulse $\vec{p}(\tau) \rightarrow -\vec{p}(\tau)$ und erneuter Ausführung der Integration die Phasenraumtrajektorien genau rückwärts durchlaufen. Wenn man dieselbe Zeitdiskretisierung $\Delta\tau$ und dieselbe Integrationslänge τ gewählt hat, sollte die Phasenraumtrajektorie nach erfolgter Integration wieder am Ausgangspunkt ankommen, was man beispielsweise durch Aufsummation der quadratischen Abweichungen der einzelnen Orts- und Impulskomponenten testen kann.

Diese Summe sollte im Rahmen der Gleitkommagenauigkeit verschwinden. Der Zeitreversi-

bilitätstest ist allerdings nur dazu geeignet, zu testen, ob der Integrationsalgorithmus richtig implementiert wurde. Das Ergebnis hängt nicht davon ab, ob Potential und Kraft „zueinander passen“. Der hier verwendete Leap-Frog-Algorithmus ist zeitreversibel, somit ist dieser Test ein Implementierungstest. In sämtlichen in Abschnitt B.1 durchgeführten numerischen Tests waren die Größen

$$|\bar{q}(0) - \bar{q}(2\tau)| = \sqrt{\sum_i (q_i(0) - q_i(2\tau))^2} \leq 10^{-13}$$

$$|\bar{p}(0) + \bar{p}(2\tau)| = \sqrt{\sum_i (p_i(0) + p_i(2\tau))^2} \leq 10^{-13}$$

wobei τ diejenige Zeit ist, nach der ein Integrationsschritt beendet war und $p_i(\tau) \rightarrow -p_i(\tau)$ durchgeführt wurde. Die Schrittzahl für die Reversibilitätstests war $\tau/\Delta\tau = 100$.

B.3 Haarmaßverteilung für freien Eichfeld-Metropolis-Algorithmus

Desweiteren muß der in der Simulation verwendete Metropolis-Algorithmus für die Linkvariablen des Eichfeldes getestet werden. Aufgrund der Struktur des Algorithmus sollte nach hinreichend vielen Schritten und mit geeignet eingestellten Parametern, die Verteilung der Matrizen die man aus diesem Algorithmus bekommt, der Haarmaßverteilung beliebig ähnlich werden. Sind die Matrizen nach dem Haarmaß verteilt bedeutet dies, daß man sie gleichverteilt auf der Gruppe gezogen hat und damit durch einen Akzeptanzschritt zusätzlich noch eine Wirkung berücksichtigen kann.

Dazu wurden 10^7 Matrizen erzeugt und Real- beziehungsweise Imaginärteil für $SU(3)$ und Realteil für $SU(2)$ als Histogramm aufgetragen und mit dem (analytisch bekannten) Haarmaß verglichen. Weiterhin wurde der Erwartungswert $\langle |\text{tr} U| \rangle$ mit den für $SU(2)$ und $SU(3)$ bekannten analytischen Resultaten verglichen. Dieser Erwartungswert wurde deshalb gemessen, da er in Abschnitt 6.2.6 eine wichtige Rolle spielt. Für $SU(2)$ und $SU(3)$ wurden zusätzlich zu $\langle |\text{tr} U| \rangle$ noch einige andere Erwartungswerte analytisch berechnet und mit den numerischen Ergebnissen verglichen. Die analytischen Werte wurden in $SU(2)$ über ein einfaches Integral berechnet und in $SU(3)$ durch Abzählung der trivialen Darstellung in den zugehörigen Tensorprodukten mit Hilfe des Programms „LiE“.

B.3.1 $SU(2)$

Allgemein ist

$$\langle |\text{tr} U| \rangle = \frac{\int d\mu(U) |\text{tr} U|}{\int d\mu(U)} \quad (\text{B.3})$$

wobei $U = a_0 \mathbf{1} + ia_i \sigma_i \in SU(2)$ ist. Aus dieser Definition von U erhält man $\text{tr} U = 2a_0$. Um einen Erwartungswert von a_0 zu berechnen braucht man nur noch das reduzierte Haarmaß, welches sich bei $SU(2)$ zu

$$d\mu_{\text{red}}(U) = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \text{tr} U} d(\text{tr} U) = \sqrt{1 - a_0^2} da_0 \quad (\text{B.4})$$

ergibt. Das Integral im Nenner entspricht der Fläche eines Einheitshalbkreises und das Integral im Zähler ist elementar berechenbar zu

$$\begin{aligned} \int d\mu_{\text{red}}(U) |\text{tr } U| &= \int_{-1}^1 da_0 \sqrt{1 - a_0^2} 2|a_0| \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Damit ergibt sich

$$\langle |\text{tr } U| \rangle_{\text{analytisch}} = \frac{\int d\mu(U) |\text{tr } U|}{\int d\mu(U)} = \frac{8}{3\pi} \approx 0,848826 \tag{B.6}$$

und numerisch über den Eichfeld-Metropolis-Algorithmus

$$\langle |\text{tr } U| \rangle_{\text{Metropolis}} \approx 0,851 \pm 0,002.$$

Dabei wurde allerdings die Thermalisierung nicht berücksichtigt. Der Fehler ist mit einem Jackknife-Blocking von zwei Blöcken mit jeweils der Hälfte der Konfigurationen berechnet worden. Zum Vergleich und zum Test wurde dieser Erwartungswert auch mit Hilfe eines Cabbibo-Marinari-Wärmebad-Algorithmus ohne Boltzmannfaktor mit 10^7 Matrizen berechnet und es ergab sich

$$\langle |\text{tr } U| \rangle_{\text{Cabbibo-Marinari}} \approx 0,8487 \pm 0,0002.$$

Der Cabbibo-Marinari Algorithmus ist in der Simulation nie zum Einsatz gekommen, da in der hier betrachteten Theorie kein Wärmebadalgorithmus verwendbar war. Dies lag daran, daß die Wirkung in den Charakteren der Gruppe formulierbar sein muß, was in der hier simulierten Theorie nicht der Fall war.

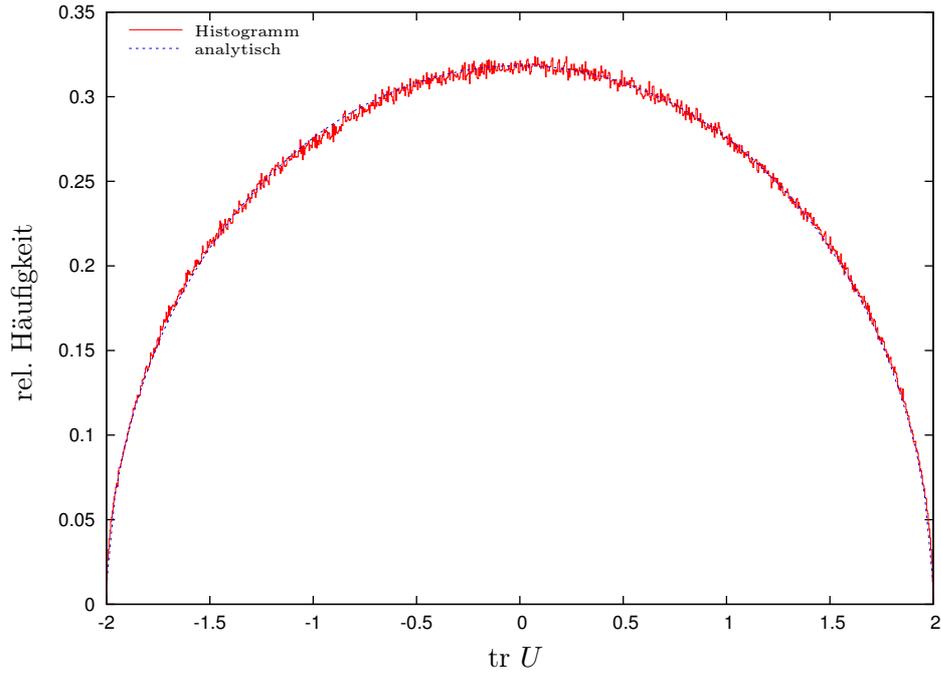


Abbildung B.5: Vergleich des Histogramms (1000 Histogrammbereiche) von $\text{tr } U$ mit der analytischen Funktion für das reduzierte Haarmaß für $SU(2)$

Man sieht in Abb. B.5, daß das reduzierte Haarmaß für $SU(2)$ durch den Eichfeld-Metropolis-Algorithmus sehr gut reproduziert wird.

Da es sich bei dem Erwartungswert $\langle \text{tr } U \rangle$ nur um einen einzigen Wert handelt und die Gruppe $SU(2)$ sehr einfach strukturiert ist, ist es sinnvoll, zusätzlich höhere Momente zu berechnen. Das Integral

$$\begin{aligned}
 \langle P^n \rangle &= \langle (\text{tr } U)^n \rangle = \frac{\int d\mu(U) (\text{tr } U)^n}{\int d\mu(U)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \int dP \sqrt{1 - \left(\frac{P}{2}\right)^2} P^n}{\frac{1}{2} \int dP \sqrt{1 - \left(\frac{P}{2}\right)^2}} \quad (\text{B.7})
 \end{aligned}$$

ergibt den analytischen Wert (Mathematica)

$$\langle P^n \rangle = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ \frac{2^n \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+4}{2})} & n \text{ gerade} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Zur Überprüfung werden hier einige analytische Werte und ihre numerischen Vergleichswerte angegeben.

n	$\langle P^n \rangle_{\text{analytisch}}$	$\langle P^n \rangle_{\text{numerisch}}$
0	1	1,0000000(2)
2	1	1,005(5)
4	2	2,02(2)
6	5	5,05(6)
8	14	14,2(2)
10	42	42,6(5)

Tabelle B.5: Analytische und numerische Momentenberechnungen mit 10^7 Matrizen für $SU(2)$

B.3.2 $SU(3)$

Für $SU(3)$ läßt sich das Integral (B.6) nicht mehr geschlossen lösen, also wurde es durch Mathematica mit Hilfe der in [UMW07] gegebenen erzeugenden Funktionen numerisch berechnet. Das Ergebnis war

$$\langle |\text{tr } U| \rangle_{\text{Mathematica}} \approx 0,891062. \quad (\text{B.9})$$

Zum Vergleich ergab sich beim Eichfeld-Metropolis-Algorithmus

$$\langle |\text{tr } U| \rangle_{\text{Metropolis}} = 0,894 \pm 0.001,$$

was nicht ganz mit den erwarteten Werten übereinstimmt. Für die Fehlerangabe gelten dieselben Aussagen, wie für den Erwartungswert in der $SU(2)$.

Der Cabbibo-Marinari-Wärmebad-Algorithmus (ohne Boltzmann-Faktor, $SU(2)$ Untermatrizen nach Haarmaß von $SU(2)$ verteilt, 10^7 Matrizen) ergab einen Wert von

$$\langle |\text{tr } U| \rangle_{\text{Cabbibo-Marinari}} = 0,8911 \pm 0,0002, \quad (\text{B.10})$$

welcher sich wesentlich besser mit dem analytischen Ergebnis deckt. Der Fehler ist genauso, wie für den Metropolis-Algorithmus bestimmt worden. In Abb. B.6 ist das analytische reduzierte Haarmaß und das Histogramm von Realteil und Imaginärteil des *Polyakov-Loops* aufgetragen und stimmt in guter Näherung miteinander überein.

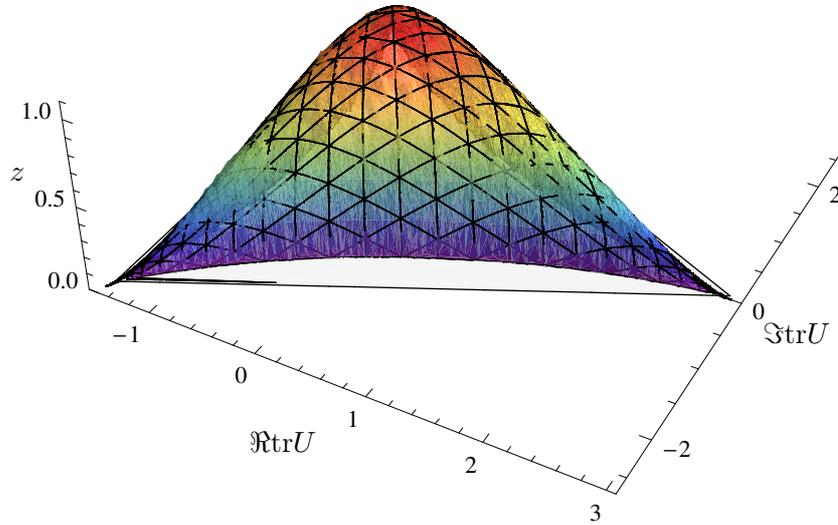


Abbildung B.6: Vergleich des Histogramms von $\text{tr} U$ mit der analytischen Funktion für das reduzierte Haarmaß für $SU(3)$. Das Gitternetz repräsentiert die analytisch bekannte Verteilung des Haarmaßes über den Charakteren und das Histogramm wird durch die farbige Fläche dargestellt (100×100 Histogrammbereiche). Die mittlere Abweichung pro Punkt zwischen analytischem Haarmaß und Histogramm ist $\approx 5 \cdot 10^{-3}$.

Um diese Aussage numerisch zu untermauern sind in Tabelle B.6 die Erwartungswerte verschiedener Momente der Charaktere der $SU(3)$ sowohl analytisch als auch numerisch angegeben. Die Tabelle beinhaltet für $SU(3)$ Kombinationen wie $P^k \bar{P}^k$, P^{3k} oder \bar{P}^{3k} , wobei $P = \chi_{10}$ und $\bar{P} = \chi_{01}$ ist. Die Erwartungswerte messen die Zahl der trivialen Darstellungen, in die ein entsprechendes Tensorprodukt zerfällt. Gemäß dem Programm „LiE“ ergaben sich folgende Ausreduktionen von Tensorprodukten von Darstellungen der $SU(3)$ zu

$$[1,0] \otimes [0,1] = 1 \cdot [0,0] \oplus 1 \cdot [1,1] \tag{B.11}$$

$$[1,0] \otimes [1,0] \otimes [0,1] \otimes [0,1] = 2 \cdot [0,0] \oplus 1 \cdot [0,3] \oplus 4 \cdot [1,1] \oplus 1 \cdot [2,2] \oplus 1 \cdot [3,0] \tag{B.12}$$

$$[1,0] \otimes [1,0] \otimes [1,0] \otimes [0,1] \otimes [0,1] \otimes [0,1] = 6 \cdot [0,0] \oplus 7 \cdot [0,3] \oplus 17 \cdot [1,1] \oplus 2 \cdot [1,4] \oplus 9 \cdot [2,2] \oplus 7 \cdot [3,0] \oplus 1 \cdot [3,3] \oplus 2 \cdot [4,1] \tag{B.13}$$

$$[1,0] \otimes [1,0] \otimes [1,0] = 1 \cdot [0,0] \oplus 2 \cdot [1,1] \oplus 1 \cdot [3,0] \tag{B.14}$$

$$[0,1] \otimes [0,1] \otimes [0,1] = 1 \cdot [0,0] \oplus 1 \cdot [0,3] \oplus 2 \cdot [1,1]. \tag{B.15}$$

Da $\dim[0,0] = 1$ ist, muß man sich nur die Koeffizienten vor diesen Darstellungen in der direkten Summe auf der rechten Seite anschauen und bekommt damit die Ergebnisse in

der Spalte „analytisch“ der Tabelle. Die zugehörigen Integrale zu berechnen, ist wesentlich aufwendiger, da die erzeugende Funktion der Momente eine sehr komplizierte Struktur hat.

Momente	analytisch	numerisch
$\langle PP \rangle$	1	1,010(3)
$\langle P^2 P^2 \rangle$	2	2,04(1)
$\langle P^3 P^3 \rangle$	6	6,19(5)
$\langle P^3 \rangle$	1	1,02(1)
$\langle P^3 \rangle$	1	1,02(1)

Tabelle B.6: Analytische und numerische Momentenberechnung mit 10^7 Matrizen für $SU(3)$

B.4 Spektrum des freien, diskretisierten Dirac-Operators

Ein weiterer Test für die ordnungsgemäße Implementierung ist der Vergleich des Spektrums des freien Dirac-Operators mit erwarteten Resultaten. Diese Resultate wurden in 5.2.3 hergeleitet und werden nun durch Abbildungen ergänzt, die von Testprogrammen innerhalb des Projekts (unabhängig voneinander sowohl in „octave“ als auch „C++“ durch den Verfasser implementiert) erzeugt wurden. Die Entartungsaufhebung des Spektrums durch das Eichfeld, die in Abb. B.7 gezeigt wird, stimmt mit dem erwarteten Resultat für $SU(3)$ überein. Gemäß (5.148) ist zu erwarten, daß für den Dirac-Operator mit Eichfeld $N_c(N_c - 1) = 6$ Eigenwerte (blau gekennzeichnete Kreuze) eine Entartungsaufhebung, symmetrisch zu den Eigenwerten des freien Dirac-Operators ohne Eichfeld (violett gekennzeichnete Quadrate) erfahren. Weiterhin ist zu erwarten, daß $N_c - 1 = 2$ Eigenwerte weiterhin mit den Eigenwerten des freien Dirac-Operators ohne Eichfeld übereinstimmen.

Bei Einführung einer Masse verringert sich der Hopping-Parameter (4.37). Damit ist für den freien Dirac-Operator ohne Eichfeld, mit Masse $m_F = 0,5$ das in Abb. B.7 gezeigte Spektrum (rot gekennzeichnete Kreuze) zu erwarten.

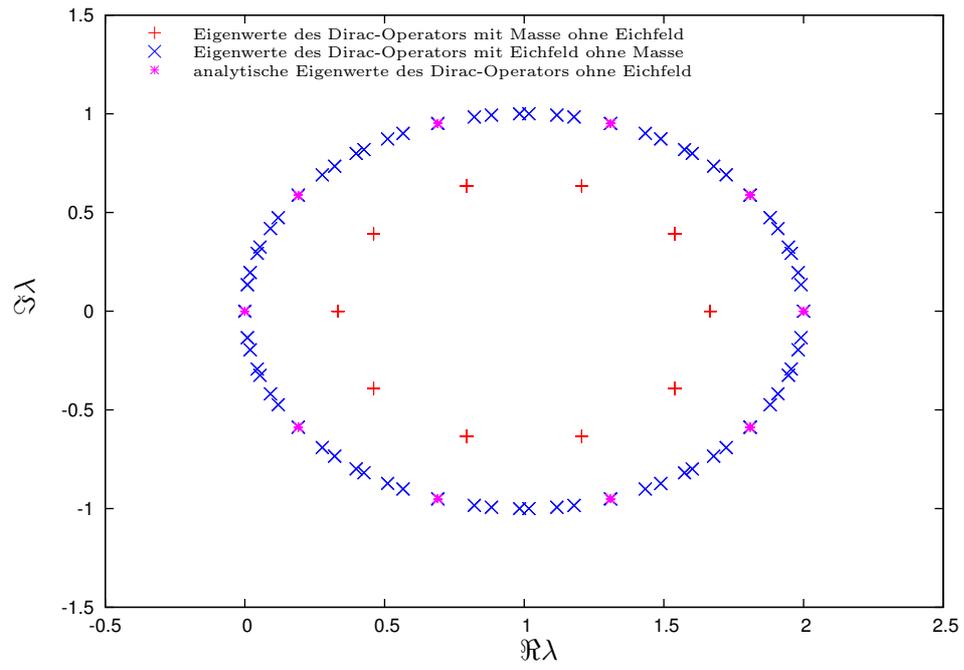


Abbildung B.7: Eigenwertstruktur des diskretisierten, freien Dirac-Operators

C Ein-Schleifen-Rechnungen der bosonischen Theorie

C.1 Semiklassische Entwicklung

Die bosonische Wirkung, der auf eine Dimension kompaktifizierten Yang-Mills-Theorie, ist gemäß (4.23) durch

$$\begin{aligned}
 S_B &= \frac{1}{2g^2} \int_0^R d\tau \left(\text{tr}(D\Phi_i)^2 - \frac{1}{2} \text{tr}[\Phi_i, \Phi_j] \right) \\
 &= \frac{1}{2g^2} \int_0^R d\tau \left(\text{tr}(\partial_\tau \Phi_i(\tau) - i(A(\tau)\Phi_i(\tau) - \Phi_i(\tau)A(\tau)))^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \text{tr}(\Phi_i(\tau)\Phi_j(\tau) - \Phi_j(\tau)\Phi_i(\tau))^2 \right) \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

gegeben. In der Ein-Schleifen-Näherung entwickelt man das Pfadintegral in Fluktuationen um den klassischen, konstanten Hintergrund. Dabei entfallen die Glieder erster Ordnung, da man um das klassische Minimum der Wirkung entwickelt. Nach der zweiten Ordnung bricht man die Entwicklung ab. Zusätzlich sollen die Fluktuationen keine Diagonaleinträge mehr besitzen.

$$A_{ab}(\tau) = A^a \delta_{ab} + \delta A_{ab}(\tau) \tag{C.2}$$

$$\Phi_{i,ab}(\tau) = \phi_i^a \delta_{ab} + \delta \phi_{i,ab}(\tau) \tag{C.3}$$

Man beachte, daß a und b fundamentale Indizes sind und nur von $1, \dots, N_c$ laufen. Dadurch, daß die A und Φ_i spurlos sind, muß $\sum_a A^a = 0$ und $\sum_a \phi_i^a = 0$ sein. Die Hermitizität fordert weiterhin

$$\delta A_{ab}(\tau) = \delta A_{ba}^*(\tau)$$

$$\delta \phi_{i,ab}(\tau) = \delta \phi_{i,ba}^*(\tau)$$

und $A^{a*} = A^a$ bzw. $\phi_i^{a*} = \phi_i^a$.

Um weitere Aussagen über die Fluktuationen treffen zu können, werden sie einer Fourier-Zerlegung

$$\delta A_{ab}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta A_{ab}^{(m)} e^{\frac{2\pi}{R} im\tau} \tag{C.4}$$

$$\delta \phi_{i,ab}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \phi_{i,ab}^{(m)} e^{\frac{2\pi}{R} im\tau} \tag{C.5}$$

unterworfen, wobei R den Umfang des Kreises darstellt, auf den die ursprüngliche Yang-Mills-Theorie kompaktifiziert wurde. Diese Moden-Zerlegung implementiert dann die periodischen Randbedingungen an die Felder. Auch hier kann man durch die Hermitizität von A und Φ_i Aussagen über die Entwicklungskoeffizienten treffen. Diese müssen die Identitäten

$$\delta A_{ab}^{(m)} = (\delta A_{ba}^{(-m)})^* \quad (\text{C.6})$$

$$\delta \phi_{i,ab}^{(m)} = (\delta \phi_{i,ba}^{(-m)})^* \quad (\text{C.7})$$

erfüllen.

Entwickelt man die Wirkung bis zur zweiten Ordnung der Fluktuationen, so ist sie durch

$$\begin{aligned} S^{\text{quadr}} &= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{ab} \left[\sum_i \left(R \partial_\tau \delta \phi_{i,ab}(\tau) - i \left(\Delta A^{ab} \delta \phi_{i,ab} - \Delta \phi_i^{ab} \delta A_{ab} \right) \right) \right. \\ &\times \left(R \partial_\tau \delta \phi_{i,ab}^*(\tau) + i \left(\Delta A^{ab} \delta \phi_{i,ab}^* - \Delta \phi_i^{ab} \delta A_{ab}^* \right) \right) \\ &\left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\Delta \phi_i^{ab} \delta \phi_{j,ab} - \Delta \phi_j^{ab} \delta \phi_{i,ab} \right) \left(\Delta \phi_i^{ab} \delta \phi_{j,ab}^* - \Delta \phi_j^{ab} \delta \phi_{i,ab}^* \right) \right] \quad (\text{C.8}) \end{aligned}$$

gegeben. Führt man nun wieder nach [CW07] (beachte anderes Vorzeichen in \mathcal{D} im Gegensatz zu [CW07] weil hier mit $D\phi_i = \partial\phi_i - i[A, \phi_i]$ gerechnet wird)

$$\delta A_{\mu,ab} = (\delta A_{ab}, \delta \phi_{i,ab}) \quad (\text{C.9})$$

$$\mathcal{D}_\mu^{ab} = (R \partial_\tau - i \Delta A^{ab}, -i \Delta \phi_i^{ab}) \quad (\text{C.10})$$

ein (auch hier macht der R -Faktor die Ableitung dimensionslos), dann ist

$$S^{\text{quadr}} = \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,\mu,\nu} \delta A_{\mu,ab}^* \mathcal{M}_{\mu\nu}^{ab} \delta A_{\nu,ab} \quad (\text{C.11})$$

$$\text{mit } \mathcal{M}_{\mu\nu}^{ab} = \mathcal{D}_\mu^{ab} \mathcal{D}_\nu^{ab} - \delta_{\mu\nu} \sum_\rho (\mathcal{D}_\rho^{ab})^2. \quad (\text{C.12})$$

Dies wird nun verifiziert. Ausgeschrieben ergibt (C.11)

$$\begin{aligned} S^{\text{quadr}} &= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b} \left(\delta A_{ab}^* \mathcal{M}_{00}^{ab} \delta A_{ab} \right. \\ &+ \sum_i \delta \phi_{i,ab}^* \mathcal{M}_{i0}^{ab} \delta A_{ab} \\ &+ \sum_i \delta A_{ab}^* \mathcal{M}_{0i}^{ab} \delta \phi_{i,ab} \\ &\left. + \sum_{i,j} \delta \phi_{i,ab}^* \mathcal{M}_{ij}^{ab} \delta \phi_{j,ab} \right). \quad (\text{C.13}) \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\mathcal{M}_{00}^{ab} = \mathcal{D}_0^{ab}\mathcal{D}_0^{ab} - \mathcal{D}_0^{ab}\mathcal{D}_0^{ab} - \sum_i \mathcal{D}_i^{ab}\mathcal{D}_i^{ab} = \sum_i \Delta\phi_i^{ab}\Delta\phi_i^{ab} \quad (\text{C.14})$$

$$\mathcal{M}_{0i}^{ab} = \mathcal{D}_0^{ab}\mathcal{D}_i^{ab} = -i\Delta\phi_i^{ab}\partial_\tau - \Delta A^{ab}\Delta\phi_i^{ab} \quad (\text{C.15})$$

$$\mathcal{M}_{i0}^{ab} = \mathcal{D}_i^{ab}\mathcal{D}_0^{ab} = -i\Delta\phi_i^{ab}\partial_\tau - \Delta A^{ab}\Delta\phi_i^{ab} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ij}^{ab} &= \mathcal{D}_i^{ab}\mathcal{D}_j^{ab} - \delta_{ij} \left((\mathcal{D}_0^{ab})^2 + \sum_k (\mathcal{D}_k^{ab})^2 \right) \\ &= -\Delta\phi_i^{ab}\Delta\phi_j^{ab} \\ &\quad - \delta_{ij} \left(R^2\partial_\tau^2 - 2i\Delta A^{ab}R\partial_\tau - \Delta A^{ab}\Delta A^{ab} - \sum_k \Delta\phi_k^{ab}\Delta\phi_k^{ab} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Schreibt man nun die Wirkung wie oben angegeben auf, erhält man

$$\begin{aligned} S^{\text{quadr}} &= \frac{1}{2g^2R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b} \left[\sum_i \left(\delta A_{ab}^* \Delta\phi_i^{ab} \Delta\phi_i^{ab} \delta A_{ab} - iR\delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_i^{ab} \partial_\tau \delta A_{ab} \right. \right. \\ &\quad - \delta\phi_{i,ab}^* \Delta A^{ab} \Delta\phi_i^{ab} \delta A_{ab} - \delta A_{ab}^* iR\Delta\phi_i^{ab} \partial_\tau \delta\phi_{i,ab} - \delta A_{ab}^* \Delta A^{ab} \Delta\phi_i^{ab} \delta\phi_{i,ab} \\ &\quad \left. \left. - \delta\phi_{i,ab}^* \left(R^2\partial_\tau^2 - 2iR\Delta A^{ab}\partial_\tau - \Delta A^{ab}\Delta A^{ab} - \sum_{k \neq i} \Delta\phi_k^{ab}\Delta\phi_k^{ab} \right) \delta\phi_{i,ab} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i \neq j} \delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_i^{ab} \Delta\phi_j^{ab} \delta\phi_{j,ab} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Zunächst werden in den kinetischen Termen das zweite Glied, das sechste Glied und ein Teil des siebten Gliedes partiell integriert, damit die $\delta\phi_i$ und $\delta\phi_i^*$ gleichberechtigt in die Wirkung eingehen. Dabei verschwinden die Randterme, da die Fluktuationen genau wie die ursprünglichen Felder periodischen Randbedingungen unterliegen.

$$\begin{aligned} S^{\text{quadr}} &= \frac{1}{2g^2R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b} \left[\sum_i \left(\delta A_{ab}^* \Delta\phi_i^{ab} \Delta\phi_i^{ab} \delta A_{ab} + iR\partial_\tau \delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_i^{ab} \delta A_{ab} \right. \right. \\ &\quad - \delta\phi_{i,ab}^* \Delta A^{ab} \Delta\phi_i^{ab} \delta A_{ab} - \delta A_{ab}^* iR\Delta\phi_i^{ab} \partial_\tau \delta\phi_{i,ab} - \delta A_{ab}^* \Delta A^{ab} \Delta\phi_i^{ab} \delta\phi_{i,ab} \\ &\quad + \delta\phi_{i,ab}^* \Delta A^{ab} \Delta A^{ab} \delta\phi_{i,ab} + R^2\partial_\tau \delta\phi_{i,ab}^* \partial_\tau \delta\phi_{i,ab} + \delta\phi_{i,ab}^* iR\Delta A^{ab} \partial_\tau \delta\phi_{i,ab} \\ &\quad \left. \left. - \delta\phi_{i,ab}^* iR\Delta A^{ab} \partial_\tau \delta\phi_{i,ab}^* \right) - \sum_{i \neq j} \delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_i^{ab} \Delta\phi_j^{ab} \delta\phi_{j,ab} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \neq i} \delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_k^{ab} \Delta\phi_k^{ab} \delta\phi_{i,ab} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Als nächstes werden die vorderen Terme wieder zu den kinetischen Termen zusammengefaßt und die hinteren Terme zu den Potentialtermen.

$$\begin{aligned}
S^{\text{quadr}} &= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b} \left[\sum_i \left(R\partial_\tau \delta\phi_{i,ab}^* \left(R\partial_\tau \delta\phi_{i,ab} + i\Delta\phi_i^{ab} \delta A_{ab} - \delta\phi_{i,ab} i\Delta A^{ab} \right) \right. \right. \\
&+ i\Delta A^{ab} \delta\phi_{i,ab}^* \left(R\partial_\tau \delta\phi_{i,ab} + i\Delta\phi_i^{ab} \delta A_{ab} - i\Delta A^{ab} \delta\phi_{i,ab} \right) \\
&- i\Delta\phi_i^{ab} \delta A_{ab}^* \left(R\partial_\tau \delta\phi_{i,ab} + i\Delta\phi_i^{ab} \delta A_{ab} - i\Delta A^{ab} \delta\phi_{i,ab} \right) \\
&\left. \left. - \sum_{i \neq j} \delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_i^{ab} \Delta\phi_j^{ab} \delta\phi_{j,ab} + \sum_{k \neq i} \delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_k^{ab} \Delta\phi_k^{ab} \delta\phi_{i,ab} \right] \quad (\text{C.20})
\end{aligned}$$

Die kinetischen Terme ergeben das erwartete Resultat. Auch der Potentialterm

$$\begin{aligned}
S_{\text{pot}}^{\text{quadr}} &= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b} \left[\sum_{i \neq j} (\delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_j^{ab} \Delta\phi_j^{ab} \delta\phi_{i,ab} - \delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_i^{ab} \Delta\phi_j^{ab} \delta\phi_{j,ab}) \right] \\
&= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b} \left[\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_j^{ab} \Delta\phi_j^{ab} \delta\phi_{i,ab} - \delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_i^{ab} \Delta\phi_j^{ab} \delta\phi_{j,ab} \right. \\
&+ \left. \delta\phi_{j,ab}^* \Delta\phi_i^{ab} \Delta\phi_i^{ab} \delta\phi_{j,ab} - \delta\phi_{j,ab}^* \Delta\phi_j^{ab} \Delta\phi_i^{ab} \delta\phi_{i,ab}) \right] \\
&= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b} \left[\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_j^{ab} (\Delta\phi_j^{ab} \delta\phi_{i,ab} - \Delta\phi_i^{ab} \delta\phi_{j,ab}) \right. \\
&- \left. \delta\phi_{j,ab}^* \Delta\phi_i^{ab} (\Delta\phi_j^{ab} \delta\phi_{i,ab} - \Delta\phi_i^{ab} \delta\phi_{j,ab}) \right] \quad (\text{C.21}) \\
&= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b} \left[\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\delta\phi_{i,ab}^* \Delta\phi_j^{ab} - \delta\phi_{j,ab}^* \Delta\phi_i^{ab}) (\Delta\phi_j^{ab} \delta\phi_{i,ab} - \Delta\phi_i^{ab} \delta\phi_{j,ab}) \right]
\end{aligned}$$

stimmt mit dem erwarteten Resultat überein.

C.2 Eichfixierung und Faddeev-Popov-Determinante

Noch wurde keine Eichung fixiert. Das bedeutet insbesondere, daß eichäquivalente Konfigurationen im Pfadintegral überzählt werden. Hier wird zuerst hergeleitet, welche Eichfreiheiten man hat und was dies für die Fluktuationsterme bedeutet. Aus den Eichtransformationen

$$A'_\mu(x) = \Omega^\dagger(x) A_\mu(x) \Omega(x) - i\Omega^\dagger(x) \partial_\mu \Omega(x) \quad (\text{C.22})$$

mit unitären Matrizen $\Omega(x) = e^{iR\lambda(x)}$, wobei $\lambda(x)$ hermitesch ist und die Dimension einer inversen Länge haben soll, ergeben sich die infinitesimalen Eichtransformationen wie folgt. In erster Näherung ist $\Omega(x) \approx \mathbb{1} + iR\lambda(x)$ und damit $\Omega^\dagger(x) = \mathbb{1} - iR\lambda(x)$. Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - iR[\lambda(x), A_\mu(x)] + R\partial_\mu \lambda(x) \\
&= A_\mu(x) + R D_\mu \lambda(x). \quad (\text{C.23})
\end{aligned}$$

Nun werden A_μ und A'_μ gemäß den obigen Konventionen in einen konstanten Diagonalteil und einen nichtkonstanten Nebendiagonalteil zerlegt. λ wird derselben Zerlegung unterworfen und man erhält

$$(A'^a_\mu - A^a_\mu)\delta_{ab} + \delta A'_{\mu,ab} - \delta A_{\mu,ab} = R\partial_\mu\delta\lambda_{ab} - i(\Delta A'^{ab}_\mu\delta\lambda_{ab} - \Delta\lambda^{ab}\delta A_{\mu,ab}). \quad (\text{C.24})$$

Die konstanten Anteile werden durch eine infinitesimale Eichtransformation nicht geändert, da auf der rechten Seite nur Nebendiagonalterme vorkommen. Damit gilt

$$A'^a_\mu = A^a_\mu. \quad (\text{C.25})$$

Weiterhin kann man unter dem Gesichtspunkt der Kompaktifizierung und mit $\mathcal{D}^{ab}_\mu = (R\partial_\tau - i\Delta A^{ab}, -i\Delta\phi_i^{ab})$ den Ausdruck zu

$$\delta A'_{\mu,ab} = \mathcal{D}^{ab}_\mu\delta\lambda_{ab} + (1 + i\Delta\lambda^{ab})\delta A_{\mu,ab} \quad (\text{C.26})$$

zusammenfassen. Für den konjugiert komplexen Ausdruck gilt dann

$$\delta A'^*_{\mu,ab} = \mathcal{D}^{ab}_\mu\delta\lambda^*_{ab} + (1 - i\Delta\lambda^{ab})\delta A^*_{\mu,ab} \quad (\text{C.27})$$

da $\Delta\lambda^{ab}$ reell ist. Setzt man dies nun in die Fluktuationswirkung ein, erhält man

$$\begin{aligned} S^{\text{quadr}} &= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,\mu,\nu} \delta A'^*_{\mu,ab} \mathcal{M}^{ab}_{\mu\nu} \delta A'_{\nu,ab} \\ &= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,\mu,\nu} \left(\mathcal{D}^{ab}_\mu\delta\lambda^*_{ab} + (1 - i\Delta\lambda^{ab})\delta A^*_{\mu,ab} \right) \mathcal{M}^{ab}_{\mu\nu} \\ &\quad \times \left(\mathcal{D}^{ab}_\nu\delta\lambda_{ab} + (1 + i\Delta\lambda^{ab})\delta A_{\nu,ab} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Terme mit $\mathcal{D}^{ab}_\mu\delta\lambda_{ab}$ bzw. $\mathcal{D}^{ab}_\mu\delta\lambda^*_{ab}$ verschwinden aufgrund von

$$\sum_\nu \mathcal{M}^{ab}_{\mu\nu} \mathcal{D}^{ab}_\nu = 0 \quad \forall a,b, \quad (\text{C.29})$$

was man einsieht, wenn man die Struktur von

$$\mathcal{M}^{ab}_{\mu\nu} = \mathcal{D}^{ab}_\mu \mathcal{D}^{ab}_\nu - \delta_{\mu\nu} \sum_\rho (\mathcal{D}^{ab}_\rho)^2 \quad (\text{C.30})$$

berücksichtigt. Die quadratischen Terme in $\Delta\lambda^{ab}$ kann man auch vernachlässigen, da $\Delta\lambda^{ab}$ Teil einer infinitesimalen Eichtransformation ist. Somit bleibt nur noch

$$\begin{aligned} S^{\text{quadr}} &= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,\mu,\nu} (1 - i\Delta\lambda^{ab}) \delta A^*_{\mu,ab} \mathcal{M}^{ab}_{\mu\nu} (1 + i\Delta\lambda^{ab}) \delta A_{\nu,ab} \\ &= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,\mu,\nu} (\delta A^*_{\mu,ab} \mathcal{M}^{ab}_{\mu\nu} \delta A_{\nu,ab} \\ &\quad + i\Delta\lambda^{ab} (\delta A^*_{\mu,ab} \mathcal{M}^{ab}_{\mu\nu} \delta A_{\nu,ab} - \delta A^*_{\mu,ab} \mathcal{M}^{ab}_{\mu\nu} \delta A_{\nu,ab})) \\ &= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,\mu,\nu} \delta A^*_{\mu,ab} \mathcal{M}^{ab}_{\mu\nu} \delta A_{\nu,ab}. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Daraus ist ersichtlich, daß (C.26) bzw. (C.27) eine gültige infinitesimale Eichtransformation der Fluktuationen darstellt, weil die Fluktuationenwirkung unter diesen invariant ist. Durch diese Eichfreiheit kann man eine Komponente der Fluktuationen (δA oder $\delta\Phi_i$) auf einen beliebigen Wert setzen. Hier wird als Eichung gemäß [CW07]

$$\delta A'_{ab}(\tau) = 0 \quad (\text{C.32})$$

gewählt. Dies entspricht konstanten, diagonalen Eichfeldern und damit einer Gleichverteilung von diagonalen Links auf dem Gitter und legt die Eichfixierungsfunktion der Faddeev-Popov-Prozedur als

$$G(\delta A) = \delta A_{ab}(\tau) \quad (\text{C.33})$$

fest. Eingesetzt ergibt sich

$$G(\delta A^{\delta\lambda}) = \delta A'_{ab} = \mathcal{D}_\tau^{ab} \delta\lambda_{ab} + (1 + i\Delta\lambda^{ab}) \delta A_{ab}. \quad (\text{C.34})$$

Variiert man diesen Ausdruck nach $\delta\lambda_{ab}$, erhält man

$$\frac{\delta G(\delta A^{\delta\lambda})}{\delta(\delta\lambda_{ab})} = \mathcal{D}_\tau^{ab} = R\partial_\tau - i\Delta A^{ab} \quad (\text{C.35})$$

der über den Logarithmus der Determinante in die Wirkung eingeht. Damit wird

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\delta A \mathcal{D}\delta\phi \mathcal{D}\delta\lambda \det\left(\frac{\delta G(\delta A^{\delta\lambda})}{\delta(\delta\lambda_{ab})}\right) \delta(G(\delta A^{\delta\lambda})) \\ & \times \exp\left(-\frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,\mu,\nu} \delta A_{\mu,ab}^* \mathcal{M}_{\mu\nu}^{ab} \delta A_{\mu,ab}\right) \\ & = \int \mathcal{D}\delta\phi \prod_{a,b} \det(\mathcal{D}_\tau^{ab}) \exp\left(-\frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,i,j} \delta\phi_{i,ab}^* \mathcal{M}_{ij}^{ab} \delta\phi_{j,ab}\right) \\ & = \int \mathcal{D}\delta\phi \exp\left(-\frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,i,j} \delta\phi_{i,ab}^* \mathcal{M}_{ij}^{ab} \delta\phi_{j,ab} + \sum_{a,b} \log|\det \mathcal{D}_\tau^{ab}|\right) \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

und für die effektive Wirkung auf Ein-Schleifen-Niveau

$$S_{\text{eff}}^{\text{quadr}} = \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,i,j} \delta\phi_{i,ab}^* \mathcal{M}_{ij}^{ab} \delta\phi_{j,ab} - \sum_{a,b} \log|\det \mathcal{D}_\tau^{ab}|. \quad (\text{C.37})$$

C.3 Ausintegration der Fluktuationen

Setzt man nun die Modenentwicklung von oben ein, erhält man

$$\begin{aligned}
 S^{\text{quadr}} &= \frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,i,j} \delta\phi_{i,ab}^* \mathcal{M}_{ij}^{ab} \delta\phi_{j,ab} \\
 &= \frac{1}{2g^2 R^2} \sum_{a,b,i,j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^R d\tau (\delta\phi_{i,ab}^{(m)})^* e^{-\frac{2\pi}{R}im\tau} \mathcal{M}_{ij}^{ab} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\phi_{j,ab}^{(n)} e^{\frac{2\pi}{R}in\tau} \\
 &= \frac{1}{2g^2 R^2} \sum_{a,b,i,j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta\phi_{i,ab}^{(m)})^* \mathcal{M}_{ij}^{ab} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\phi_{j,ab}^{(n)} \int_0^R d\tau e^{\frac{2\pi}{R}i(n-m)\tau} \\
 &= \frac{1}{2g^2 R^2} \sum_{a,b,i,j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta\phi_{i,ab}^{(m)})^* \mathcal{M}_{ij}^{ab(n)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\phi_{j,ab}^{(n)} R\delta_{nm} \\
 &= \frac{1}{2g^2 R^2} R \sum_{a,b,i,j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\delta\phi_{i,ab}^{(m)})^* \mathcal{M}_{ij}^{ab(m)} \delta\phi_{j,ab}^{(m)} \tag{C.38}
 \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^{ab(m)} = \mathcal{D}_{\mu}^{ab(m)} \mathcal{D}_{\nu}^{ab(m)} - \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho} (\mathcal{D}_{\rho}^{ab(m)})^2 \tag{C.39}$$

und

$$\mathcal{D}_{\mu}^{ab(m)} = \left(2\pi im - i\Delta A^{ab}, -i\Delta\phi_i^{ab} \right). \tag{C.40}$$

Um die Determinante von \mathcal{D}_{τ}^{ab} auszurechnen, benötigt man die Eigenwerte von \mathcal{D}_{τ}^{ab}

$$\mathcal{D}_{\tau}^{ab} \psi^{ab} = \lambda^{ab} \psi^{ab}. \tag{C.41}$$

Damit ergibt sich für die ψ^{ab} folgende Differentialgleichung

$$(R\partial_{\tau} - i\Delta A^{ab} - \lambda^{ab}) \psi^{ab} = 0 \tag{C.42}$$

Auch hier bietet sich eine Modenzerlegung, wie oben, an und man erhält

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(2\pi im - i\Delta A^{ab} - \lambda^{ab} \right) \psi^{ab(m)} = 0. \tag{C.43}$$

Diese Summe ist nur dann identisch Null, wenn

$$\lambda_{(m)}^{ab} = 2\pi im - i\Delta A^{ab} = \mathcal{D}_{\tau}^{ab(m)} \tag{C.44}$$

ist. Dabei gilt

$$\lambda_{(-m)}^{ab} = (\lambda_{(m)}^{ba})^*. \tag{C.45}$$

Die Determinante ist dann

$$\det \mathcal{D}_{\tau}^{ab} = \prod_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_{(m)}^{ab} = \prod_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_{\tau}^{ab(m)} \tag{C.46}$$

und der Logarithmus derselben

$$\log \left| \det \mathcal{D}_\tau^{ab} \right| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \left| \mathcal{D}_\tau^{ab(m)} \right|. \quad (\text{C.47})$$

Aus dem ganzen Produkt wird ein

$$\sum_{a,b} \log \left| \det \mathcal{D}_\tau^{ab} \right| = \sum_{a,b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \left| \mathcal{D}_\tau^{ab(m)} \right|. \quad (\text{C.48})$$

Nun muß man von der Matrix

$$\mathcal{M}_{ij}^{ab(m)} = \mathcal{D}_i^{ab(m)} \mathcal{D}_j^{ab(m)} - \delta_{ij} \sum_{\rho} (\mathcal{D}_\rho^{ab(m)})^2 \quad (\text{C.49})$$

die Eigenwerte berechnen. Dazu löst man die Eigenwertgleichung

$$\det(\mathcal{M}_{ij}^{ab(m)} - \lambda \delta_{ij}) = 0. \quad (\text{C.50})$$

Die Struktur von \mathcal{M} (Matrix- und Modenindex unterdrückt) ist

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -\mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0 - \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_3 \mathcal{D}_3 & \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_3 \\ \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 & -\mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0 - \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_3 \mathcal{D}_3 & \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_3 \\ \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_3 & \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_3 & -\mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0 - \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwertgleichung

$$\det(\mathcal{M} - \lambda \mathbb{1}) = 0 \quad (\text{C.51})$$

führt auf die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} -(\mathcal{D}_0^2 + \mathcal{D}_2^2 + \mathcal{D}_3^2 + \lambda) [(\mathcal{D}_0^2 + \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_3^2 + \lambda)(\mathcal{D}_0^2 + \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2 + \lambda) - (\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_3)^2] \\ + (\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2)^2 [(\mathcal{D}_0^2 + \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2 + \lambda) + \mathcal{D}_3^2] \\ + (\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_3)^2 [\mathcal{D}_2^2 + (\mathcal{D}_0^2 + \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_3^2 + \lambda)] = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

Diese hat die Nullstellen

$$\lambda = -\mathcal{D}_0^2 \quad (\text{C.53})$$

$$\lambda = -\sum_{\rho} \mathcal{D}_\rho^2 \text{ (2-fach)}. \quad (\text{C.54})$$

Also hat man für jede Mode und jede Farbe für $\mathcal{M}_{ij}^{ab(m)}$ folgende Eigenwerte

$$\lambda_1^{ab(m)} = -(\mathcal{D}_\tau^{ab(m)})^2 \quad (\text{C.55})$$

$$\lambda_{2/3}^{ab(m)} = -\sum_{\rho} (\mathcal{D}_\rho^{ab(m)})^2 \text{ (2-fach)}. \quad (\text{C.56})$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{D}\delta\phi e^{-S_{\text{quadr}}} &= \int \mathcal{D}\delta\phi \exp\left(-\frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,i,j} \delta\phi_{i,ab}^* \mathcal{M}_{ij}^{ab} \delta\phi_{j,ab}\right) \quad (\text{C.57}) \\
 &= \int \mathcal{D}\delta\phi \prod_{a,b} \exp\left(-\frac{1}{2g^2 R^2} \int_0^R d\tau \sum_{i,j} \delta\phi_{i,ab}^* \mathcal{M}_{ij}^{ab} \delta\phi_{j,ab}\right) \\
 &= \int \mathcal{D}\delta\phi^{(m)} \prod_{a,b} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2g^2 R^2} R \sum_{i,j} (\delta\phi_{i,ab}^{(m)})^* \mathcal{M}_{ij}^{ab(m)} \delta\phi_{j,ab}^{(m)}\right)
 \end{aligned}$$

Da die Integrationsfreiheitsgrade $\delta\phi_{i,ab}^{(m)}$ nicht alle unabhängig voneinander sind, darf man nur über die halbe Anzahl integrieren, sonst überzählt man. Das bedeutet insbesondere, daß

$$\mathcal{D}\delta\phi^{(m)} = \prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{a,b} \prod_i d\delta\phi_{i,ab}^{(m)} = \prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{a<b} \prod_i d\delta\phi_{i,ab}^{(m)} d\delta\phi_{i,ab}^{(m)*} \quad (\text{C.58})$$

ist. Durch die Einschränkung der Funktionalintegration muß auch die Summe in der Wirkung eingeschränkt werden, was sich in einem zusätzlichen Faktor 2 niederschlägt um den Wert der Wirkung nicht zu ändern. Da hier über Variablen und ihr konjugiert komplexes integriert wird, ergibt sich bis auf Vorfaktoren $1/\det \mathcal{M}$. Dies resultiert in

$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{D}\delta\phi e^{-S_{\text{quadr}}} &= \int \prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{a<b} \prod_i d\delta\phi_{i,ab}^{(m)} d\delta\phi_{i,ab}^{(m)*} \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{g^2 R} \sum_{a<b} \sum_{i,j} (\delta\phi_{i,ab}^{(m)})^* \mathcal{M}_{ij}^{ab(m)} \delta\phi_{j,ab}^{(m)}\right) \\
 &= \prod_{a<b} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\det\left(\frac{1}{g^2 R} \mathcal{M}^{ab(m)}\right)} \\
 &= \prod_{a<b} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\log \det\left(\frac{1}{g^2 R} \mathcal{M}^{ab(m)}\right)\right) \\
 &= \prod_{a<b} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\log \det\left(\mathcal{M}^{ab(m)}\right) + \text{const}\right) \\
 &= \exp\left(-\sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log\left(-(\mathcal{D}_{\tau}^{ab(m)})^2\right)\right) \\
 &\quad -2 \sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log\left(-\sum_{\rho} (\mathcal{D}_{\rho}^{ab(m)})^2\right), \quad (\text{C.59})
 \end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung mit Hilfe der Eigenwertstruktur von \mathcal{M} durchgeführt wurde. Da sämtliche $\mathcal{D}_{\rho}^{ab(m)}$ rein imaginär sind, ist

$$-(\mathcal{D}_{\rho}^{ab(m)})^2 = |\mathcal{D}_{\rho}^{ab(m)}|^2. \quad (\text{C.60})$$

.Zusammen mit dem Faddeev-Popov-Term ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\delta\phi \exp\left(-\frac{1}{2g^2 R} \int_0^R d\tau \sum_{a,b,i,j} \delta\phi_{i,ab}^* \mathcal{M}_{ij}^{ab} \delta\phi_{j,ab} + \sum_{a,b} \log \left| \det \mathcal{D}_\tau^{ab} \right| \right) \\ &= \exp\left(-\sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \left| \mathcal{D}_\tau^{ab(m)} \right|^2 - 2 \sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \sum_{\rho} \left| \mathcal{D}_\rho^{ab(m)} \right|^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{a,b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \left| \mathcal{D}_\tau^{ab(m)} \right| \right) \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

über $\sum_{a,b} \log \left| \mathcal{D}_\tau^{ab(m)} \right| = 2 \sum_{a<b} \log \left| \mathcal{D}_\tau^{ab(m)} \right| = \sum_{a<b} \log \left| \mathcal{D}_\tau^{ab(m)} \right|^2$, daß

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\delta\phi e^{-S^{\text{quadr}}} &= \exp\left(-\sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \left| \mathcal{D}_\tau^{ab(m)} \right|^2 - 2 \sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \sum_{\rho} \left| \mathcal{D}_\rho^{ab(m)} \right|^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \left| \mathcal{D}_\tau^{ab(m)} \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

ist. Damit ist, wenn man die konstanten Beiträge der Vorfaktoren unterdrückt

$$\begin{aligned} S^{\text{quadr}} &= \sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \left| \mathcal{D}_\tau^{ab(m)} \right|^2 + 2 \sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \sum_{\rho} \left| \mathcal{D}_\rho^{ab(m)} \right|^2 - \sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \left| \mathcal{D}_\tau^{ab(m)} \right|^2 \\ &= 2 \sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \sum_{\rho} \left| \mathcal{D}_\rho^{ab(m)} \right|^2 \\ &= 2 \sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \left((2\pi m + \Delta A^{ab})^2 + \sum_i (\Delta\phi_i^{ab})^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

C.4 Regularisierung

Die Reihe der Fouriermoden ist offensichtlich divergent. Sie muß also regularisiert und renormiert werden. Dabei werden zwei andere Regularisierungsschemata genutzt, als der in [CW07] verwendete Pauli-Villars-Regulator.

C.4.1 Regularisierung nach [Wei05b, Seite 71ff]

Diese Regularisierung geschieht derart, daß die divergente Reihe differenziert wird, bis der resultierende Ausdruck konvergent ist. Danach wird, der Wert der Reihe ermittelt und wieder integriert, wobei divergente Teile fortgelassen werden, was einer Renormierung entspricht.

Zur Abkürzung wird $\sum_i (\Delta\phi_i^{ab})^2 \equiv (C^{ab})^2 \geq 0$ eingeführt, so daß man

$$S^{\text{quadr}} = 2 \sum_{a<b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \left((2\pi m + \Delta A^{ab})^2 + (C^{ab})^2 \right) \quad (\text{C.64})$$

schreiben kann. Läßt man hier die Summe über a, b außer acht und betrachtet jeden Teilschritt für sich, hat man

$$S^{\text{part}} = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log((2\pi m + A)^2 + C^2) \quad (\text{C.65})$$

zu regularisieren. Das heißt, man differenziert S^{part} einmal nach C^2 um eine Summe über $1/m^2$ stehen zu haben.

$$\frac{d}{d(C^2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log((2\pi m + A)^2 + C^2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi m + A)^2 + C^2} \stackrel{\text{Mathematica}}{=} \frac{\sinh C}{2C(\cosh C - \cos A)} \quad (\text{C.66})$$

Dann ist das unbestimmte Integral über C^2 dieses Ausdrucks gleich

$$\int d(C^2) \frac{\sinh \sqrt{C^2}}{2\sqrt{C^2}(\cosh \sqrt{C^2} - \cos A)} = \log(\cosh C - \cos A) + \log D$$

Der vordere Teil ist der regularisierte Ausdruck für S^{part} und $\log D$ eine divergente Integrationskonstante. Im Rahmen der Renormierung entfällt diese. Damit ist

$$S^{\text{part,reg}} = 2 \log(\cosh C - \cos A). \quad (\text{C.67})$$

Setzt man dies für die divergente Reihe ein und macht alle Vereinfachungen rückgängig, erhält man

$$S_{\text{quenched}}^{\text{quadr,reg}} = 2 \sum_{a < b} \log(\cosh |\Delta\phi^{ab}| - \cos \Delta A^{ab}) \quad (\text{C.68})$$

wobei $|\Delta\phi^{ab}| = \sqrt{\sum_i \Delta\phi_i^{ab}}$ ist.

C.4.2 Zetafunktions-Regularisierung

Um die obige Regularisierung zu verifizieren, wurde zusätzlich eine Zetafunktions-Regularisierung durchgeführt, um einen definierten Ausdruck für die Summe (C.63) zu finden. Die Fluktuationswirkung ist durch

$$S^{\text{quadr}} \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}} \log \lambda_m = \log \det \mathcal{F} \quad (\text{C.69})$$

gegeben, wobei \mathcal{F} für den Fluktuations-Operator steht. Damit ist die zu \mathcal{F} gehörige Zetafunktion

$$\zeta_{\mathcal{F}}(s; A, C) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_m^{-s} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} [(2\pi m + A)^2 + C^2]^{-s}. \quad (\text{C.70})$$

Diesen Ausdruck kann man durch die Substitutionen ($\tilde{A} = A/(2\pi)$; $\tilde{C} = C/(2\pi)$) so umformen, daß man den Faktor 2π loswird.

$$\zeta_{\mathcal{F}}(s; \tilde{A}, \tilde{C}) = (2\pi)^{-2s} \sum_{m \in \mathbb{Z}} [(m + \tilde{A})^2 + \tilde{C}^2]^{-s} \quad (\text{C.71})$$

Aus [Eli95] entnimmt man dem Kapitel über die verallgemeinerte Epstein-Hurwitz-Funktion

$$F(s; a, b^2) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+a)^2 + b^2]^{-s}, \quad (\text{C.72})$$

daß

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} [a(n+c)^2 + q]^{-s} &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} q^{\frac{1}{2}-s} \\ &+ \frac{4\pi^s}{\Gamma(s)} a^{-1/4-s/2} q^{1/4-s/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} \cos(2\pi n c) K_{s-1/2}(2\pi n \sqrt{q/a}) \end{aligned} \quad (\text{C.73})$$

und somit

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathcal{F}}(s; A, C) &= (2\pi)^{-2s} \left(\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \tilde{C}^{1-2s} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\pi^s}{\Gamma(s)} \tilde{C}^{1/2-s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} \cos(2\pi n \tilde{A}) K_{s-1/2}(2\pi n \tilde{C}) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} C^{1-2s} \\ &\quad + \frac{2^{2-s}}{\Gamma(s)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C^{1/2-s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} \cos(nA) K_{s-1/2}(nC) \end{aligned} \quad (\text{C.74})$$

ist. Differenziert man diese Funktion und wertet die Ableitung an der Stelle $s = 0$ aus, erhält man (Mathematica, Series)

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\zeta_{\mathcal{F}}(s; A, C)}{ds} \right|_{s=0} &= -C - \log(1 - e^{-iA-C}) - \log(1 - e^{iA-C}) \\ &= -\log 2 - \log(\cosh C - \cos A). \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

Setzt man dies in die Fluktuationenwirkung ein, erhält man (unter Fortlassung von konstanten Summanden)

$$\begin{aligned} S_{\text{quenched}}^{\text{quadr, reg}} &= -2 \sum_{a < b} \left. \frac{d\zeta_{\mathcal{F}}(s; \Delta A^{ab}, |\Delta \phi^{ab}|)}{ds} \right|_{s=0} \\ &= 2 \sum_{a < b} \log \left(\cosh |\Delta \phi^{ab}| - \cos \Delta A^{ab} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.76})$$

Literaturverzeichnis

- [A⁺06] Ofer Aharony et al. The phase structure of low dimensional large N gauge theories on tori. *JHEP*, 01:140, 2006.
- [AHNT08] Konstantinos N. Anagnostopoulos, Masanori Hanada, Jun Nishimura, and Shingo Takeuchi. Monte Carlo studies of supersymmetric matrix quantum mechanics with sixteen supercharges at finite temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 100:021601, 2008.
- [AIK⁺98] Hajime Aoki, Satoshi Iso, Hikaru Kawai, Yoshihisa Kitazawa, and Tsukasa Tada. Space-time structures from IIB matrix model. *Prog. Theor. Phys.*, 99:713–746, 1998.
- [AMM⁺04] O. Aharony, J. Marsano, S. Minwalla, K. Papadodimas, and M. Van Raamsdonk. The deconfinement and Hagedorn phase transitions in weakly coupled large N gauge theories. *Comptes Rendus Physique*, 5:945–954, 2004.
- [Ber05] Bernd A. Berg. Introduction to markov chain monte carlo simulations and their statistical analysis. *NATIONAL UNIVERSITY OF SINGAPORE*, 7:1, 2005.
- [BFS04] Ph. Blanchard, S. Fortunato, and H. Satz. The Hagedorn temperature and partition thermodynamics. *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, 34:361–366, 2004.
- [BHJ25] M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan. Zur Quantenmechanik II. *Zeitschr. f. Phys.*, 35:557–615, 1925.
- [BKUW08] Georg Bergner, Tobias Kaestner, Sebastian Uhlmann, and Andreas Wipf. Low-dimensional supersymmetric lattice models. *Annals Phys.*, 323:946–988, 2008.
- [Bro88] J. B. Bronzan. PARAMETRIZATION OF SU(3). *Phys. Rev.*, D38:1994, 1988.
- [Cat04] Simon Catterall. A geometrical approach to N = 2 super Yang-Mills theory on the two dimensional lattice. *JHEP*, 11:006, 2004.
- [CDAT98] L. P. Colatto, M. A. De Andrade, and F. Toppan. Matrix-spacetimes and a 2D Lorentz-covariant calculus in any even dimension. 1998.
- [CK03] Simon Catterall and Sergey Karamov. A lattice study of the two-dimensional Wess Zumino model. *Phys. Rev.*, D68:014503, 2003.
- [CM67] Sidney Coleman and Jeffrey Mandula. All possible symmetries of the s matrix. *Phys. Rev.*, 159(5):1251–1256, Jul 1967.
- [CW07] Simon Catterall and Toby Wiseman. Towards lattice simulation of the gauge theory duals to black holes and hot strings. *JHEP*, 12:104, 2007.

- [DGHV98] A. Donini, M. Guagnelli, P. Hernandez, and A. Vladikas. Towards $N = 1$ Super-Yang-Mills on the lattice. *Nucl. Phys.*, B523:529–552, 1998.
- [Dir28a] Paul A. M. Dirac. The Quantum Theory of the Electron. *Proc. Roy. Soc. London*, A117:610–624, 1928.
- [Dir28b] Paul A. M. Dirac. The Quantum Theory of the Electron, Part II. *Proc. Roy. Soc. London*, A118:351–361, 1928.
- [DKPR87] S. Duane, A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, and D. Roweth. Hybrid Monte Carlo. *Phys. Lett.*, B195:216–222, 1987.
- [Duf94] M. J. Duff. Kaluza-klein theory in perspective, 1994.
- [Ein05] Albert Einstein. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 322:132–148, 1905.
- [Ein16] Albert Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen Phys.*, 49:769–822, 1916.
- [Eli95] E. Elizalde. *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
- [Fey48] R. P. Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20(2):367–387, Apr 1948.
- [FGML73] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler. Advantages of the color octet gluon picture. *Physics Letters B*, 47(4):365 – 368, 1973.
- [FIZ74] S. Ferrara, J. Iliopoulos, and B. Zumino. Supergauge invariance and the Gell-Mann-Low eigenvalue. *Nuclear Physics B*, 77(3):413 – 419, 1974.
- [FS97] Jürgen Fuchs and Christoph Schweigert. *Symmetries, Lie Algebras and Representations*. Cambridge University Press, 1997.
- [GM61] Murray Gell-Mann. The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry. 1961. CTSL-20.
- [Hag65] R. Hagedorn. Statistical thermodynamics of strong interactions at high- energies. *Nuovo Cim. Suppl.*, 3:147–186, 1965.
- [IZ74] J. Iliopoulos and B. Zumino. Broken supergauge symmetry and renormalization. *Nuclear Physics B*, 76(2):310 – 332, 1974.
- [JC06] Xun Jia and Sudip Chakravarty. Quantum dynamics of an ising spin chain in a random transverse field. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 74(17):172414, 2006.
- [Kal21] Theodor Kaluza. Zum Unitätsproblem in der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.)*, pages 966–972, 1921.
- [Kle26] Oskar Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschr. f. Phys.*, 37:825–906, 1926.

- [Max65] James Clerk Maxwell. *A dynamical theory of the electromagnetic field [microform] / by J. Clerk Maxwell ; read December 8, 1864.* [London : The Society], 1865.
- [MM94] I. Montvay and G. Münster. *Quantum Fields on a Lattice.* Cambridge University Press, 1994.
- [Mon96] I. Montvay. An Algorithm for Gluinos on the Lattice. *Nucl. Phys.*, B466:259–284, 1996.
- [Mon01] Istvan Montvay. Majorana fermions on the lattice. 2001.
- [MRR⁺53] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Phys.*, 21:1087–1092, 1953.
- [Nak03] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition.* IOP Publishing Ltd, Bristol, 2003.
- [Nov00] S. F. Novaes. Standard model: An introduction, 2000.
- [Pau26] Wolfgang Pauli. Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik. *Zeitschr. f. Phys.*, 36:336–363, 1926.
- [Pla01] Max Planck. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. *Annalen der Physik*, 309:553–563, 1901.
- [Pop06] Christopher Pope. *Geometry and Group Theory.* 2006.
- [PS95] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory.* Perseus Books Publishing L.L.C., 1995.
- [Rot92] H. J. Rothe. *Lattice Gauge Theory – An Introduction.* World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1992.
- [Ryd06] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory, 2nd Edition.* Cambridge University Press, 2006.
- [Sch26a] Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, 79:361, 489, 734, 1926.
- [Sch26b] Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, 81:109, 1926.
- [Sch48] Julian Schwinger. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 73(4):416–417, Feb 1948.
- [Ste07] A. Steland. *Basiswissen Statistik.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [Tay01] Washington Taylor. M(atrrix) theory: Matrix quantum mechanics as a fundamental theory. *Rev. Mod. Phys.*, 73:419–462, 2001.
- [The06] Ulrich Theis. *Yang-Mills Theories and Standard Model.* 2006.

- [TS02] Todd Edward Tilma and G. Sudarshan. Generalized Euler angle parametrization for $SU(N)$. *J. Phys.*, A35:10467–10501, 2002.
- [UMW07] S. Uhlmann, R. Meinel, and A. Wipf. Ward identities for invariant group integrals. *J. Phys.*, A40:4367–4390, 2007.
- [Wei05a] S. Weinberg. *The Quantum Theory Of Fields I*. Cambridge University Press, 2005.
- [Wei05b] S. Weinberg. *The Quantum Theory Of Fields II*. Cambridge University Press, 2005.
- [Wei05c] S. Weinberg. *The Quantum Theory Of Fields III*. Cambridge University Press, 2005.
- [Wil74] Kenneth G. Wilson. CONFINEMENT OF QUARKS. *Phys. Rev.*, D10:2445–2459, 1974.
- [Wip00] Andreas Wipf. Introduction to Supersymmetry, Lecture Notes. 2000.
- [Wip05] Andreas Wipf. Non-perturbative methods in supersymmetric theories. 2005.
- [Wip06] Andreas Wipf. Symmetrien in der Physik. 2006.
- [Wip07] Andreas Wipf. Quantenfeldtheorie 2. 2007.
- [WZ74] J. Wess and B. Zumino. Supergauge transformations in four dimensions. *Nuclear Physics B*, 70(1):39 – 50, 1974.
- [YM54] Chen-Ning Yang and Robert L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, 1954.

Danksagung

Zuerst möchte ich Prof. Dr. Andreas Wipf dafür danken, daß ich die Möglichkeit hatte, das interessante Thema der dimensional kompaktifizierten Super-Yang-Mills-Theorien zu bearbeiten. Desweiteren möchte ich mich für die ausgezeichnete Betreuung während meiner Diplomarbeit bedanken.

Auch bei Dr. Sebastian Uhlmann möchte ich mich für die Geduld bedanken, die er für meine immerwährenden Fragen und deren ausführliche Beantwortung aufbrachte.

Meinen Dank schulde ich ebenso Dipl.-Phys. Christian Wozar für seine Unterstützung und die sehr ergiebigen Diskussionen über sämtliche numerischen Belange.

Dipl.-Phys. Georg Bergner, Dr. Tobias Kästner und Dr. Ulrich Theis möchte ich dafür danken, daß sie immer die Zeit fanden auf meine Fragen ausführlich zu antworten.

Zusätzlich möchte ich meinen Kommilitonen Björn Wellegehausen, Ulrich Harst und Dipl.-Phys. Lukas Janssen für die vielen anregenden Diskussionen danken, die ich mit ihnen führen durfte.

Mein Dank gilt ebenfalls der gesamten restlichen Arbeitsgruppe Quantenfeldtheorie am Theoretisch-Physikalischen Institut für die angenehme und produktive Atmosphäre.

Für das Korrekturlesen möchte ich mich herzlich bei Dipl.-Phys. Christian Wozar, Dipl.-Phys. Georg Bergner, Dr. Tobias Kästner, Ulrich Harst, Dipl.-Phys. Manuel Tessmer und Dipl.-Phys. Lukas Janssen bedanken.

Schließlich möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken. Sie ermöglichten mir die Aufnahme dieses Studiums und unterstützten mich die ganze Zeit über, was das Korrekturlesen dieser Arbeit einschließt.

Erklärung

Ich erkläre hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die Arbeit für die öffentliche Nutzung der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, 15. Januar 2009

Johannes Hartung

