Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch Physikalisches Institut

Determinanten von Dirac-Operatoren auf $\mathbb{R}^2$ und T^2

Bachelorarbeit zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science (B. Sc.)

Vorgelegt von Lara Hartung
Matrikel-Nummer 146418
geboren am 11.01.1996 in Essen
Jena, den 18.11.2016

Erstgutachter: Prof. Dr. Andreas Wipf
Zweitgutachter: Jun. Prof. Dr. Martin Ammon

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Als Paul Dirac im Jahr 1928 eine Lorentz-kovariante Verallgemeinerung der Schrödingergleichung vorlegte, hatte dies einen maßgeblichen Einfluss auf die heutige Physik. Die Dirac-Gleichung stellte einen wesentlichen Schritt zur Vereinigung von Quantenmechanik und Allgemeiner Relativitätstheorie dar und bildet einen der Grundpfeiler der Quantenfeldtheorie [1]. Wenig verwunderlich ist daher die Bedeutung, die dem darin auftretenden Differentialoperator – dem Dirac-Operator – zukommt. Insbesondere im Fall von Fermionen in externen Feldern, die eine eichtheoretische Beschreibung fordern, treten bei der Bestimmung des Feynmanschen Pfadintegrals Terme auf, die diesen Operator enthalten [2]. Ziel dieser Bachelorarbeit ist die Bestimmung der Determinante des Dirac-Operators $\not{D}$ im externen Yang-Mills-Feld für verschiedene Eichsymmetrien. Diese ist notwendig zur Bestimmung von Grundgrößen des betrachteten Modells wie beispielsweise des generierenden Funktionals oder der effektiven Wirkung. Da die Eigenwerte von $\not{D}$ im Allgemeinen unbekannt sind und zudem auftretende Divergenzen eine Regularisierung erforderlich machen, ist eine direkte Berechnung nicht möglich. Es gibt jedoch verschiedene indirekte Methoden, solche vom externen Feld abhängige Funktionaldeterminanten zu bestimmen. In dieser Arbeit wurde die Methode der ζ-Funktion gewählt, da diese einen guten mathematischen Zugang zur betrachteten Problematik bietet. Dabei wird die Determinante mithilfe der Riemannschen ζ-Funktion umgeschrieben und anstelle der Eigenwerte durch den Wärmeleitungskern $tr(e^{t\not{D}})$ ausgedrückt [2], [3].

Für die meisten physikalisch relevanten Modelle ist dieser Ausdruck nicht exakt lösbar. Daher werden an ihrer Stelle vereinfachte, exakt lösbare Modelle untersucht, anhand derer sich ein besseres Verständnis für das Verhalten komplexerer Systeme entwickeln kann [4]. Die wichtigste Vereinfachung, die in dieser Arbeit getroffen wird, ist die Reduktion auf zwei Raumzeitdimensionen. Diese erlaubt eine Zerlegung des Eichfeldes – und dadurch auch des Dirac-Operators – welche eine exakte Bestimmung der fermionischen Determinante als Funktion der Parameter dieser Zerlegung ermöglicht. Diese Arbeit wird dabei von einer expliziten Zerlegung – der so genannten Iwasawa-Zerlegung – für $\not{D}$ ausgehen [3]. Für eine allgemeinere Methode sei auf [5] verwiesen.

Im Rahmen der zweidimensionalen Raumzeit werden im Folgenden verschiedene Modelle untersucht. Um die Methodik zu studieren, soll dabei zunächst bei stark vereinfachten Situationen begonnen und sukzessive zu realistischeren Modellen übergegangen werden. Hierzu gliedert sich diese Arbeit nach einer mathematischen und physikalischen Vorbetrachtung in zwei Teile: Abschnitt 3 nimmt zunächst eine Temperatur $T = 0$ an. Dies erlaubt, die Geometrie der Raumzeit als

unendlich ausgedehnte Ebene zu betrachten und die Möglichkeit des Auftretens von Nullmoden zu vernachlässigen. Im zweiten Teil der Arbeit, Abschnitt 4, werden dann endliche Temperaturen betrachtet. Um die Temperatur zu beschränken müssen geeignete Randbedingungen auf der Raumzeit eingeführt werden, die hier durch einen Torus T^2 realisiert werden. Den in Abschnitt 3 vernachlässigten Nullmoden kommt in diesem Fall eine wichtige Bedeutung zu, nicht nur bei der hier zentralen Bestimmung der Determinante sondern auch darüber hinaus, da die Nullmoden über den Index von $\not{D}$ im direkten Bezug zur Topologie des Modells stehen [2]. Daher soll die Bestimmung der Nullmoden in den Vordergrund gerückt werden. Eine auf diesen Ergebnissen sowie denen aus 3 aufbauende Berechnung der fermionischen Determinante auf dem Torus findet sich für das Schwinger-Modell beispielsweise in [4], ist ansonsten jedoch späteren Arbeiten vorbehalten.
Innerhalb dieser zwei Abschnitte sollen jeweils verschiedene eichtheoretische Symmetriegruppen betrachtet werden. Für die Eichgruppen U(1) und SU(2) kann sich für die gewählten Methoden auf Literatur gestützt werden; insbesondere sei hier auf [3], [4] und [6] verwiesen. Zunächst sollen diese Quellen repetiert werden[1]. Darauf aufbauend wird der Fall einer SU(3)-Eichsymmetrie diskutiert. In Abschnitt 3 ($T = 0$) werden diese Ergebnisse zudem auf den allgemeinen Fall SU(n) extrapoliert.

1 In Abschnitt 3 bei $T = 0$ wird die Behandlung von U(1) nicht ausgeführt, da sie im Rahmen dieser Bachelorarbeit gegenüber einer ausführlichen Diskussion von SU(2) keinen inhaltlichen Mehrwert liefert. Stattdessen sei dazu auf [3] verwiesen.

2 Vorbetrachtung

Vorbemerkung: Diese Bachelorarbeit verwendet das natürliche Einheitensystem in dem $\hbar = c = 1$ sowie die Einsteinsche Summenkonvention unter Berücksichtigung der Indexstellung. Zudem wird die Kopplungskonstante e auf 1 gesetzt. Für die explizite Berechnung der Matrizen wurde Wolfram Mathematica 10.1 verwendet.

2.1 Dirac-Operatoren und Eichfelder

Der Übergang zu relativistischen Systemen stellt die Quantenmechanik vor das Problem, dass die Schrödingergleichung und die damit assoziierten Größen nicht kovariant sind. Die Klein-Gordon-Gleichung – lange als einzige Lösung für die relativistische Quantenmechanik gehandelt – liefert jedoch aufgrund von Problemen wie negativen Wahrscheinlichkeitsdichten, die durch die zweite Ableitung entstehen, nur eine unzureichende Beschreibung [1]. Ein Lösungsvorschlag für eine kovariante Verallgemeinerung der Schrödingergleichung stammt von Paul Dirac aus dem Jahr 1928: Die Dirac-Gleichung für ein freies Elektron mit Ruhemasse m lautet

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0. \tag{2.1}$$

Die Dirac- oder Gamma-Matrizen γ^{μ} sind dabei derartig definiert, dass sie die durch

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\delta^{\mu\nu} \tag{2.2}$$

definierte Dirac-Algebra erfüllen. Zudem sind sie selbstadjungiert. Es lässt sich zeigen, dass eine Matrix $\gamma*$ existiert die mit allen γ^{μ} antikommutiert. Im zweidimensionalen Fall ist diese gegeben durch

$$\gamma* = -i\gamma^{0}\gamma^{1}. \tag{2.3}$$

Um die Gleichungen zu vereinfachen führte Dirac die Slash-Notation $\gamma^{\mu}a_{\mu} = \not{a}$ ein. Der Ableitungsoperator in der Dirac-Gleichung lautet dann

$$\not{\partial} = i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}. \tag{2.4}$$

Dieser Operator wird als freier Dirac-Operator bezeichnet [7], [8], [9].

Die Wahl der spezifischen Repräsentation der Gamma-Matrizen ist nicht eindeutig. Die in dieser Arbeit gewählte Darstellung ist die sogenannte chirale oder Weyl-Repräsentation[1], bei der γ^{μ} den Pauli-Matrizen entsprechen [3], [10]:

$$\gamma^0 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^1 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma* = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Der Übergang von freien Teilchen zur Anwesenheit externer Felder verlangt eine zusätzliche Beschreibung der Wechselwirkung mit dem Feld. Der Formalismus, der in den letzten Jahren immer weiter an Bedeutung gewonnen hat und derzeit als erfolgreichste Methode zur Beschreibung von Wechselwirkungen gilt, ist der der Eichtheorie. Diese basieren auf dem so genannten Eichprinzip, also der Forderung, dass die grundlegenden Größen des Systemes wie Lagrange-Funktion und Wirkung – invariant gegenüber einer speziellen Art von Transformationen sind [11]. Die Menge solcher Transformationen bezeichnet man als die Eichgruppe des Systems. Es handelt sich dabei um eine Lie-Gruppe, also eine Gruppe deren Elemente durch kontinuierliche Parameter definiert sind. Wichtig für diese Arbeit sind die unitären Gruppen U(n), welche die unitären $n \times n$-Matrizen enthalten. Wird zudem gefordert , dass die Determinante der Matrizen 1 ist, bezeichnet man die Gruppe als die Spezielle Unitäre Gruppe SU(n) [12]. Eichgruppen werden erzeugt durch $n^2 - 1$ Generatoren T_a, und zwar derart, dass für jedes $U \in$ SU(n) Funktionen $\alpha^{(a)}$ existieren mit

$$U = e^{\alpha^{(a)}T_a}. \tag{2.6}$$

Auch das Eichfeld A_{μ} kann als Linearkombination

$$A_{\mu} = A_{\mu}^{(a)}T_a \tag{2.7}$$

dieser Generatoren ausgedrückt werden. Im Allgemeinen kommutieren die T_a wie auch die A_{μ} nicht miteinander, was physikalisch auf die Selbstwechselwirkung des Eichfeldes zurückzuführen ist. Solche nichtabelschen Eichtheorien nennt man Yang-Mills-Theorien. Ein wichtiges Beispiel ist die Quantenchromodynamik, die auf der Eichgruppe SU(3) beruht; ein Gegenbeispiel liefert

1 Diese Repräsentation wird häufig für die Betrachtung masseloser Fermionen gewählt. Dieser Fall wird durch die Weyl-Gleichungen beschrieben, bei denen die Spinoren nach Chiralität aufgespalten werden [10]. Eine vergleichbare Aufspaltung soll auch in Abschnitt 4 zur Betrachtung der Nullmoden vorgenommen werden.

die abelsche Quantenelektrodynamik auf Basis von U(1) [11]. Das Transformationsverhalten des Eichfeldes und des Spinors ψ unter $U \in SU(n)$ ist gegeben durch

$$\psi \to U\psi, \tag{2.8}$$

$$A_\mu \to UA_\mu U^{-1} - i\partial_\mu(U)U^{-1}. \tag{2.9}$$

Das Eichprinzip fordert nun, dass die Wirkung

$$S[A, \overline{\psi}, \psi] = \int \left(\frac{1}{4} tr_c(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \overline{\psi} i \not{D} \psi) \right) d^2x \tag{2.10}$$

invariant unter diesen Transformationen ist. Ebenso ist der Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu) - \partial_\nu(A_\mu) - ie[A_\mu, A_\nu] \tag{2.11}$$

eichinvariant [3]. Im hier betrachteten zweidimensionalen Fall reduziert sich der Tensor auf die Größe $F_{01} = -F_{10}$.

Der erste Term in Gl. 2.10 – die sogenannte Yang-Mills-Wirkung – lautet in diesem Fall (vgl. [13] [5])

$$S_{YM} = \frac{1}{4} \int tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})dx^2 = \frac{1}{2} \int tr(F_{01}F^{01})dx^2. \tag{2.12}$$

Für die Dirac-Gleichung wird ebenfalls Eichinvarianz gefordert. Die freie Dirac-Gleichung erfüllt diese Bedigung nicht. Stattdessen ist es notwendig, von der einfachen Ableitung zur kovarianten Ableitung $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ überzugehen. Damit lautet die kovariante Dirac-Gleichung

$$(\not{D} - m)\psi = 0 \tag{2.13}$$

mit dem Dirac-Operator im externen Feld [14]

$$\not{D} = \gamma^\mu(D_\mu) = \not{\partial} - i\not{A}. \tag{2.14}$$

2.2 Zeta-Determinanten

Die Determinante eines Operators ist definiert durch das Produkt seiner Eigenwerte. Bei der Untersuchung von Funktionaldeterminanten tritt jedoch häufig das Problem auf, dass diese Eigenwerte nicht bekannt sind bzw. ihr Produkt divergiert, sodass die Determinante auf indirektem Weg bestimmt werden muss. Eine Methode dies zu tun basiert auf der Riemanschen bzw. Hurwitzschen Zeta-Funktion, die definiert ist durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad \text{(Riemann)} \qquad \text{bzw.} \qquad \zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s} \quad \text{(Hurwitz)}\,. \tag{2.15}$$

Bei Gl. 2.15 handelt es sich um Dirichlet-Reihen. Diese – und somit auch $\zeta(s)$ – ist konvergent falls $\Re(s) > 1$. Außerhalb des Konvergenzbereiches lässt sich $\zeta(s,a)$ analytisch erweitern durch

$$\zeta(s,a) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1} e^{az}}{1-e^z} dz. \tag{2.16}$$

Die geschlossene Kurve C verläuft entlang der reellen Achse von ∞ bis R (wobei $0 < R < 2\pi$) und des Kreises mit Radius R um den Ursprung sowie die reelle Achse zurück von R bis ∞ [15]. $\Gamma(s)$ ist die Gamma-Funktion

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \tag{2.17}$$

welche die Funktionalgleichung

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{2.18}$$

erfüllt. Das auf diese Weise definierte $\zeta(s)$ ist mit Ausnahme eines Pols in $s = 1$ überall analytisch [16].

Diese Behandlung der Divergenzen von $\zeta(s)$ wird sich für die Bestimmung der Determinante zunutze gemacht. Zur physikalischen Anwendung ist es dabei sinnvoll, $\zeta(s)$ nicht nur bezüglich n sondern auch für beliebige Folgen – insbesondere die des diskreten Spektrum eines Operators – zu betrachten. Dies kann für einen Operator A mit den Eigenwerten a_n über die spektrale Zeta-Funktion

$$\zeta_A(s) = \sum_n a_n^{-s} \tag{2.19}$$

erreicht werden [3], [17]. Aus der Definition der Determinante wird nun ersichtlich, dass sich $\det(A)$ ausdrücken lässt als

$$\log(\det(A)) = \log\left(\prod_n a_n\right) = \sum_n \log(a_n) = -\frac{d}{ds}\sum_n e^{-s\log(a_n)}\bigg|_{s=0} = -\frac{d}{ds}\zeta_A(s)\bigg|_{s=0}. \quad (2.20)$$

Eine Formulierung von $\zeta_A(s)$, die die Eigenwerte a_n nicht mehr enthält, ergibt sich durch die Γ-Funktion:

$$\zeta_A(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\sum_n e^{a_n t}dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}tr(e^{-At})dt. \quad (2.21)$$

Die Determinante von A kann also geschrieben werden als

$$\log(\det(A)) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}tr(e^{-At})dt\bigg|_{s=0}. \quad (2.22)$$

3 Bestimmung von $\det(i\not{D})$ auf $\mathbb{R}^2$

3.1 Eichgruppe SU(2)

Mithilfe dieser Methode ist es nun möglich $\det(i\not{D})$ für eine ebene Raumzeit und damit $\psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ zu bestimmen. In diesem Abschnitt soll dabei zunächst eine auf SU(2) basierende Symmetrie betrachtet werden. Damit ist A_μ eine 2×2-Matrix sodass sich der Hilbertraum unter Berücksichtigung des Spins als $\mathscr{H} = L_2(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ ergibt. Eine detaillierte Behandlung dieses Modells wurde in [3] vorgenommen. Die nachfolgenden Betrachtungen sollen sich in erster Linie auf diese Quelle stützen.

Gemäß Gl. 2.21 gilt

$$\zeta_{-\not{D}^2}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} tr(e^{t\not{D}^2}) dt \tag{3.1}$$

und somit

$$\log(\det(i\not{D})) = \log\left(\sqrt{\det(-\not{D}^2)}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} tr(e^{t\not{D}^2}) dt\bigg|_{s=0}. \tag{3.2}$$

Im Spezialfall der zweidimensionalen Raumzeit besitzt das Eichfeld nun eine Eigenschaft, die die Grundlage für eine Berechnung der fermionischen Determinante bildet: Für

$$A_z := A_0 - iA_1 \qquad \text{und} \qquad \partial_z := \partial_0 - i\partial_1, \tag{3.3}$$

$$A_{\bar{z}} := A_0 + iA_1 \qquad \text{und} \qquad \partial_{\bar{z}} := \partial_0 + i\partial_1 \tag{3.4}$$

lässt sich A_μ nach [3] und [4] zerlegen als

$$A_z = ig^{-1}\partial_z(g) \qquad \text{und} \qquad A_{\bar{z}} = ig^\dagger \partial_{\bar{z}}(g^{\dagger^{-1}}) \tag{3.5}$$

für ein $g \in SU(n)$. Auf dieser Basis kann Gl. 2.14 umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\not{D} &= \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & i\partial_z + A_z \\ i\partial_{\bar{z}} + A_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z + ig^{-1}\partial_z(g) \\ \partial_{\bar{z}} + ig^{\dagger}\partial_{\bar{z}}(g^{\dagger^{-1}}) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & g^{-1}\partial_z \cdot g \\ g^{\dagger}\partial_{\bar{z}} \cdot g^{\dagger^{-1}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & g^{\dagger} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ \partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^{\dagger-1} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten für die Wahl der Zerlegung g. Diese Arbeit verwendet die sogenannte Iwasawa-Zerlegung: Dabei wird die quadratische Matrix g durch ein Produkt aus einer Diagonalmatrix und einer unitären Matrix ausgedrückt [3]. Da Letztere Element der verwendeten Eichgruppe ist, lässt sich durch eine Eichtransformation auf $\mathbb{1}$ setzen. Somit ist die Darstellung von g eine Diagonalmatrix mit Determinante 1 und $n^2 - 1$ kontinuierlichen Parametern, die von x_μ abhängen.

Somit ist $\not{D} = G\not{\partial}G^{\dagger}$ mit

$$G = \begin{pmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \qquad \text{wobei} \qquad g = \begin{pmatrix} e^{\frac{\varphi}{2}} & ve^{\frac{\varphi}{2}} \\ 0 & e^{-\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

für $\varphi \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}$. Definiere nun ein $\not{D}_\tau$ mit $\tau \in [0,1]$ das derart zwischen $\not{\partial}$ und $\not{D}$ interpoliert dass $\not{D}_{\tau=0} = \not{\partial}$ und $\not{D}_{\tau=1} = \not{D}$. Ein solches $\not{D}_\tau$ kann durch Einführen eines τ in GL. 3.7 konstruiert werden:

$$g \to g_\tau = \begin{pmatrix} e^{\tau\frac{\varphi}{2}} & \tau ve^{\tau\frac{\varphi}{2}} \\ 0 & e^{-\tau\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Dann lässt sich gemäß HDI schreiben

$$\log\left(\frac{\det(i\not{D})}{\det(i\not{\partial})}\right) = \log(\det(i\not{D})) - \log(\det(i\not{\partial})) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\tau}\log(\det(i\not{D}_\tau))d\tau. \tag{3.9}$$

Damit genügt es zur Bestimmung der Determinante von $\not{D}$ zunächst $\frac{\partial}{\partial\tau}\log(\det(i\not{D}_\tau))$ auszuwerten. Für $\not{D}_\tau$ lautet Gl. 2.22

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\log(\det(i\not{D}_\tau)) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{\partial}{\partial\tau}tr(e^{t\not{D}_\tau^2})dt\right)\Bigg|_{s=0}. \tag{3.10}$$

Da die Spur linear ist, lässt sich die Ableitung in die Spur ziehen. Die Kettenregel liefert

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}tr\left(e^{t\not{D}^2}\right) &= tr\left(\frac{\partial}{\partial\tau}e^{t\not{D}^2}\right)\\ &= tr\left(e^{t\not{D}_\tau^2}\left(t\frac{\partial\not{D}_\tau}{\partial\tau}\not{D}_\tau + \not{D}_\tau t\frac{\partial\not{D}_\tau}{\partial\tau}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Gl. 3.6 sagt nun aus, dass die Ableitung $\frac{\partial\not{D}_\tau}{\partial_\tau}$ sich durch die Ableitungen von G_τ und $G_\tau^\dagger$ ausdrücken lässt. Durch Einsetzen der expliziten Form von g aus Gl. 3.8 ergibt sich

$$\frac{\partial\not{D}_\tau}{\partial_\tau} = \frac{\partial G_\tau}{\partial_\tau}\not{\partial}G^\dagger + G\not{\partial}\frac{\partial G_\tau^\dagger}{\partial_\tau} = F_\tau\not{D}_\tau + \not{D}_\tau F_\tau^\dagger\,, \tag{3.12}$$

wobei

$$F_\tau = \begin{pmatrix} -f_\tau & 0 \\ 0 & f_\tau^\dagger \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad f_\tau = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{2} & v(1+\tau\varphi) \\ 0 & -\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Die Spur ist linear und invariant unter zyklischen Vertauschungen. Daher ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}tr\left(e^{t\not{D}^2}\right) &= 2t\ tr\left(e^{t\not{D}^2}\not{D}_\tau^2(F+F^\dagger)\right)\\ &= 2t\frac{d}{dt}tr\left(e^{t\not{D}^2}(F+F^\dagger)\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Mithilfe partieller Integration lässt sich nun die t-Ableitung beseitigen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}\log(\det(i\not{D}_\tau)) &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^s\frac{d}{dt}tr(e^{t\not{D}^2}(F+F^\dagger))dt\right)\Bigg|_{s=0} \qquad (3.15)\\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{\Gamma(s)}\left[t^s tr(e^{t\not{D}_\tau^2}(F+F^\dagger))\right]_0^\infty\right) + \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}tr(e^{t\not{D}^2}(F+F^\dagger))dt\right)\Bigg|_{s=0}. \end{aligned}$$

Da $\not{D}_\tau$ nur negative Eigenwerte besitzt[1], verschwindet $t^s tr(e^{t\not{D}_\tau^2}(F+F^\dagger))$ sowohl für $t=0$ als auch für $t=\infty$ und der erste Summand leistet keinen Beitrag. Nach Durchführung der s-Ableitung ergibt sich

1 Im Allgemeinen ist die Bedingung an die Eigenwerte, dass diese nicht positiv sind. In diesem Fall sollen jedoch mögliche Eigenfunktionen mit Eigenwert 0 vernachlässigt werden. Um Nullmoden auch formal auszuschließen, können geeignete Randbedingungen gewählt werden (vgl. dazu [3], [5]), welche sich jedoch auch auf die fermionische Determinante auswirken. In Abschnitt 4 wird deutlich werden, dass dies auf dem Torus nicht mehr einfach möglich ist und die Nullmoden hier eine wichtige Rolle spielen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}\log(\det(i\not{D}_\tau)) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}tr(e^{t\not{D}^2}(F+F^\dagger))dt \\ &+ s\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}tr(e^{t\not{D}^2}(F+F^\dagger))dt\right)\Bigg|_{s=0}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Auch hier verschwindet einer der Summanden: $\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}tr(e^{t\not{D}^2}(F+F^\dagger))dt$ ist analytisch, somit besitzt weder der Term selbst noch eine seiner Ableitungen Polstellen. Insbesondere bedeutet dies, dass $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}tr(e^{t\not{D}^2}(F+F^\dagger)\ dt\right)$ an der Stelle $s=0$ endlich ist und dessen Produkt mit s an dieser Stelle verschwindet.
$\Gamma(s)$ besitzt bei $s=0$ eine Polstelle, somit gilt dort $\frac{1}{\Gamma(s)}=0$. Eine nichttriviale Lösung verlangt also, dass das Integral in Gl. 3.16 divergiert. Bei Aufspaltung des Integrals an beliebiger Stelle ist jedoch der Teil, der $t=0$ nicht enthält, immer endlich da $tr(e^{t\not{D}^2}(F+F^\dagger))$ antiproportional zu t ist [17]. Es genügt also, bis zu einem beliebig kleinen $\epsilon>0$ zu integrieren:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\log(\det(i\not{D}_\tau)) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\epsilon t^{s-1}tr(e^{t\not{D}^2}(F+F^\dagger))dt\Bigg|_{s=0}. \tag{3.17}$$

$F+F^\dagger$ lässt sich ausdrücken als

$$F+F^\dagger = -\gamma*\otimes(f_\tau+f_\tau^\dagger). \tag{3.18}$$

Auszuwerten ist somit die Spur

$$tr\left(e^{t(\not{D}_\tau^2)}(-\gamma*\otimes(f_\tau+f_\tau^\dagger))\right). \tag{3.19}$$

Da $\mathscr{H}=L_2(\mathbb{R}^2)\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ beschreibt Gl. 3.19 die Spur über drei Unterräume: Raumzeit, Spin und Farbe. Die kontinuierliche Raumzeitspur ergibt sich durch Integration über das Matrixelement:

$$\begin{aligned} tr_{st}(e^{t\not{D}^2}(F+F^\dagger)) &= \int \langle x|tr(e^{t\not{D}^2}(F+F^\dagger))|x\rangle\, d^2x \\ &= \int tr(\langle x|e^{t\not{D}_\tau^2}|x\rangle\,\gamma*(f_\tau+f_\tau^\dagger))d^2x. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Wie in [17] und [3] bewiesen lässt sich der Wärmeleitungskern für kleine t (wähle ϵ klein) entwickeln in

$$\langle x|e^{t\not{D}_\tau^2}|x\rangle = \frac{1}{4\pi t}\left(1 + t\tau F_{01}\gamma * + ...\right). \tag{3.21}$$

Es ist $\not{D}_\tau^2 = \mathbb{1} \otimes D_\tau^2 + \gamma * \otimes F_{01,\tau}$. Die Spur über den Spin-Index liefert damit für die beiden Eigenwerte $a = \pm 1$ von σ_3 zwei Summanden:

$$tr_\gamma\left(e^{t\not{D}^2}(F + F^\dagger)\right) = -tr_c\left(\frac{1}{4\pi t}\left(1 + t\tau F_{01}\gamma * + ...\right)(f_\tau + f_\tau^\dagger)\right) + tr_c\left(\frac{1}{4\pi t}\left(1 - t\tau F_{01}\gamma * + ...\right)(f_\tau + f_\tau^\dagger)\right). \tag{3.22}$$

Somit ist

$$tr(e^{t\not{D}^2}(F + F^\dagger)) = \frac{1}{4\pi t}\sum_n t^n \int a_n(x) d^2x \tag{3.23}$$

mit den Koeffizienten

$$a_0(x) = 0, \qquad a_1(x) = -2\ tr_c\left((f_\tau + f_\tau^\dagger)F_{01}\right),\ \ ... \tag{3.24}$$

und Gl. 3.17 wird zu

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\log(\det(i\not{D}_\tau)) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\epsilon dt \sum_n t^{s+n-2}\frac{1}{4\pi}\int a_n(x) d^2x\bigg|_{s=0}. \tag{3.25}$$

Für $s << 1$ gilt $\Gamma(s+1) \approx \Gamma(1)$ und damit gemäß Gl. 2.18 $s\Gamma(s) \approx 1$. Obenstehende Gleichung vereinfacht sich damit zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}\log(\det(i\not{D}_\tau)) &= \frac{s}{4\pi}\int_0^\epsilon dt \sum_n t^{s+n-2}\int a_n(x)\ d^2x\bigg|_{s=0} \\ &= \frac{1}{4\pi}\sum_n \frac{s\epsilon^{s+n-1}}{s+n-1}\int a_n(x)\ d^2x\bigg|_{s=0}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Für den Grenzwert $\epsilon,\ s \to 0$ verschwindet der Zähler des Bruches in Gl. 3.26; der Nenner verschwindet hingegen nur für $n = 1$. Außer a_1 trägt daher kein weiterer Koeffizient bei und es ist

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\log(\det(i\not{D}_\tau)) = -\frac{1}{2\pi}\int tr_c(F_{01,\tau}(f_\tau + f_\tau^\dagger))\, d^2x. \tag{3.27}$$

Zu bestimmen bleibt die Spur über den Farbraum. Dazu wird eine explizite Darstellung des Feldstärketensors benötigt. Diese lässt sich durch Einsetzen der Zerlegung des Eichfeldes $A_z = ig^{-1}\partial_z(g)$ und $A_{\overline{z}} = ig^\dagger\partial_{\overline{z}}(g^{\dagger^{-1}})$ gewinnen:

$$F_{01} = \frac{1}{2}\left(\partial_z(g^\dagger\partial_{\overline{z}}(g^{\dagger^{-1}})) - \partial_{\overline{z}}(g^{-1}\partial_z(g)) + \left[g^{-1}\partial_z(g), g^\dagger\partial_{\overline{z}}(g^{\dagger^{-1}})\right]\right). \tag{3.28}$$

Einsetzen von g liefert

$$F_{01,\tau} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\tau\partial_z(\partial_{\overline{z}}(\varphi)) - \alpha_\tau\overline{\alpha}_\tau & \partial_{\overline{z}}(\alpha_\tau) + \tau\alpha_\tau\partial_{\overline{z}}(\varphi) \\ -\partial_z(\overline{\alpha}_\tau) + \tau\overline{\alpha}_\tau\partial_z(\varphi) & \tau\partial_z(\partial_{\overline{z}}(\varphi)) + \alpha_\tau\overline{\alpha}_\tau \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

wobei

$$\alpha_\tau := \tau(\partial_z(v) + \tau v\partial_z\varphi). \tag{3.30}$$

Weiterhin ist

$$(f_\tau + f_\tau^\dagger) = \begin{pmatrix} \varphi & v(1+\tau\varphi) \\ \overline{v}(1+\tau\varphi) & -\varphi \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

sodass die Spur aus Gl. 3.27 explizit ausgerechnet werden kann:

$$\begin{aligned} tr_c(F_{01,\tau}(f_\tau + f_\tau^\dagger)) = &-\tau\varphi\partial_z\partial_{\overline{z}}(\varphi) - \varphi\alpha_\tau\overline{\alpha}_\tau \\ &+ \frac{v}{2}(1+\tau\varphi)(-\partial_z(\overline{\alpha}_\tau) + \tau\overline{\alpha}_\tau\partial_z(\varphi)) \\ &+ \frac{\overline{v}}{2}(1+\tau\varphi)(-\partial_{\overline{z}}(\alpha_\tau) + \tau\alpha_\tau\partial_{\overline{z}}(\varphi)). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Durch partielle Integration lassen sich diese Terme vereinfachen. Es gilt

$$\int v(1+\tau\varphi)(\overline{\alpha}_\tau\tau\partial_z\varphi - \partial_z\overline{\alpha}_\tau)d^2x = \int \left(\overline{\alpha}_\tau\partial_\tau(\alpha_\tau) + \varphi\alpha_\tau\overline{\alpha}_\tau\right)\, d^2x, \tag{3.33}$$

sodass mit $\partial_z\partial_{\overline{z}} = \Delta$ Gl. 3.27 zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}\log(\det(i\not{D}_\tau)) &= -\frac{1}{2\pi}\tau\int(\varphi\partial_z\partial_{\bar{z}}(\varphi) - \varphi\alpha_\tau\overline{\alpha}_\tau)d^2x \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int(\overline{\alpha}_\tau\partial_\tau(\alpha_\tau) + \varphi\alpha_\tau\overline{\alpha}_\tau)\,d^2x \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int(\alpha_\tau\partial_\tau(\overline{\alpha}_\tau) + \varphi\alpha_\tau\overline{\alpha}_\tau)\,d^2x \\ &= -\frac{1}{2\pi}\tau\int\varphi\Delta\varphi\,d^2x + \frac{1}{2\pi}\int\partial_\tau(\alpha_\tau\overline{\alpha}_\tau)\,d^2x \end{aligned} \tag{3.34}$$

wird. Jetzt lässt sich die τ-Integration durchführen. Für $\alpha = \alpha_{\tau=1} = (\partial_z(v) + v\partial_z\varphi)$ lautet die regularisierte Determinante

$$\log\left(\frac{\det(i\not{D})}{\det(i\not{\partial})}\right) = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{2}\varphi\Delta\varphi - \alpha\overline{\alpha}\right)\,d^2x. \tag{3.35}$$

Mithilfe der expliziten Form für F_{01} aus Gl. 3.29 (wobei $\tau = 1$) lässt sich die Yang-Mills-Wirkung nach Gl. 2.12 bestimmen. Es ist

$$S_{YM} = \frac{1}{2}\int tr(F_{01}F^{01})dx^2 = \frac{1}{2}\int\left((\Delta\varphi + \alpha\overline{\alpha})^2 + |\partial_{\bar{z}}(\alpha) - \alpha\partial_{\bar{z}}(\varphi)|^2\right)d^2x. \tag{3.36}$$

3.2 Eichgruppe SU(3)

Die vorangegangenen Betrachtungen lassen sich in analoger Form auch für komplexere Eichsymmetrien durchführen. In diesem Abschnitt soll eine SU(3)-Symmetrie und damit der Hilbertraum $\mathscr{H} = L_2(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ betrachtet werden. Ausgangspunkt dafür ist wieder die Iwasawa-Zerlegung, die für $g \in$ SU(3) lautet

$$g = \begin{pmatrix} e^{\frac{\varphi_1}{2}} & v_1 e^{\frac{\varphi_1}{2}} & w_1 e^{\frac{\varphi_1}{2}} \\ 0 & e^{\frac{\varphi_2}{2}} & v_2 e^{\frac{\varphi_2}{2}} \\ 0 & 0 & e^{-\frac{(\varphi_1+\varphi_2)}{2}} \end{pmatrix}, \tag{3.37}$$

wobei $\varphi_i \in \mathbb{R}$, v_i, $w_i \in \mathbb{C}$. Einführen von $\not{D}_\tau$ liefert

$$g \longrightarrow g_\tau = \begin{pmatrix} e^{\tau\frac{\varphi_1}{2}} & \tau v_1 e^{\tau\frac{\varphi_1}{2}} & \tau^2 w_1 e^{\tau\frac{\varphi_1}{2}} \\ 0 & e^{\tau\frac{\varphi_2}{2}} & \tau v_2 e^{\tau\frac{\varphi_2}{2}} \\ 0 & 0 & e^{-\tau\frac{(\varphi_1+\varphi_2)}{2}} \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Definiere

$$\theta_1 := \varphi_1 - \varphi_2, \tag{3.39}$$

$$\theta_2 := \varphi_2 - \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2 = 2\varphi_2 + \varphi_1, \tag{3.40}$$

$$\theta_3 := \varphi_1 - \varphi_3 = 2\varphi_1 + \varphi_2 \tag{3.41}$$

und

$$s_i := \frac{v_i}{2}(2 + \tau\theta_i). \tag{3.42}$$

Dann ergit sich auf gleichem Weg wie in Abschnitt 3.1

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\log(\det(i\not{D}_\tau)) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\epsilon t^{s-1} tr(e^{t\not{D}^2}(F + F^\dagger))\, dt\Big|_{s=0}, \tag{3.43}$$

wobei in diesem Fall

$$F = \begin{pmatrix} -f_\tau & 0 \\ 0 & f_\tau^\dagger \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad f_\tau = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_1}{2} & \frac{v_1}{2}(2+\tau\theta_1) & \frac{\tau}{2}(v_1 v_2(2+\tau\theta_2) - w_1(4+\tau\theta_3)) \\ 0 & \frac{\varphi_2}{2} & \frac{v_2}{2}(2+\tau\theta_2) \\ 0 & 0 & \frac{\varphi_3}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

Somit lässt sich $f_\tau + f_\tau^\dagger$ durch die Matrix

$$f_\tau + f_\tau^\dagger = \begin{pmatrix} \varphi_1 & s_1 & \tau(s_3 + w_1 - v_1 s_2) \\ \overline{s_1} & \varphi_2 & s_2 \\ \tau(\overline{s_3} + \overline{w_1} - \overline{v_1 s_2}) & \overline{s_2} & \varphi_3 \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

ausdrücken. Es soll nun F_{01} ausgewertet werden. Dazu sei

$$\alpha_{i,\tau} := \tau(\partial_z(v_i) + \tau v_i \partial(\theta_i/2)), \qquad \beta_\tau := \tau(\alpha_{3,\tau} - v_1\alpha_{2,\tau}), \tag{3.46}$$

sodass sich schreiben lässt

$$g_\tau^{-1}\partial_z(g_\tau) = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{2}\partial_z(\varphi_1) & \alpha_{1,\tau} & \beta_\tau \\ 0 & \frac{\tau}{2}\partial_z(\varphi_2) & \alpha_{2,\tau} \\ 0 & 0 & \frac{\tau}{2}\partial_z(\varphi_3) \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

$$g_\tau^\dagger\partial_{\overline{z}}(g_\tau^{\dagger^{-1}}) = \begin{pmatrix} -\frac{\tau}{2}\partial_{\overline{z}}(\varphi_1) & 0 & 0 \\ -\overline{\alpha}_{1,\tau} & -\frac{\tau}{2}\partial_{\overline{z}}(\varphi_2) & 0 \\ -\overline{\beta}_\tau & -\overline{\alpha}_{2,\tau} & -\frac{\tau}{2}\partial_{\overline{z}}(\varphi_3) \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

Die explizite Form von $F_{01,\tau}$ lautet dann

$$F_{01} = \begin{pmatrix} -(\alpha_{1,\tau}\overline{\alpha}_{1,\tau} + \beta_\tau\overline{\beta}_\tau + \tau\Delta\varphi_1) & \alpha_{1,\tau}\frac{\tau}{2}\partial_{\overline{z}}(\theta_1) - \overline{\alpha}_{2,\tau}\beta_\tau - \partial_{\overline{z}}(\alpha_1) & \beta_\tau\frac{\tau}{2}\partial_{\overline{z}}(\theta_3) - \partial_{\overline{z}}(\beta_\tau) \\ \overline{\alpha}_{1,\tau}\frac{\tau}{2}\partial_z(\theta_1) - \alpha_{2,\tau}\overline{\beta}_\tau - \partial_z(\overline{\alpha}_{1,\tau}) & \alpha_{1,\tau}\overline{\alpha}_{1,\tau} - \alpha_{2,\tau}\overline{\alpha}_{2,\tau} - \tau\Delta\varphi_2 & \alpha_{2,\tau}\frac{\tau}{2}\partial_{\overline{z}}(\theta_2) - \overline{\alpha}_{1,\tau}\beta_\tau - \partial_{\overline{z}}(\alpha_{2,\tau}) \\ \overline{\beta}_\tau\frac{\tau}{2}\partial_z(\theta_3) - \partial_z(\overline{\beta}_\tau) & \overline{\alpha}_{2,\tau}\frac{\tau}{2}\partial_z(\theta_2) - \alpha_{1,\tau}\overline{\beta}_\tau - \partial_z(\overline{\alpha}_{2,\tau}) & \beta_\tau\overline{\beta}_\tau + \alpha_{2,\tau}\overline{\alpha}_{2,\tau} - \tau\Delta\varphi_3 \end{pmatrix}. \tag{3.49}$$

Als Spur über den Farbraum ergibt sich

$$\begin{aligned} tr_c(F_{01}(f_\tau + f_\tau^\dagger)) = &- \varphi_1(\alpha_{1,\tau}\overline{\alpha}_{1,\tau} + \beta_\tau\overline{\beta}_\tau + \tau\Delta\varphi_1) \\ &+ \overline{s_1}(\alpha_{1,\tau}\frac{\tau}{2}\partial_{\overline{z}}(\theta_1) - \overline{\alpha}_{2,\tau}\beta_\tau - \partial_{\overline{z}}(\alpha_{1,\tau})) \\ &+ (\tau(\overline{s_3} + \overline{w_1} - \overline{v_1 s_2}))(\beta_\tau\frac{\tau}{2}\partial_{\overline{z}}(\theta_3) - \partial_{\overline{z}}(\beta_\tau)) \\ \\ &+ s_1(\overline{\alpha}_{1,\tau}\frac{\tau}{2}\partial_z(\theta_1) - \alpha_{2,\tau}\overline{\beta}_\tau - \partial_z(\overline{\alpha}_{1,\tau})) \\ &+ \varphi_2(\alpha_{1,\tau}\overline{\alpha}_{1,\tau} - \alpha_{2,\tau}\overline{\alpha}_{2,\tau} - \tau\Delta\varphi_2) \\ &+ \overline{s_2}(\alpha_{2,\tau}\frac{\tau}{2}\partial_{\overline{z}}(\theta_2) - \overline{\alpha}_{1,\tau}\beta_\tau - \partial_(\overline{z})\alpha_{2,\tau}) \\ \\ &+ (\tau(s_3 + w_1 - v_1 s_2))(\overline{\beta}_\tau\frac{\tau}{2}\partial_z(\theta_3) - \partial_z(\overline{\beta}_\tau)) \\ &+ s_2(\overline{\alpha}_{2,\tau}\frac{\tau}{2}\partial_z(\theta_2) - \alpha_{1,\tau}\overline{\beta}_\tau - \partial_z(\overline{\alpha}_{2,\tau})) \\ &+ \varphi_3(\beta_\tau\overline{\beta}_\tau + \alpha_{2,\tau}\overline{\alpha}_{2,\tau} - \tau\Delta\varphi_3). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Eine Vereinfachung der einzelnen Terme liefert wieder partielle Integration. Aus Abschnitt 3.1 ist bekannt dass

$$\int s_i(\overline{\alpha}_{i,\tau}\frac{\tau}{2}\partial_z(\theta_i) - \partial_z(\overline{\alpha}_{i,\tau})d^2x = \int \left(\overline{\alpha}_{i,\tau}\partial_\tau(\alpha_{i,\tau}) + \frac{\theta_i}{2}\alpha_{i,\tau}\overline{\alpha}_{i,\tau}\right) d^2x. \tag{3.51}$$

Unter Verwendung dieser Formel lässt sich nachrechnen, dass

$$\begin{aligned}
&\int \left((\tau(s_3 + w_1 - v_1 s_2))(\overline{\beta}_\tau \frac{\tau}{2}\partial_z(\theta_3) - \partial_z(\overline{\beta}_\tau)) + s_2\alpha_{1,\tau}\overline{\beta}_\tau - s_1\alpha_{2,\tau}\overline{\beta}_\tau\right)\ d^2x \\
&= \int \overline{\beta}_\tau \left(\tau(s_3 + w_1 - v_1 s_2)\frac{\tau}{2}\partial_z(\theta_3) - \partial_z(\tau(s_3 + w_1 - v_1 s_2)) + s_2\alpha_{1,\tau} - s_1\alpha_{2,\tau}\right)\ d^2x \\
&= \int \left(\overline{\beta}_\tau\partial_\tau(\beta_\tau) + \frac{\theta_3}{2}\beta_\tau\overline{\beta}_\tau\right)\ d^2x.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Dies vereinfacht das Integral über Gl.3.50 erheblich. Es ergibt sich

$$\int tr_c(F_{01}(f_\tau + f_\tau^\dagger))\ d^2x = -\int \frac{\tau}{2}\varphi_i\Delta\varphi_i + \partial_\tau(\alpha_{1,\tau}\overline{\alpha}_{1,\tau} + \alpha_{2,\tau}\overline{\alpha}_{2,\tau} + \beta_\tau\overline{\beta}_\tau)\ d^2x. \tag{3.53}$$

Somit folgt unter Ausführung der τ-Integration das Ergebnis

$$\log\left(\frac{\det(i\not{D})}{\det(i\not{\partial})}\right) = \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}\Delta\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)\ d^2x. \tag{3.54}$$

Dabei wurden die φ_i und α_i zu Vektoren

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ -(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

zusammengefasst. Unter Berücksichtigung von $\varphi_3 = -(\varphi_1 + \varphi_2)$ lässt sich das Ergebnis symmetrisieren:

$$\log\left(\frac{\det(i\not{D})}{\det(i\not{\partial})}\right) = \frac{1}{4\pi}\int d^2x\left(\varphi_1\Delta\varphi_1 + \varphi_2\Delta\varphi_2 + \frac{1}{2}(\varphi_1\Delta\varphi_2 + \varphi_2\Delta\varphi_1) - \boldsymbol{\alpha}\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right). \tag{3.56}$$

Durch Einsetzen von Gl. 3.49 in Gl. 2.12 ergibt sich die Yang-Mills-Wirkung

$$S_{YM} = \frac{1}{4}\int \left((\tau\Delta\varphi_1 + \alpha_1\overline{\alpha_1} + \beta\overline{\beta})^2 + (\tau\Delta\varphi_2 + \alpha_2\overline{\alpha_2} + \alpha_1\overline{\alpha_1})^2 + (\tau\Delta\varphi_3 - \beta\overline{\beta} - \alpha_2\overline{\alpha_2})^2\right)\, d^2x$$
$$+\frac{1}{2}\int \left(|\alpha_1\tau\partial_{\bar{z}}(\theta_1) - \partial_{\bar{z}}(\alpha_1) - 2\overline{\alpha_2}\beta|^2 + |\alpha_2\tau\partial_{\bar{z}}(\theta_2) - \partial_{\bar{z}}(\alpha_2) + 2\overline{\alpha_1}\beta|^2 + |\beta\tau\partial_{\bar{z}}(\theta_3) - \partial_{\bar{z}}(\beta)|^2\right) d^2x. \tag{3.57}$$

Eine alternative Methode zur Bestimmung von $\det(i\not{D})$ wird in [5] ausgeführt. Hierbei wird nicht mit einer expliziten Zerlegung gerechnet, sondern eine Matrix

$$J = gg^\dagger \tag{3.58}$$

definiert. Diese ist eichinvariant. Die auftretenden Größen werden anstelle von g durch dieses J ausgedrückt.

Für den Fall einer SU(3)-Symmetrie sowie einer unendlichen ebenen Geometrie ohne Betrachtung von Randbedingugnen ergibt sich die Lösung

$$\log\left(\frac{\det(i\not{D})}{\det(i\not{\partial})}\right) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^1 d\tau \int d^2x\ tr\left(J^{-1}\partial_z(J)\partial_{\bar{z}}(J^{-1}\partial_\tau(J))\right). \tag{3.59}$$

Es lässt sich zeigen, dass die hier bestimmte Lösung Gl. 3.56 mit den Ergebnissen aus [5] übereinstimmt. Dazu wird die gewählte Zerlegung Gl. 3.37 in Gl. 3.59 eingesetzt und durch partielle Integration der einzelnen Summanden sowie zusammenfassen zu α_i- und β-Termen auf Gl. 3.56 gebracht. Die Vorteile der Methode aus [5] liegen auf der Hand, da diese nicht nur für beliebige Zerlegungen sondern auch für allgemeine Eichgruppen sowie unter Einführung von Randbedingungen gültige Ergebnisse liefert.

3.3 Verallgemeinerung auf SU(n)

Im folgenden Abschnitt sollen die Ergebnisse aus 3.1 und 3.2 auf eine beliebige Eichgrupppe SU(n) extrapoliert werden. Die verallgemeinerte Iwasawa-Zerlegung lässt sich für $\varphi_i \in \mathbb{R},\ v_{i,j} \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i > j \\ v_{i,j-i+1}e^{\frac{\varphi_i}{2}} & \text{für } j \geq i \end{cases}. \tag{3.60}$$

Dabei ist $v_{i,1} = 1$ und wegen $g \in \mathrm{SU(n)}$ $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k$.

Für $\not{D}_\tau$ geht g über zu

$$g_{ij} \to (g_\tau)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i > j \\ \tau^{j-i} v_{i,j-i+1} e^{\tau \frac{\varphi_i}{2}} & \text{für } j \geq i \end{cases}. \tag{3.61}$$

Die Inverse zu g ist gegeben durch

$$(g_\tau)^{-1}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < j \\ \tau^{j-i} r_{i,j-i+1} e^{-\tau \frac{\varphi_j}{2}} & \text{für } i \geq j \end{cases}. \tag{3.62}$$

Die $r_{i,j}$ sind rekursiv definiert als

$$r_{i,1} = 1, \qquad r_{i,j} = -\sum_{k=1}^{j-1} v_{k,j-k+1} r_{i,k}. \tag{3.63}$$

Weiterhin seien für $\theta_{i,j} := \frac{1}{2}(\varphi_i - \varphi_j)$

$$s_{i,j} = \sum_{l=1}^{j-1} \tau^{j-2} v_{l+i-1,j-l+1} r_{i,l} \left((j-l) + \tau \theta_{l+i-1,j} \right), \tag{3.64}$$

sodass

$$F_\tau = \begin{pmatrix} -f_\tau & 0 \\ 0 & f_\tau^\dagger \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad f_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i > j \\ \frac{\varphi_i}{2} & \text{für } i = j \\ s_{i,j-i+1} & \text{für } j > i \end{cases}. \tag{3.65}$$

Damit ist

$$\left(f + f^\dagger \right)_{ij} = \begin{cases} s_{i,j-i+1} & \text{für } j > i \\ \bar{s}_{j,i-j+1} & \text{für } j < i \\ \varphi_i & \text{für } i = j \end{cases}. \tag{3.66}$$

Wie in den vorangegangenen Abschnitten lässt sich F_{01} wieder durch die Zerlegung von A_μ ausdrücken: Definiere dazu verallgemeinerte $\alpha_{i,j}$ als

$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} \tau^{j-2} r_{i,k} \left(\partial_z(v_{k+i-1,j-k+1}) + v_{k+i-1,j-k+1}\frac{\tau}{2}\partial_z(\varphi_{k+i-1})\right). \tag{3.67}$$

Dann sind für

$$F_{01} = \frac{1}{2}\left(\partial_z\left(g_\tau^\dagger \partial_{\bar{z}}(g_\tau^{\dagger^{-1}})\right) - \partial_{\bar{z}}\left(g_\tau^{-1}\partial_z(g_\tau)\right) + \left[g_\tau^{-1}\partial_z(g_\tau), g_\tau^\dagger \partial_{\bar{z}}(g_\tau^{\dagger^{-1}})\right]\right) \tag{3.68}$$

die einzelnen Summanden gegeben durch

$$g_\tau^{-1}\partial_z(g_\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } i > j \\ \alpha_{i,j-i+1} & \text{für } i \leq j \end{cases} \tag{3.69}$$

$$g_\tau^\dagger \partial_{\bar{z}}(g_\tau^{\dagger^{-1}}) = \begin{cases} 0 & \text{für } i < j \\ -\overline{\alpha}_{j,i-j+1} & \text{für } i \geq j \end{cases}. \tag{3.70}$$

Einsetzen liefert für den Feldstärketensor

$$(F_{01})_{ij} = \begin{cases} -\partial_{\bar{z}}(\alpha_{i,j-i+l}) + \sum_{l=1}^{i} \alpha_{l,j-l+1}\overline{\alpha}_{l,i-l+1} - \sum_{l=j}^{n} \alpha_{i,l-i+1}\overline{\alpha}_{j,l-j+1} & \text{für } i < j \\ -\partial_z(\overline{\alpha}_{j,i-j+1}) + \sum_{l=1}^{j} \alpha_{l,j-l+1}\overline{\alpha}_{l,i-l+1} - \sum_{l=i}^{n} \alpha_{i,l-i+1}\overline{\alpha}_{j,l-j+1} & \text{für } i > j \\ -\tau\Delta\varphi_i + \sum_{l=1}^{i-1} \alpha_{l,i-l+1}\overline{\alpha}_{l,i-l+1} - \sum_{l=i+1}^{n} \alpha_{i,l-i+1}\overline{\alpha}_{i,l-i+1} & \text{für } i = j \end{cases}. \tag{3.71}$$

Also ergibt sich die Farbraum-Spur als

$$\begin{aligned} tr_c\left(F_{01}(f_\tau + f_\tau^\dagger)\right) = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[& \left(-\tau\varphi_i\Delta\varphi_i + \varphi_i \sum_{l=1}^{i-1} |\alpha_{l,i-l+1}|^2 - \varphi_i \sum_{l=i+1}^{n} |\alpha_{i,l-i+1}|^2\right) \\ & + \sum_{k=1}^{i-1}\left(-\partial_z(\overline{\alpha}_{k,i-k+1}) + \sum_{l=1}^{k} \alpha_{l,k-l+1}\overline{\alpha}_{l,i-l+1} - \sum_{l=i}^{n} \alpha_{i,l-i+1}\overline{\alpha}_{k,l-k+1}\right) s_{k,i-k+1} \\ & + \sum_{k=i+1}^{n}\left(-\partial_{\bar{z}}(\alpha_{i,k-i+1}) + \sum_{l=1}^{i} \alpha_{l,k-l+1}\overline{\alpha}_{l,i+l+1} - \sum_{l=k}^{n} \alpha_{i,l-i+1}\overline{\alpha}_{k,l-k+1}\right) \overline{s}_{i,k-i+1} \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Die Summen über k lassen sich wie in den vorhergegangenen Abschnitten durch partielle Integration auswerten. Dazu werden bei der l-Summation $l = k$ und $l = i$ abgespalten und zusammengezogen. Es ist

$$\begin{aligned}
&\int \left(-\partial_z(\overline{\alpha}_{k,i-k+1}) + \overline{\alpha}_{k,i-k+1}\tau\partial_z(\theta_{k,i})\right) s_{k,i-k+1}\; d^2x \\
=& \int \overline{\alpha}_{k,i-k+1}\left(\partial_z(s_{k,i-k+1}) + \tau\partial_z(\theta_{k,i})s_{k,i-k+1}\right)\; d^2x \\
=& \int \overline{\alpha}_{k,i-k+1}\left(\partial_z\left(\sum_{m=1}^{i-k}\tau^{i-k-1}v_{m+k-1,i-k-m+2}r_{k,m}((i-k+1-m)+\tau\theta_{m+k-1,i-k+1})\right)\right. \\
&\left. + \tau\partial_z(\theta_{k,i})\left(\sum_{m=1}^{i-k}\tau^{i-k-1}v_{m+k-1,i-k-m+2}r_{k,m}((i-k+1-m)+\tau\theta_{m+k-1,i-k+1})\right)\right)\; d^2x. \qquad (3.73)
\end{aligned}$$

Sortieren nach $(i-k+1-m)$- und $\theta_{m+k-1,i-k+1}$-Termen, sowie Auseinanderziehen derselben liefert $(\overline{\alpha}_{k,i-k+1}\partial_\tau(\alpha_{k,i-k+1}) + \theta_{k,i}\alpha_{k,i-k+1}\overline{\alpha}_{k,i-k+1})$ sowie einige Restterme. Die Behandlung dieser ist rechnerisch recht aufwendig und soll daher hier nicht im Detail ausgeführt werden. Summiert man über sämtliche Indizes, so ergibt sich durch Umsortieren und Umindizierung

$$\text{Reste} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\alpha_{k,i-k+1}\left(\sum_{l=1}^{i-k}\alpha_{k,l-k+1}s_{i,l-i+1} - \sum_{l=k}^{i-1}\alpha_{l,i-l+1}s_{l,k-l+1}\right). \qquad (3.74)$$

Durch Vertauschen von l und k in der ersten bzw. l und i in der zweiten Summe, sowie unter Ausnutzen von $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} f(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-i} f(i,j)$ ergibt sich genau die l-Summen aus Gl. 3.72, sodass sich diese Terme wegheben. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\int sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\left(-\partial_z(\overline{\alpha}_{k,i-k+1}) + \overline{\alpha}_{k,i-k+1}\frac{\tau}{2}\partial_z(\theta_{k,i}) + \sum_{l=1}^{k}\alpha_{l,k-l+1}\overline{\alpha}_{l,i-l+1} - \sum_{l=i}^{n}\alpha_{i,l-i+1}\overline{\alpha}_{k,l-k+1}\right) s_{k,i-k+1}\; d^2x \\
=& \int sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\left(\overline{\alpha}_{k,i-k+1}\partial_\tau(\alpha_{k,i-k+1}) + \theta_{k,i}\alpha_{k,i-k+1}\overline{\alpha}_{k,i-k+1}\right)\; d^2x. \qquad (3.75)
\end{aligned}$$

Da über sämtliche i und k summiert wird, gilt

$$sum_{i=1}^{n}\left[\varphi_i\sum_{l=1}^{i-1}|\alpha_{l,i-l+1}|^2 - \varphi_i\sum_{l=i+1}^{n}|\alpha_{l,l-i+1}|^2\right] = sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{i-1}\theta_{l,i}|\alpha_{l,i-l+1}|^2 + \sum_{l=i+1}^{n}\theta_{l,i}|\alpha_{i,l-i+1}|^2\right]. \qquad (3.76)$$

Auch diese Terme heben sich somit weg. Aufgrund der Symmetrie der Summen für $i < k$ und $i > k$ folgt durch Änderung der Indizes

$$tr(F_{01}(f + f^\dagger)) = \int \left(-\tau \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \Delta \varphi_i + \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{n-i} \partial_\tau (\overline{\alpha}_{k,i} \alpha_{k,i}) \right) d^2x. \tag{3.77}$$

τ-Integration liefert dann die Determinante:

$$\begin{aligned}
\log \left(\frac{\det(i\not{D})}{\det(i\not{\partial})} \right) &= \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \Delta \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\alpha} \overline{\boldsymbol{\alpha}} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i \Delta \varphi_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \varphi_i \Delta \varphi_j - \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{n-i} \overline{\alpha}_{k,i} \alpha_{k,i} \right).
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Zum Schluss kann aus F_{01} noch die Yang-Mills-Wirkung bestimmt werden. Diese ist für SU(n) gegeben durch

$$\begin{aligned}
S_{YM} = \int \; & \frac{1}{4} \sum_i \left(\tau \Delta \varphi_i + \sum_{l=1}^{i-1} \alpha_{l,i-l+1} \overline{\alpha}_{l,i-l+1} - \sum_{l=i+1}^{n} \alpha_{i,l-i+1} \overline{\alpha}_{i,l-i+1} \right)^2 \\
& + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{i-1} \left| -\partial_z (\overline{\alpha}_{k,i-k+l}) + \sum_{l=1}^{k} \alpha_{l,k-l+1} \overline{\alpha}_{l,i-l+1} - \sum_{l=i}^{n} \alpha_{i,l-i+1} \overline{\alpha}_{k,l-k+1} \right|^2 \\
& + \frac{1}{4} \sum_{k=i+1}^{n} \left| -\partial_{\overline{z}} (\alpha_{i,k-i+l}) + \sum_{l=1}^{i} \alpha_{l,k-l+1} \overline{\alpha}_{l,i-l+1} - \sum_{l=k}^{n} \alpha_{i,l-i+1} \overline{\alpha}_{k,l-k+1} \right|^2 d^2x.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Um zu überprüfen, ob die hier angestellten Betrachtungen mit denen aus Abschnitt 3.1 und 3.2 vereinbar sind kann nun $n = 2$ bzw. $n = 3$ in die relevanten Formeln eingesetzt werden. Es stellt sich heraus, dass diese sich auf die in den vorangegangenen Abschnitten bestimmten Ergebnisse reduzieren.

4 Nullmoden auf T^2

4.1 Einführung

Die Einführung der Temperatur in die quantenfeldtheoretische Beschreibung über den sogenannten Formalismus der imaginären Zeit liefert einen engen Zusammenhang zwischen der Zeit x_0 und der inversen Temperatur $\beta = \frac{1}{k_B T}$ [18]. In diesem Kontext wird deutlich, dass die bislang angenommene Unbeschränktheit in der Zeit- bzw. x_0-Richtung eine verschwindende Temperatur impliziert. In diesem Teil der Arbeit soll nun zu endlichen Temperaturen übergegangen werden. Die dazu geforderte Periodizität in der Temperatur lässt sich durch Einführung einer antiperiodischen Zeit x_0 mit Periode β umsetzen [2]. Zusätzlich ist es sinnvoll, auch x_1 durch eine Periode L zu beschränken, da, wie weiter unten deutlich wird, die Anzahl der Nullmoden mit dem Fluss zusammenhängt und somit für ein beschränktes x_1 endlich ist. Dabei darf die Periodizität nur bis auf eine Eichtransformation gefordert werden [6], [2]. Damit besitzt die Raumzeit die Geometrie eines Torus mit Volumen $V = \beta L$. Spinoren darauf müssen die Randbedingungen

$$A_\mu(x_0 + \beta, x_1) = A_\mu(x_0, x_1), \tag{4.1}$$

$$\psi(x_0 + \beta, x_1) = -\psi(x_0, x_1) \qquad \text{sowie} \tag{4.2}$$

$$A_\mu(x_0, x_1 + L) = U A_\mu(x; 0, x_1) U^{-}1 + i\partial_\mu(U) U^{-1}, \tag{4.3}$$

$$\psi(x_0, x_1 + L) = U\psi(x_0, x_1) \tag{4.4}$$

erfüllen.

Aufgrund der veränderten Geometrie treten auf dem Torus topologische Effekte – sogenannte Faserbündel – auf, deren Beschreibung die Einführung eines zusätzlichen Feldes erforderlich macht. Auf dem Torus lautet Gl. 3.5 dann:

$$A_z = g^{-1}(\mathbb{1} i\partial_z + \tilde{A}_z) g, \tag{4.5}$$

$$A_{\bar{z}} = g^\dagger(\mathbb{1} i\partial_z + \tilde{A}_{\bar{z}}) {g^{-1}}^\dagger. \tag{4.6}$$

Dieses Feld $\tilde{A}$ lässt sich derart wählen, dass es nur von x_1 abhängt:

$$\tilde{A}_0 = mx_1 + c_0 \qquad \text{und} \qquad \tilde{A}_1 = c_1. \tag{4.7}$$

Im Allgemeinen ist $\tilde{A}_\mu$ – und somit auch m und c_μ – eine Diagonalmatrix.

Auf T^2 besitzt $\not{D}$ nichttriviale Eigenfunktionen, deren zugeordneter Eigenwert 0 ist. Diese Nullmoden verändern die fermionische Determinante signifikant. Daher soll hier eine Bestimmung der Nullmoden erfolgen. Für die weitere Betrachtung wird dazu ψ nach Chiralität in zwei Komponenten zerlegt:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Analog zu Abschnitt 3 lässt sich aus Gl. 4.5 eine Zerlegung für $\not{D}$ herleiten:

$$\not{D} = G\tilde{\not{\partial}}G^\dagger. \tag{4.9}$$

Dabei ist $\tilde{\not{\partial}}$ gegeben durch

$$\tilde{\not{\partial}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}\partial_z - i\tilde{A}_z \\ \mathbb{1}\partial_{\bar{z}} - i\tilde{A}_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Wie aus Gl. 4.9 erkenntlich wird ist

$$\not{D}\psi = G\tilde{\not{\partial}} \begin{pmatrix} g^\dagger \psi^+ \\ g^{-1}\psi^- \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Somit gilt für die Nullmoden $\tilde{\psi}^\pm$ von $\tilde{\not{\partial}}^2$ und $\psi^\pm$ von $\tilde{\not{D}}^2$ die Beziehung $\psi^+ = g^\dagger \tilde{\psi}^+$ bzw. $\psi^- = g^{-1}\tilde{\psi}^-$. Es genügt daher die Nullmoden von $\tilde{\not{\partial}}^2$ zu betrachten.

4.2 Schwinger-Modell

Zunächst sollen die Nullmoden im abelschen Fall[1] diskutiert werden. Später wird sich herausstellen, dass sich höhere Eichgruppen auf diesen Fall zurück führen lassen. Dabei wird sich dieser Abschnitt vornehmlich an [4] und [2] sowie bezüglich der Notation an [6] orientieren.

Einen wichtigen Ansatzpunkt zur Beschreibung der Nullmoden liefert im Schwinger-Modell das Atiyah-Singer-Indextheorem (vgl. [4], [2]): Dieses besagt, dass der Index $n^+ - n^-$ des Dirac Operators – also die Differenz aus der Anzahl rechts- und linkshändiger Nullmoden – gleich der Windungszahl

$$k = \frac{1}{4\pi} \int_{T^2} F_{\mu\nu}\, d^2x = \frac{\Phi}{2\pi} \tag{4.12}$$

ist. Wie in [19] formal bewiesen und weiter unten veranschaulicht wird, können im Schwinger-Modell nur Nullmoden einer Chiralität existieren. Entsprechend ist $|k|$ hier gleich der Anzahl der Nullmoden; deren Chiralität ist abhängig vom Vorzeichen von k. Es treten somit – außer im Fall eines verschwindenden Flusses Φ – Nullmoden auf. Hier wird auch die oben getroffene Aussage deutlich, dass die Anzahl der Nullmoden für ein periodisches x_1 endlich wird, da die Integration in diesem Fall nur bis L läuft und somit der Fluss durch eine endliche Fläche betrachtet wird.

Im abelschen Fall sind die Elemente $U \in \mathrm{U}(1)$ gegeben durch skalare Funktionen

$$U = e^{i\alpha(x_0,x_1)}. \tag{4.13}$$

Aus Normierungsgründen muss der lineare Anteil von $\tilde{A}$ antiproportional zu V sein, d.h. $m = -\hat{m}\frac{x_1}{V}$. Zur Bestimmung von $\hat{m}$ betrachte nun die Randbedingung Gl. 4.3:

$$\tilde{A}_\mu(x_1 + L) + \tilde{A}_\mu(x_1) = -\hat{m}\frac{1}{\beta} = U^{-1} i\partial_0 U = e^{-i\alpha(x_0,x_1)}\partial_\mu(\alpha)e^{i\alpha(x_0,x_1)} = \partial_\mu(\alpha). \tag{4.14}$$

Dies ist erfüllt für

$$\alpha = \frac{x_0}{\beta}\hat{m}. \tag{4.15}$$

1 Das Modell für masselose Fermionen in einer zweidimensionalen Raumzeit mit abelscher Eichtheorie U(1) heißt Schwinger-Modell.

Somit ist $U = e^{-1\frac{x_0}{\beta}\tilde{m}}$. Die Randbedingung Gl.4.2 liefert nun

$$U(x_0+\beta) = U(x_0) \qquad \Rightarrow \qquad e^{i\hat{m}} = 1. \tag{4.16}$$

Somit ist $\tilde{m} = 2\pi k$ für ein ganzzahliges k. Dieses k entspricht dabei der Windungszahl und somit nach dem Indextheorem der Anzahl der Nullmoden.

Für den konstanten Anteil betrachte die Eichfunktion U

$$U = e^{2\pi i(\frac{p}{\beta}\hat{c_0}x_0 + \frac{q}{L}\hat{c_1}x_1)}, \tag{4.17}$$

wobei p und q Windungszahlen in x_0- bzw. x_1-Richtung entsprechen. Dies liefert

$$c_0 \to c_0 + i\partial_0(U)U^{-1}\hat{c_0} = c_0 - 2\pi\frac{p}{\beta}\hat{c_0}, \tag{4.18}$$

$$c_1 \to c_1 - 2\pi\frac{q}{L}\hat{c_1} \tag{4.19}$$

und damit eine Verschiebung von c_μ. Konstruiere

$$c_0 = 2\pi\frac{h_0}{\beta}, \tag{4.20}$$

$$c_1 = 2\pi\frac{h_1}{L} \tag{4.21}$$

für ein $h_\mu \in [0,1]$. Dies liefert die gewünschte Periodizität in der Eichtransformation.

Somit wird das gesamte Feld $\tilde{A} = \tilde{A}_0 - i\tilde{A}_1$ beschrieben durch

$$\tilde{A}_0 = -\frac{2\pi k}{V}x_1 + \frac{2\pi h_0}{\beta}, \tag{4.22}$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{2\pi h_1}{L}. \tag{4.23}$$

Mit Gl. 4.10 folgt

$$\tilde{\not{\partial}}^2 = \begin{pmatrix} ((i\partial_0 + \tilde{A}_0)^2 + (i\partial_1 + \tilde{A}_1)^2 - m) & 0 \\ 0 & ((i\partial_0 + \tilde{A}_0)^2 + (i\partial_1 + \tilde{A}_1)^2 + m) \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

$\tilde{\not{\partial}}^2$ ist also diagonal. Damit ergeben sich zwei analoge Differentialgleichungen für ψ^+ und ψ^-, die sich von einander unabhängig behandeln lassen. Zusammengefasst lautet die Nullmodengleichung

$$((i\partial_0 + \tilde{A}_0)^2 + (i\partial_1 + \tilde{A}_1)^2 \mp m)\chi^{\pm} = 0. \tag{4.25}$$

Wähle zum Umformen dieser Gleichung zunächst einen geeigneten Ansatz: Da $\tilde{A}$ nicht von x_0 abhängt, χ jedoch schon, darf $\partial_0\chi$ keinen weiteren x_0-Term liefern; die Abhängigkeit $\chi = \chi(x_0)$ ist also exponentiell. Über Randbedingung 4.2 lässt sich der Faktor bestimmen als $p_0 = (2p-1)\frac{\pi}{\beta}$ für ein ganzzahliges $p = 1...|k|$. Die Betrachtung des konstanten Anteils von $\tilde{A}$ legt zudem nahe, einen in c_1x_1 exponentiellen Term aus χ herauszuziehen. Damit lautet der Ansatz

$$\chi_p = e^{ip_0x_0}e^{ic_1x_1}\xi(x_1). \tag{4.26}$$

Durch Einsetzen dieses Ansatzes vereinfacht sich die Differentialgleichung Gl. refdgl0 zu

$$(\partial_1^2 + (\tilde{A}_0 - p_0)^2 \mp m)\xi = 0. \tag{4.27}$$

Führe nun eine neue Größe y_p ein, für die $(\tilde{A}_0 - p_0) = my_p$. Diese ist gegeben durch

$$y_p = x_1 + \frac{L}{k}(p - a_0). \tag{4.28}$$

Gl. 4.25 reduziert sich damit auf die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators im Grundzustand:

$$(\partial_y^2 - m^2y_p^2 \mp m)\xi = 0. \tag{4.29}$$

Dabei existieren Lösungen für diese Gleichung, falls $\mp m > 0$ und somit $\mp k = |k|$. Dies veranschaulicht, dass im abelschen Fall Nullmoden nur für die Chiralität $-sgn(k)$ existieren können. Die Lösungen sind in diesem Fall gegeben durch Gauß-Funktionen. Somit ist

$$\chi_p(x_0, x_1) = e^{ip_0 x_0} e^{ic_1 x_1} \xi(x_1) = e^{ip_0 x_0} e^{ic_1 x_1} e^{-\frac{|m|}{2} y_p^2(x_1)}. \tag{4.30}$$

χ_p erfüllen noch nicht die Randbedingung Gl. 4.4:

$$\chi_p(x_0, x_1 + L) = e^{2\pi i h_1} e^{-i\frac{\Phi}{\beta} x_0} \chi_{p+k}(x_0, x_1) \neq e^{-i\frac{\Phi}{\beta} x_0} \chi_p(x_0, x_1). \tag{4.31}$$

Da Gl.4.29 eine lineare Differentialgleichung ist, lässt sich stattdessen eine Superposition dieser Lösungen betrachten. Aus obenstehender Identität wird ersichtlich, dass

$$\tilde{\psi}_p(x_0, x_1) = C \sum_n e^{2\pi i h_1 n} \chi_p(x_0, x_1) \tag{4.32}$$

Gl. 4.4 erfüllt. Normierung auf $\int \tilde{\psi}_p \tilde{\psi}_p^* d^2x = 1$ liefert dabei die Konstante

$$C = \left(\frac{2|k|}{\beta^2 V} \right)^{1/4}. \tag{4.33}$$

Diese Lösungen lassen sich durch die Jacobi-Theta-Funktionen ausdrücken. Diese sind definiert als

$$\Theta_{a,b}(z, i\tau) = \sum_n e^{-\pi\tau(n+a)^2 + 2\pi i(n+a)(z+b)}. \tag{4.34}$$

Insbesondere ist

$$\Theta_{a,b}(0, i\tau) = \sum_n e^{-\pi\tau(n+a)^2 + 2\pi i b(n+a)}. \tag{4.35}$$

Mit $\tau = \frac{L}{\beta}$ wird dann aus Gl. 4.32:

$$\tilde{\psi}_p = \left(\frac{2|k|}{\beta^2 V} \right)^{1/4} e^{2\pi i (\frac{h_0 x_0}{\beta} - \frac{k x_0 x_1}{V})} \Theta_{\frac{x_1}{L} + \frac{p - a_0}{|k|}, \frac{k x_0}{\beta} + a_1}(0, i|k|\tau). \tag{4.36}$$

4.3 Eichgruppe SU(2)

Die Betrachtung der Nullmoden in höheren Eichgruppen lässt sich in weiten Teilen auf den bereits behandelten Fall des Schwinger-Modells zurückführen. Insbesondere für SU(2) lassen sich viele Ergebnisse weiter verwenden. So auch $\tilde{A}$: Als Generatoren von SU(2) werden typischerweise die Pauli-Matrizen σ_a gewählt. Da $\tilde{A}$ diagonal ist, muss gelten

$$U(x_0, x_1) = e^{\alpha^3(x_0,x_1)\sigma_3} \tag{4.37}$$

und damit auch $\tilde{A} \propto \sigma_3$. Da der Betrag beider Eigenwerte von σ_3 1 ist, erfüllt

$$\tilde{A}_\mu \to \tilde{A}_\mu \sigma_3 \tag{4.38}$$

die gewünschten Eigenschaften. Somit ist das Feld gegeben durch

$$\tilde{A}_0 = -\frac{2\pi k}{V} x_1 \sigma_3 + \frac{2\pi h_0}{\beta}\sigma_3, \tag{4.39}$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{2\pi h_1}{L}\sigma_3 \tag{4.40}$$

für ein ganzzahliges k[2] und $h_\mu \in [0,1]$. Der Operator $\tilde{\not{\partial}}$ ergibt sich dann als

$$\tilde{\not{\partial}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}\partial_z - i\tilde{A}_z\sigma_3 \\ \mathbb{1}\partial_z - i\tilde{A}_{\bar{z}}\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

und es ist

$$\tilde{\not{\partial}}^2 = \begin{pmatrix} (\mathbb{1}i\partial_0 + \tilde{A}_0\sigma_3)^2 + (\mathbb{1}i\partial_1 + \tilde{A}_1\sigma_3)^2 - m\sigma_3) & 0 \\ 0 & (\mathbb{1}i\partial_0 + \tilde{A}_0\sigma_3)^2 + (\mathbb{1}i\partial_1 + \tilde{A}_1\sigma_3)^2 + m\sigma_3) \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

diagonal. Es lassen sich also wiederum alle Komponenten von ψ separat betrachten und es genügt, die Differentialgleichung

2 Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass in SU(2) k nicht gleich dem Index des Dirac-Operators ist. Dieser verschwindet, da es, wie sich herausstellen wird, gleich viele linkshändige wie rechtshändige Nullmoden gibt. Die physikalische Bedeutung von k ist in SU(2) die einer Monopolzahl.

$$((i\partial_0 + a\tilde{A}_0)^2 + (i\partial_1 + a\tilde{A}_1)^2 \mp am)\chi^{\pm} = 0 \tag{4.43}$$

zu lösen, wobei $a = \pm 1$ aus dem Spektrum von σ_3 ist. Die Lösung hierfür ist für $m \to am$ die bereits aus dem Schwinger-Modell bekannte:

Definiere

$$\tilde{m} = am \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{k} = ak, \tag{4.44}$$

$$\tilde{c}_\mu = ac_\mu \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{h}_\mu = ah_\mu \tag{4.45}$$

und wähle den leicht veränderten Ansatz

$$\chi_{a,p} = e^{ip_0x_0}e^{i\tilde{c}_1x_1}\xi(x_1). \tag{4.46}$$

Dann ergibt sich mit

$$y_{a,p} = \tilde{m}(x_1 + \frac{L}{\tilde{k}}(p - \tilde{a}_0)) \tag{4.47}$$

die Oszillatorgleichung

$$(\partial_y^2 - \tilde{m}^2 y_{a,p}^2 \mp \tilde{m})\xi = 0, \tag{4.48}$$

wobei $\tilde{a}_0$ und $\tilde{a}_1$ definiert sind als

$$\tilde{a}_0 = \tilde{h}_0 + \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \tilde{a}_1 = \tilde{h}_1. \tag{4.49}$$

Die Bedingung an die Nullmoden lautet in diesem Fall

$$\mp \tilde{m} > 0 \Rightarrow \mp ak > 0. \tag{4.50}$$

Diese Situation ist für $k_{Schwinger} = \tilde{k}$ identisch zu der aus dem Schwinger-Modell. Wegen $|\tilde{k}| = |k|$ gibt es wieder $|k|$ Nullmoden – allerdings diesmal für jede Chiralität. Insgesamt existieren also $2|k|$ Nullmoden; jeweils die Hälfte links- und rechtshändig, sodass der Index von $\not{D}$ verschwindet. Der Anschaulichkeit halber soll hier weiterhin $|\tilde{k}|$ statt $|k|$ geschrieben werden.

Die Lösungen der Nullmodengleichung sind

$$\zeta_a = e^{\frac{|\tilde{m}|}{2} y^2_{a,p}(x_1)}. \tag{4.51}$$

Diese lassen sich mithilfe von

$$\chi_{a,p}(x_0, x_1 + L) = e^{2\pi i \tilde{h}_1} e^{-i\frac{2\pi k}{\beta} x_0} \chi_{a,p}(x_0, x_1) \tag{4.52}$$

wieder zu Lösungen zusammensetzen, die die Randbedingungen erfüllen:

$$\tilde{\psi}_{a,p} = \left(\frac{2|\tilde{k}|}{\beta^2 V}\right)^{1/4} \sum_n e^{2\pi i \tilde{h}_1} \chi_{a,p+nk}(x_0, x_1). \tag{4.53}$$

Mithilfe der Theta-Funktionen ergibt sich also für die Nullmoden

$$\tilde{\psi}_{a,p} = \left(\frac{2|\tilde{k}|}{\beta^2 V}\right)^{1/4} e^{2\pi i (\frac{\tilde{h}_0 x_0}{\beta} - \frac{k x_0 x_1}{V})} \Theta_{\frac{x_1}{L} + \frac{p - \tilde{a}_0}{|\tilde{k}|}, \frac{k x_0}{\beta} + \tilde{a}_1}(0, i|\tilde{k}|\tau). \tag{4.54}$$

4.4 Eichgruppe SU(3)

In SU(3) sind die T_a gegeben durch die Gell-Mann-Matrizen λ_a (vgl. [20]). Für diese Betrachtung wichtig sind dabei die beiden Diagonalmatrizen λ_3 und λ_8:[3]

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{4.55}$$

Die beiden Teile von $\tilde{A}$ müssen diagonal und somit wegen $A_\mu = A_\mu^{(a)} T_a$ Linearkombinationen von λ_3 und λ_8 sein. Es müssen in diesem Fall also zwei Funktionen $\alpha^{(3)}(x_0, x_1)$ und $\alpha^{(8)}(x_0, x_1)$ betrachtet werden.

Analog zu oben ergibt sich

$$\alpha^{(3)}(x_0, x_1) = \frac{x_0}{\beta} \hat{m}^{(3)} \qquad \text{und} \qquad \alpha^{(8)}(x_0, x_1) = \frac{x_0}{\beta} \hat{m}^{(8)}. \tag{4.56}$$

3 Zumeist wird gefordert, dass die Norm der Matrizen 1 ist. Daher wird λ_8 in der Literatur mit einem zusätzlichen Normierungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{3}}$ definiert. Da die Normierung in den nachfolgenden Betrachtungen keine Rolle spielt, wird dieser Faktor der Einfachheit halber weggelassen.

Die Randbedingung Gl. 4.2 impliziert

$$U(x_0+\beta) = U(x_0) \qquad \Rightarrow \qquad e^{i\tilde{m}^{(a)}} = 1 \tag{4.57}$$

für $a \in \{3,8\}$. Die Diagonalmatrizen $\tilde{m}^{(a)}$ müssen also Eigenwerte besitzen, die ganzzahlige Vielfache von 2π sind. Somit muss gelten, dass $\tilde{m}^{(a)} = 2\pi k^{(a)}\lambda_a$ für ganzzahlige $k^{(3)}$ und $k^{(8)}$ (wobei i.A. $k^{(3)} \neq k^{(8)}$).

Der konstante Anteil ergibt sich mit denselben Überlegungen zur Matrixform, analog zu Abschnitt 4.2. Damit ist

$$\tilde{A}_0 = -2\pi x_1 \left(\frac{k^{(3)}}{V}\lambda_3 + \frac{k^{(8)}}{V}\lambda_8\right) + 2\pi\left(\frac{h_0^{(3)}}{\beta}\lambda_3 + \frac{h_0^{(8)}}{\beta}\lambda_8\right) = \tilde{A}_0^{(3)}\lambda_3 + \tilde{A}_0^{(8)}\lambda_8, \tag{4.58}$$

$$\tilde{A}_1 = 2\pi\left(\frac{h_1^{(3)}}{L}\lambda_3 + \frac{h_1^{(8)}}{L}\lambda_8\right) = \tilde{A}_1^{(3)}\lambda_3 + \tilde{A}_1^{(8)}\lambda_8. \tag{4.59}$$

Es gilt

$$\tilde{\not{\partial}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}\partial_z - i(\tilde{A}_z^{(3)}\lambda_3 + \tilde{A}_z^{(8)}\lambda_8) \\ \mathbb{1}\partial_z - i(\tilde{A}_{\bar{z}}^{(3)}\lambda_3 + \tilde{A}_{\bar{z}}^{(8)}\lambda_8) & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.60}$$

$$\tilde{\not{\partial}}^2 = \mathbb{1} \circ \left((\mathbb{1}i\partial_0 + (\tilde{A}_0^{(3)}\lambda_3 + \tilde{A}_0^{(8)}\lambda_8))^2 + (\mathbb{1}i\partial_1 + (\tilde{A}_1^{(3)}\lambda_3 + \tilde{A}_1^{(8)}\lambda_8))^2 \right) - \sigma_3(m^{(3)}\lambda_3 + m^{(8)}\lambda_8). \tag{4.61}$$

Damit lautet die Nullmodengleichung

$$((i\partial_0 + a\tilde{A}_0^{(8)} + b\tilde{A}_0^{(3)})^2 + (i\partial_1 + a\tilde{A}_1^{(8)} + b\tilde{A}_1^{(3)})^2 \mp (am^{(8)} + bm^{(3)}))\psi^{\pm} = 0, \tag{4.62}$$

wobei a und b aus den Spektren von λ_8 und λ_3 stammen und daher $(a,b) \in \{(1,1),(1,-1),(-2,0)\}$. Definiere diesmal

$$\tilde{m} = am^{(8)} + bm^{(3)} \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{k} = ak^{(8)} + bk^{(3)}, \tag{4.63}$$

$$\tilde{c}_\mu = ac_\mu^{(8)} + bc_\mu^{(3)} \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{h}_\mu = ah_\mu^{(8)} + bh_\mu^{(3)} \tag{4.64}$$

und betrachte den Ansatz

$$\chi_{a,b,p} = e^{ip_0 x_0} e^{i(ac_1^{(8)} + bc_1^{(3)})x_1} \xi(x_1). \tag{4.65}$$

Dann folgt

$$\left(\partial_1^2 + \left((a\tilde{A}_0^{(8)} + b\tilde{A}_0^{(3)}) - p_0\right)^2 \mp \tilde{m}\right) \xi = 0. \tag{4.66}$$

Setze

$$y_{a,b,p} = \left(x_1 + \frac{L}{\tilde{k}}(p - \tilde{a}_0)\right), \tag{4.67}$$

wobei

$$\tilde{a}_0 = \tilde{h}_0 + \frac{1}{2}, \tag{4.68}$$

$$\tilde{a}_1 = \tilde{h}_1. \tag{4.69}$$

Als Oszillatorleichung ergibt sich wieder

$$\left(\partial_y^2 - \tilde{m}^2 y_{a,b,p}^2 \mp \tilde{m}\right) \xi = 0. \tag{4.70}$$

Für ein verändertes $\tilde{m}$ sind die Lösungen somit wieder dieselben wie im Fall einer SU(2)-Symmetrie. Somit lauten die Nullmoden

$$\tilde{\psi}_{a,b,p} = \left(\frac{2|\tilde{k}|}{\beta^2 V}\right)^{1/4} e^{2\pi i(\frac{\tilde{h}_0 x_0}{\beta} - \frac{k x_0 x_1}{V})} \Theta_{\frac{x_1}{L} + \frac{p - \tilde{a}_0}{|\tilde{k}|}, \frac{k x_0}{\beta} + \tilde{a}_1}(0, i|\tilde{k}|\tau). \tag{4.71}$$

Zu diskutieren bleibt, für welche Fälle diese Lösungen existieren. Die Bedingung lautet

$$\pm \tilde{m} > 0 \Rightarrow \pm(am^{(8)} + bm^{(3)}) > 0. \tag{4.72}$$

Die Situation ist wieder identisch zu der des Schwinger-Modell mit $k_{Schwinger} = \tilde{k}$. Dabei gibt es drei mögliche $\tilde{k}$:

$$\tilde{k}_1 = k^{(8)} + k^{(3)}, \tag{4.73}$$

$$\tilde{k}_2 = k^{(8)} - k^{(3)}, \tag{4.74}$$

$$\tilde{k}_3 = -2k^{(8)}. \tag{4.75}$$

Jede dieser Möglichkeiten liefert $|\tilde{k}_i|$ Nullmoden der Chiralität $-sgn(\tilde{k}_i)$. Somit existieren $|k^{(8)} + k^{(3)}| + |k^{(8)} - k^{(3)}| + 2|k^{(8)}|$ Nullmoden, deren Chiralität diesmal nicht nur vom Vorzeichen sondern auch vom Betrag der $k^{(j)}$ abhängt.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Bachelorarbeit war es, die Determinante des Dirac-Operators im äußeren Feld unter Annahme einer zweidimensionalen Raumzeit $\mathbb{R}^2$ bzw. T^2 für verschiedene Eichsymmetrien zu diskutieren. Dazu wurde die ζ-Funktions-Methode angewandt um die Determinante zu regularisieren und unbekannte Eigenwerte zu umgehen.
Der erste Teil der Arbeit befasste sich mit $\mathbb{R}^2$ und damit mit einer verschwindenden Temperatur. Unter der Annahme, dass keine Nullmoden auftreten, konnte $\not{D}$ mittels einer Iwasawa-Zerlegung durch den freien Dirac-Operator $\not{\partial}$ ausgedrückt werden. So ließ sich ein Operator einführen, der zwischen $\not{\partial}$ und $\not{D}$ interpoliert. Die Determinante dieses Operators wurde durch die spektrale Zeta-Funktion ausgedrückt und so auf eine Spur über den Hilbertraum zurückgeführt, die sich explizit berechnen ließ. Auf diese Weise konnten die regularisierte Determinante $\log\left(\frac{\det(i\not{D})}{\det(i\not{\partial})}\right)$ sowie die Yang-Mills-Wirkung S_{YM} für die Eichgruppen SU(2), SU(3) und SU(n) als Funktionen der Parameter der Zerlegung bestimmt werden. Die Unterschiede in der Behandlung der verschiedenen Eichgruppen lagen hierbei vorwiegend in der zunehmenden Komplexität der auftretenden Terme. Grundlegende qualitative Unterschiede traten nicht auf, sodass die komplexeren Systeme analog zu den einfacheren behandelt werden konnten. Die Ergebnisse für SU(3) aus Abschnitt 3.2 wurden mit den Resultaten aus [5] verglichen. In diesem Paper wurde eine komplexere, von der Zerlegung unabhängige Methode angewandt, um die fermionische Determinante für allgemeine Eichgruppen SU(n) zu bestimmen. Es konnte gezeigt werden, dass die Ergebnisse für die spezifische Wahl von Modell und Zerlegung aus Abschnitt 3.2 dieselben sind. Zudem wurde festgestellt, dass die Gleichungen und Definitionen für SU(n) aus Abschnitt 3.3 sich beim Einsetzen von $n = 2$ bzw. $n = 3$ auf die entsprechenden Formeln aus 3.1 bzw. 3.2 reduzieren.
Der Übergang zu endlichen Temperaturen wurde im Zweiten Teil der Arbeit durch die Einführung antiperiodischer Randbedingungen in der Zeit x_0 realisiert. Für den Torus konnte, anders als in der unendlichen Ebene, $\det(i\not{D})$ selbst nicht bestimmt werden. Stattdessen wurden die Nullmoden von $\not{D}$ ermittelt, indem diese durch die Nullmoden eines durch das Feld $\tilde{A}$ bestimmten Operators $\tilde{\not{\partial}}$ ausgedrückt wurden. Die resultierende Differentialgleichung $\tilde{\not{\partial}}^2\chi = 0$ konnte durch Wahl eines geeigneten Ansatzes auf die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators im Grundzustand zurückgeführt werden. Dessen Lösungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen wurden durch die Jacobi-Theta-Funktionen ausgedrückt. Dabei konnte für SU(2) und SU(3) aufgrund der Diagonalität von $\tilde{\not{\partial}}^2$ ein System von Differentialgleichungen betrachtet werden, die bei Wahl eines geeigneten $\tilde{k}$ auf den abelschen Fall zurückführten. Auf diese Weise war für SU(2) und SU(3) eine anschauliche Diskussion der Anzahl und Chiralität der Nullmoden

möglich: Für U(1) können nur Nullmoden einer Chiralität existieren, sodass deren Anzahl direkt aus dem Indextheorem bestimmt werden kann. In höheren Eichgruppen ist das nicht möglich; jedoch konnte die Anzahl der Nullmoden in SU(2) und SU(3) auf die in U(1) zurückgeführt und so bestimmt werden.

Insgesamt machen die grundlegenden Unterschiede zwischen den Problemen, die sich bei der Betrachtung von $\mathbb{R}^2$ und T^2 auftun, sowie die Signifikanz der Nullmoden deutlich, welchen Einfluss die Geometrie auf die physikalischen Eigenschaften des Modells besitzt. Die Einführung einer endlichen Temperatur war Ursache für das Auftreten physikalischer Effekte, die im einfacheren Fall völlig vernachlässigt wurden und die das System grundlegend beeinflussen. Um physikalische Aussagen über die fermionische Determinante treffen zu können ist somit eine Bestimmung dieser unter geeigneten Randbedingungen vonnöten. Die Betrachtung weniger komplexer Eichsymmetrien bietet hingegen einen guten Ansatzpunkt zur Veranschaulichung realistischerer Systeme. Obgleich die Komplexität der Berechnungen zunahm, traten beim Übergang zu höheren Eichgruppen keine grundlegend neuen Probleme auf, sodass die Betrachtung vollständig analog durchgeführt werden konnte. Die vorherige Betrachtung vereinfachter Modelle kann so ein besseres Verständnis der Methoden und Ergebnisse ermöglichen.

Im Rahmen weiterer Betrachtungen können die fermionische Determinante auf $\mathbb{R}^2$ sowie die Nullmoden auf T^2 als Ausgangspunkt für die Bestimmung von $\log(\det(i\not{D}))$ auf dem Torus dienen. Für das Schwinger-Modell wurde eine derartige Rechnung in [4] vorgenommen. Hierin wurden die Sektoren mit und ohne Nullmoden separat behandelt. Die Nullmoden gehen dabei über eine Normmatrix in das Ergebnis ein. Eine weiterführende Betrachtung kann sich zudem mit höherdimensionalen Modellen auseinandersetzen, wie in [19]. Dort wurden – ebenfalls für das Schwinger-Modell – die Nullmoden in der vierdimensionalen Raumzeit berechnet.

Literaturverzeichnis

[1] A. Rubbia. Teilchenphysik II-III. Vorlesungsnotizen. ETH Zürich, 2001. http://neutrino.ethz.ch/Vorlesung/WS2001-SS02/Vorlesungnotizen.htmll.

[2] E. Abdalla, M. C. Batoni Abdalla, K. D. Rothe. *Non-Perturbative Methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory*. World Scientific, 1991.

[3] M. Wechner. *Aspects of the Schwinger-Model (Massless QED_{1+1}) and Massless QCD^{baby}_{1+1}*. Diplomarbeit, ETH Zürich, September 1994.

[4] I. Sachs, A. Wipf. Finite Temperature Schwinger Model. *Helvetica Physica Acta 65 (1992)*, August 1991. https://arxiv.org/abs/1005.1822v1.

[5] S. Duerr, A. Wipf. Gauge Theories in a Bag. *Nucl.Phys. B443 (1995)*, pages 201–232, Dezember 1994. https://arxiv.org/abs/hep-th/9412018v2.

[6] A. Wipf. Private Kommunikation.

[7] A. Wipf. Quantenmechanik II. Vorlesungsnotizen. FSU Jena, 2008. http://www.tpi.uni-jena.de/qfphysics/homepage/wipf/lecturenotes.html.

[8] J.D. Bjorken, S.D. Drell. *Relativistische Quantenmechanik*. Bibliographisches Institut, 1964.

[9] B. Thaller. *The Dirac Equation*. Springer Verlag, 1992.

[10] F. Schwabl. *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*. Springer Verlag, 1997.

[11] S. Scherer. *Symmetrien und Gruppen in der Teilchenphysik*. Springer Verlag, 2016.

[12] K. Zoubos. Particle and Astroparticle Physics. Vorlesungsnotizen. University of Pretoria, 2015.

[13] J. Glimm, A. Jaffe. *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*. Springer Verlag, 1981.

[14] T. Cheng, L. Li. *Gauge theory of elementary particle physics*. Oxford University Press, 1984.

[15] K. Chandrasekharan. Lectures on The Riemann Zeta-Function. Vorlesungsnotizen. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1953. http://www.math.tifr.res.in/~publ/ln/tifr01.pdf.

[16] T. Apostol. *Introduction to analytic number Theory*. Springer Verlag, 1976.

[17] A. Wipf. Path integrals. Vorlesungsnotizen. FSU Jena, 2008. `http://www.tpi.uni-jena.de/qfphysics/homepage/wipf/lecturenotes.html`.

[18] A. Das. Topics in Finite Temperature Field Theory. *Quantum Field Theory - a Twentieth Century Profile, Indian National Science Academy*, 2000. `https://arxiv.org/abs/hep-ph/0004125v1`.

[19] Y. Tenjinbayashi, H. Igarashi, T. Fujiwara. Dirac Operator Zero-Modes on a Torus. *Annals Phys.322*, pages 460–488, 2007. `https://arxiv.org/abs/hep-th/0506259`.

[20] C. Itzykson, J.B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, 1987.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen verfasst habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht wurden und dass die Arbeit nicht in gleicher oder ähnlicher Form als Prüfungsleistung verwendet wurde oder als Veröffentlichung erschienen ist. Seitens der Verfasserin bestehen keine Einwände, die vorliegende Bachelorarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Ort, Datum Unterschrift