

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät



seit 1558

QUANTENELEKTRODYNAMIK IN STARKEN ÄUSSEREN FELDERN

Diplomarbeit

eingereicht von Katja Ehrhold
geboren am 17.07.1981 in Nordhausen

1. Gutachter: Prof. Dr. phil. habil. Andreas Wipf

2. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Roland Sauerbrey

Tag der Verleihung des Diploms:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen der Quantenelektrodynamik	7
2.1	Quantisierung von Feldern in der QED	7
2.1.1	Das Dirac-Feld	8
2.1.2	Das elektromagnetische Eichfeld	10
2.1.3	Die allgemeine Lagrange-Dichte	14
2.2	Greenfunktionen und Propagatoren	16
2.2.1	Der Dirac-Propagator	17
2.2.2	Der Photon-Propagator	18
2.3	Der Pfadintegralformalismus	18
2.3.1	Pfadintegrale in der Quantenmechanik	19
2.3.2	Übergang zur Feldtheorie	20
2.3.3	Die Vakuumpersistenz-Amplitude	21
2.4	Feynman-Graphen	22
3	Die doppelt-effektive Ein-Loop-Wirkung	25
3.1	Effektive Wirkung durch Legendre-Transformation	25
3.2	Die Loop-Entwicklung	27
3.3	Eigenzeitdarstellung der Wirkung	29
4	Vakuumpolarisation in konstanten, parallelen Feldern	31
4.1	Einordnung in den theoretischen Hintergrund	31
4.2	Grundlagen	32
4.3	Bewegungsgleichungen für konstante Felder	33
4.4	Ableitung des Polarisationsensors	36
4.5	Wichtige Grenzfälle	45
4.6	Überführung in Urrutias Darstellung	47
4.7	Eine genäherte Darstellung	50
4.8	Vom Polarisationsensor zur Teilchenproduktion	51
5	Kinetischer Zugang versus Eigenzeitformalismus	55
5.1	Quantisierung im zeitabhängigen externen Feld	56

5.2	Wird die Teilchenproduktion nun messbar?	58
6	Zusammenfassung und Ausblick	63
A	Einheiten und Konventionen	65
B	Lorentz-Transformation und Invarianten	67
C	Mathematisches Handwerkszeug	69
C.1	Funktionalableitung	69
C.2	Spinoren und Grassmann-Zahlen	71
C.2.1	Gamma-Matrizen	71
C.2.2	Spintransformationen	72
C.2.3	Grassman-Variablen	74
C.3	Spaß mit Spuren	76
D	Hilfreiche Identitäten	79
D.1	Übersicht	79
D.2	Identitäten zur Berechnung der verallgemeinerten Lagrangedichte	80

MÖBIUS Ich bin Salomo. Ich bin der arme König Salomo. Einst war ich unermesslich reich, weise und gottesfürchtig. Ob meiner Macht erzitterten die Gewaltigen. Ich war ein Fürst des Friedens und der Gerechtigkeit. Aber meine Weisheit zerstörte meine Gottesfurcht, und als ich Gott nicht mehr fürchtete, zerstörte meine Weisheit meinen Reichtum. Nun sind die Städte tot, über die ich regierte, mein Reich leer, das mir anvertraut worden war, eine blauschimmernde Wüste, und irgendwo um einen kleinen, gelben, namenlosen Stern kreist, sinnlos, immerzu, die radioaktive Erde. Ich bin Salomo. Ich bin der arme König Salomo. *Er geht auf sein Zimmer.*

Nun ist der Salon leer. Nur noch die Geige Einsteins ist zu hören.

¹aus: FRIEDRICH DÜRRENMATT, Die Physiker

1 Einleitung

Dem natürlichen und immer drängenden Streben des Menschen nach Wissen steht im Wege, dass niemand die Wirklichkeit an sich erfassen kann. Wir alle sind eingeschränkt durch die Mittelbarkeit unserer Wahrnehmung. Die elektromagnetischen Wellen, deren Verhalten heutzutage in einem konsistenten Modell beschrieben wird, treten im Alltag als scheinbar völlig verschiedene Erscheinungen zu Tage. Nur einen kleinen Teil nehmen wir direkt mit Hilfe der Augen als sichtbares Licht bzw. über die Haut als Wärmestrahlung wahr. Der große Rest bleibt den menschlichen Sinnesorganen vollständig verborgen; trotzdem haben wir Kenntnis von ihm.

Dieses Wissen verdanken wir den zugrunde liegenden physikalischen Theorien, welche die Wirklichkeit beschreiben. Es stellt sich dabei nicht die Frage, was Licht tatsächlich ist, sondern nur, wie man seine messbaren Eigenschaften beschreiben kann. Das Ziel eines Physikers ist also nicht, Spekulationen über die Realität anzustellen, sondern eine Brücke von der Realität hin zu unseren Möglichkeiten der Wahrnehmung zu bauen. Diese Brücke ist die Theorie, von welcher wir verlangen, dass sie die Ergebnisse von Experimenten quantitativ vorhersagt. Freilich ist das eine sehr strikte Forderung, aber wenn wir das Experiment als das Maß aller Dinge in der Formulierung einer Theorie festsetzen, gewinnen wir damit die Möglichkeit auch bisher unbekannte Phänomene nachprüfbar vorherzusagen.

Dazu muss man sich zu jedem Modell Gedanken über seinen Gültigkeitsbereich machen. Erkenntnisse wie z.B. die universelle Konstanz der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit und die daraus resultierende spezielle Relativitätstheorie von Einstein bedeuten zwar, dass die Newtonsche Physik in gewissem Sinne „falsch“ ist. Das kommt jedoch erst bei so großen Geschwindigkeiten zum Tragen, dass wir uns im Alltag getrost auf Newton verlassen können. Ebenso verhält es sich mit den Bausteinen, die wir in einer Theorie als „fundamental“ bezeichnen. So kann man z.B. einen Atomkern bei Energien kleiner als 1 MeV in sehr guter Näherung als punktförmige Masse betrachten, auch wenn wir mittlerweile wissen, dass er eine innere Struktur besitzt.

In engem Zusammenhang damit steht die bemerkenswert unterschiedliche Stärke der vier fundamentalen Kräfte der Natur. Die Gravitation als schwächste Wechselwirkung mit der größten Reichweite wird in der geometrischen Einsteinschen Theorie erklärt und kann auf kleinen Skalen immer vernachlässigt werden. Da es im Gegensatz zur schwachen, starken und elektromagnetischen Wechselwirkung noch nicht gelungen ist, sie widerspruchsfrei zu quanti-

sieren, ist sie als einzige der vier nicht im Standardmodell der Physik enthalten. Das Standardmodell beschreibt die Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen im Rahmen der Quantenfeldtheorie durch den Austausch von Vektorbosonen und ist ein wesentlicher Schritt zur angestrebten Vereinigung aller Naturkräfte in einer Theorie, der GUT (Grand Unified Theory).

Entwicklung der Quantenelektrodynamik

Ausgehend von Max Plancks Quantenhypothese (1901), in der erstmals „Lichtteilchen“ postuliert wurden, entwickelte sich die Anfang des letzten Jahrhunderts äußerst erfolgreiche Quantenmechanik. In den Jahren bis 1925 wurde die Quantenidee auf die Mechanik des Atoms übertragen, was im Welle-Teilchen-Dualismus und der Schrödingerschen Wellengleichung [43] für Elektronen gipfelte. Danach war der Weg frei für eine systematische Behandlung von quantisierten elektromagnetischen Feldern und damit der Bogen zurück zu Planck gespannt. Schon 1929 wurde die Quantisierung der Wellenfelder für den Spezialfall der Quantenelektrodynamik von Heisenberg und Pauli [26, 27] formuliert und legte den Grundstein für die Quantenfeldtheorie, die Verschmelzung der Quantentheorie mit der Feldtheorie (begründet von Maxwell, Faraday und Hertz). Im Gegensatz zur Quantenmechanik, deren grundlegende Voraussetzung die Erhaltung von Teilchenzahl und Teilchenart war, erhielt man durch diese Verallgemeinerung eine Vielteilchentheorie, die bereits bekannte physikalische Prozesse wie z.B. Emission und Absorption von Lichtquanten beschreiben konnte.

Die Quantenelektrodynamik, als erster „Ableger“ der Quantenfeldtheorie, beschreibt die Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen und weil diese Teilchen interagieren, wird das elektromagnetische Feld obligatorisch. Die Photonen sind demnach die Vermittler der elektromagnetischen Kraft und folgen aus dem sehr allgemeinen Eichprinzip, welches in Abschnitt 2.1.3 kurz erläutert wird. Außer der Schönheit und Logik dieser Unterscheidungsweise zwischen den Feldern, die sich als Teilchen manifestieren und den Feldern, die diese Teilchen durch Vermittlung der Interaktion „sichtbar“ machen, besticht die Quantenelektrodynamik vor allem durch ihre exzellente Genauigkeit bei der Berechnung physikalischer Größen.

Keine andere Theorie kann bisher derart präzise Vorhersagen machen. So wurden z.B. Prozesse höherer Ordnung im Kopplungsparameter α vermessen, wie die Übergangsenergien in Wasserstoffatomen und wasserstoffähnlichen Systemen, das anomale magnetische Moment des Myons und die Zerfallsraten von Singulett- und Triplett-Positronium. All diese vielfältigen und ausgeklügelten Experimente stellen einen detaillierten Gültigkeitstest der Quantenelektrodynamik dar, die damit die am besten überprüfte physikalische Theorie überhaupt ist. In der folgenden Tabelle finden sich drei ausgewählte Beispiele für die unabhängige Bestimmung der Feinstrukturkonstante α ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ in natürlichen Einheiten). Dabei werden die größten Übereinstimmungen von Theorie und Experiment in physikalischen Systemen erreicht, in die keine starke Wechselwirkung (Kräfte zwischen den Kernbausteinen) involviert ist.

Tabelle 1: Werte der inversen Feinstrukturkonstante α^{-1}

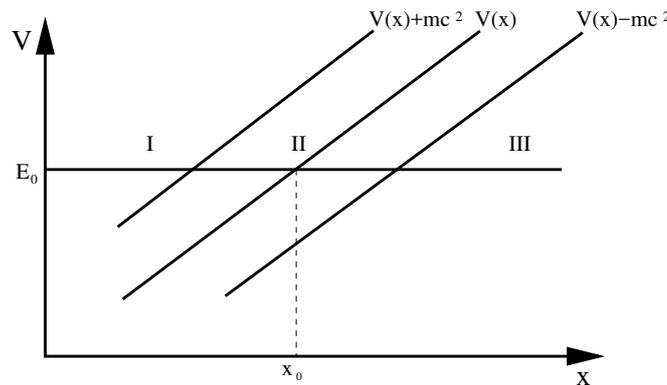
Elektron (g-2)	137,035 992 35 (± 73)
Myonium Hyperfein-Aufspaltung	137,035 994 (± 18)
Myon (g-2)	137,035 5 (± 11)

Jeder angeführte Wert für α^{-1} wurde bestimmt durch Anpassung der experimentellen Messwerte an deren theoretische Berechnung, die α als Parameter enthält. Die Zahl in Klammern gibt die Standardabweichung der letzten angezeigten Stellen an, unter Berücksichtigung von experimenteller und theoretischer Unsicherheit (Zahlenwerte aus [32]).

Das Vakuum unter dem Einfluss äußerer Felder

Eine wesentliche Konsequenz aus den Quantenfeldtheorien ist, dass es das ideale Vakuum als „leeren“ Raum nicht geben kann. Auch ohne jegliche Energiezufuhr existiert eine nichtverschwindende Wahrscheinlichkeit dafür, dass spontan ein virtuelles Teilchen-Antiteilchen-Paar entsteht, welches sich innerhalb der von der Unschärferelation tolerierten Zeit wieder vernichtet. Das bedeutet, dass es möglich ist, mittels einer solchen Quantenfluktuation, Energie vom Vakuum zu „borgen“, solange diese nur schnell genug wieder freigesetzt wird.

Den für die Quantenelektrodynamik relevanten Schwingerschen Effekt kann man sich nach Heisenberg und Euler [25] mit Hilfe des wohlbekannten Diracsees veranschaulichen. Ausgehend vom feld- und teilchenfreien Raum, in dem die negativen Elektronenzustände vollbesetzt sind, die positiven dagegen leer, schaltet man ein konstantes elektrisches Feld z.B. in x-Richtung ein. Aufgrund des Feldes wächst die potentielle Energie linear in dieser Koordinatenrichtung. In diesem System sind alle reellen Energieeigenwerte möglich und man kann die Eigenfunktionen durch Translation ineinander überführen. Daraus resultierend ist nun keine eindeutige Unterscheidung zwischen positiven und negativen Eigenwerten mehr möglich.



Figur 1: Das elektrische Potential ist über der Koordinatenrichtung aufgetragen und zusätzlich die Parallelen zum Potential erhöht bzw. erniedrigt um die Ruhemasse.

Laut Sauter [42] sind nun die Eigenfunktionen z.B. zum Eigenwert E_0 nur in den Gebieten I und III groß, während sie in Gebiet II exponentiell abfallen. Man kann also im übertragenen Sinn sagen, dass eine im Gebiet I große Wellenfunktion in das Gebiet III „ausläuft“. Der dabei auftretende Durchlasskoeffizient ist von der Größenordnung $\exp(-\pi E_c/E)$ mit der kritischen Feldstärke $E_c = m^2/e \approx 1,3 \times 10^{18}$ V/m.

Anschaulich gesprochen gibt es also eine nichtverschwindende Aufenthaltswahrscheinlichkeit für ein Paar, dessen einer Partner, das Elektron, zusätzlich zur potentiellen Energie seine Ruhemassenenergie erhalten hat, und zwar von seinem Gegenspieler, dem Positron, welches eine um diesen Betrag abgesenkte Energie besitzt.

Eine solche Möglichkeit der Teilchenerzeugung wird natürlich mit steigender Feldstärke immer wahrscheinlicher. Selbst wenn die Energie nicht ausreicht, beobachtbare Materie zu erzeugen, ändert allein die „virtuelle“ Möglichkeit die Maxwell'schen Gleichungen und bewirkt eine „Polarisation des Vakuums“

Dieser Begriff ist der Elektrodynamik in Medien entliehen und verdeutlicht, dass ein solches energiereiches Vakuum auf durchdringende Strahlung ähnlich wirkt wie ein optisches Medium. Die Wechselwirkung des Feldes mit den virtuellen Teilchen, die ihrerseits durch den Hintergrund beeinflusst werden, verursacht bekannte optische Phänomene wie etwa die Photon-Photon-Streuung oder die Doppelbrechung.

Schon 1936 haben Euler und Heisenberg [25] in ihrer Abhandlung eine auch heute noch gebräuchliche effektive Lagrangedichte (nicht störungstheoretisch, renormiert und auf Ein-Loop-Ebene) für konstante elektromagnetische Felder berechnet (ebenso Weisskopf [53] für die skalare QED). Diese Lagrangedichte wurde und wird benutzt, um eine Vielzahl von nicht-linearen Effekten vorherzusagen. Nach einer Arbeit von Fock [17] entwickelte Schwinger [44] dann in seinem berühmten Papier von 1950 den Eigenzeitformalismus, den Tsai und Erber [48] in den siebziger Jahren nutzten, um eine Lagrangedichte abzuleiten, welche exakt im reinen magnetischen Hintergrund ist und die in zweiter Ordnung der beliebig variierenden Testfelder genähert ist. Als Übersichtswerk sei abschließend das Buch von Dittrich und Gies [12] angegeben; hier finden sich die modernen theoretischen Grundlagen für die Erforschung des energiereichen Vakuums.

Von der Theorie zum Experiment

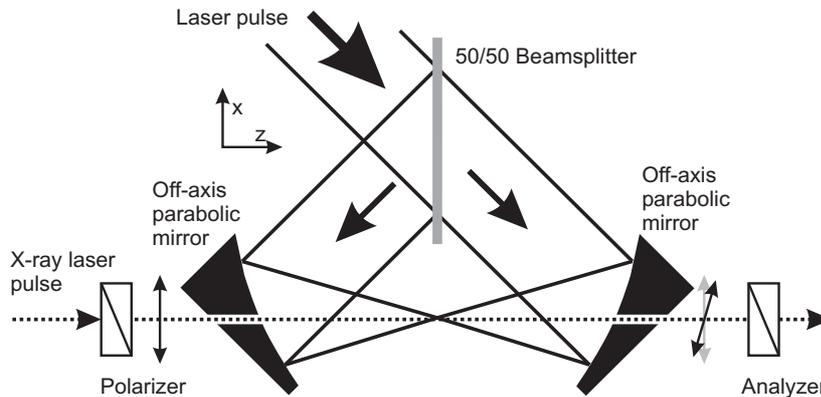
Die bisher erwähnten glänzenden experimentellen Bestätigungen der Quantenelektrodynamik beschränkten sich auf den Bereich niedriger Intensitäten, d.h. Feldstärken, die deutlich kleiner sind als die kritische Feldstärke. In diesem Regime sind die oben beschriebenen Effekte des Quantenvakuums durch ihre exponentielle Unterdrückung wesentlich zu klein für eine Beobachtung. Deshalb wurde von Tsai und Erber [48] der Hintergrund rein magnetisch gewählt. Damit hoffte man, Prozesse in Pulsaren besser zu verstehen, von denen man am ehesten erwartete, dass sie genügend hohe Feldstärken produzieren können.

Doch mit der Entwicklung neuer Lasersysteme hat sich die Situation gewandelt. Das JETI-Lasersystem in Jena liegt mit Feldstärken von $1,9 \times 10^{13}$ V/m mittlerweile „nur“ noch fünf Größenordnungen unterhalb der kritischen Feldstärke. Damit bleiben Effekte wie die Teilchen-

Antiteilchen-Produktion zwar weiterhin unbeobachtbar, jedoch kann man vielleicht schon in den nächsten Jahren eine Drehung der Polarisationssebene in einem Testfeld als Folge der Doppelbrechung messen (siehe Diplomarbeit von Katrin Koch [33]).

Im Rahmen eines Unterprojektes des Transregio 18 mit dem Titel „From Compton Scattering to Strong Field Electrodynamics“ soll mit dem oben erwähnten JETI das folgende Experiment durchgeführt werden:

In einer Ultrahochvakuum-Kammer wird ein intensitätsstarker Laserstrahl in zwei Teilstrahlen aufgespalten, die mit Hilfe von Parabolspiegeln auf denselben Punkt fokussiert werden. Als Probestrahl wird ein Röntgenlaser genutzt, da das Doppelbrechungs-Signal (Phasenverschiebung oder Drehung der Polarisationssebene) proportional zur Frequenz ist. Der gesamte Vorgang wird vollständig Computer-überwacht und soll langfristig mit einem Freie-Elektronen-Röntgen-Laser (XFEL am DESY) als Testfeld durchgeführt werden, um noch eine Größenordnung bei der Frequenz zu gewinnen.



Figur 2: Versuchsaufbau zur Messung der Vakuum-Doppelbrechung:
Die Löcher in den Parabolspiegeln ermöglichen eine Propagation des Teststrahls durch den Fokus und mittels des Polarisators und des Analysators kann eine Drehung der Polarisationssebene des Röntgenpulses festgestellt werden.

Der Vollständigkeit halber seien hier die technischen Daten des JETI (Jenaer Titan:Saphir) Lasersystems angegeben: Es basiert auf einer „chirped-pulse“-Verstärkung und erzeugt Pulse mit einer Wellenlänge von $\Lambda = 795 \text{ nm}$ bei einer Wiederholungsrate von 10 Hz und einer Pulsdauer von 80 fs. Mit einer Pulsenergie von 600 mJ und einem Durchmesser der Fokalregion von $2,6 \text{ }\mu\text{m}$ lassen sich Intensitäten von 10^{20} W/cm^2 erzeugen, was einer Feldstärke von $E \approx 1,9 \times 10^{13} \text{ V/m}$ entspricht.

Aufbau und Zielsetzung dieser Arbeit

Die vorliegende Diplomarbeit ist so strukturiert, dass sie den Leser erst in die Grundlagen der Quantenelektrodynamik einführt, um damit das Fundament für das Verständnis der effektiven Ein-Loop-Wirkung zu legen. Diese wird im darauffolgenden Kapitel unter Benutzung von

funktionalen Methoden hergeleitet und erlaubt einen eleganten Zugang zum Schwingerschen Eigenzeitformalismus. Aufbauend auf der Eigenzeitdarstellung wird nun in Weiterführung der Arbeit von Tsai und Erber [48] eine Wirkung für die Vakuumpolarisation in parallelen und konstanten elektromagnetischen Feldern hergeleitet. Diese Verallgemeinerung ist für jede beliebige Feldkonfiguration bis auf die sogenannten „crossed fields“ gültig und entspricht exakt dem oben dargestellten experimentellen Aufbau. Der Polarisationsensor, der durch die vorliegende Arbeit geliefert wird, beinhaltet die gesamte Information über die Lichtausbreitung eines beliebig variierenden Probestrahles, der sich durch den hochenergetischen elektromagnetischen Hintergrund, also den Laserfokus, bewegt.

Da 1977 Urrutia [49] mit den von Schwinger entwickelten nichtkausalen Methoden [45] ebenfalls eine verallgemeinerte Wirkung abgeleitet hat, wird die Äquivalenz beider Ausdrücke bewiesen. Außerdem wird eine genäherte Version des Polarisationsensors bestimmt, der als Grundlage weiterführender numerischer Berechnungen zur Lichtausbreitung dienen kann.

Den Abschluss dieser Arbeit bilden die Betrachtungen zur Teilchenproduktion, innerhalb derer sowohl auf die effektive Theorie als auch auf den kinetischen Zugang eingegangen wird. Es werden der Zusammenhang beider Berechnungsmöglichkeiten und die Grenzen der kinetischen Theorie in Bezug auf ihre Interpretation dargelegt.

2 Grundlagen der Quantenelektrodynamik

In diesem Kapitel werden einige wesentliche Grundlagen der Quantenelektrodynamik entwickelt. Es soll dargestellt werden, dass es zwei Möglichkeiten des Zugangs gibt, die beide ihre jeweiligen Vorteile und ihre Berechtigung besitzen. Zum einen kann man die eher formale Methode der Quantisierung der Wellenfelder nutzen, zum anderen kann mit dem Pfadintegralformalismus eine sehr kompakte Darstellung erreicht werden.

Auch wenn auf beide Zugänge eingegangen werden soll, ist dies nur als kurze Einführung zu verstehen. Weitere Aspekte der Quantenelektrodynamik und der Quantenfeldtheorien im Allgemeinen finden sich in den einschlägigen Lehrbüchern, so vor allem in den Klassikern [38] und [51]. Sehr pädagogisch, wenn auch nicht mehr ganz aktuell sind [5] und [4] und weiterhin zu empfehlen sind insbesondere [41] sowie auch [21], [30], [55], [31] und [34]. Nicht zu vergessen natürlich die Vorlesung von Dr. Heinzl [24], der klar und verständlich in die Konzepte der Quantenfeldtheorie einführte.

2.1 Quantisierung von Feldern in der QED

Die Quantisierung des Eichfeldes der Elektrodynamik und der Fermionenfelder ist in Analogie zur Schwingung einer Saite verständlich. Während in der Quantenmechanik Ort und Impuls zu hermiteschen Operatoren wurden, wird nun ein klassisches Feld, ähnlich der Amplitude einer Saitenschwingung, quantisiert. Das Feld in seinen verschiedenen Schwingungszuständen wird zur dynamischen Variablen und dessen Eigenvektor repräsentiert die Wahrscheinlichkeitsamplitude für Vielteilchenzustände. (siehe auch [4])

Im Sinne einer in sich geschlossenen Darstellung werden wir uns auch mit der sehr interessanten Quantisierung der Eichfelder beschäftigen, die keine direkte Anwendung in dieser Arbeit findet. Der ungeduldige Leser kann diese Ausführungen als Exkurs überblättern. Die Darstellung der folgenden Abschnitte lehnt sich an die Ausführungen des Buches von Ryder [41] an, sind aber in [30], [29] und [31] sowie recht formal in [51] und [52] ebenso zu finden.

2.1.1 Das Dirac-Feld

Die Dirac-Gleichung ist in der Lage, das magnetische Moment des Elektrons ($g = 2$) vorherzusagen ebenso wie die relativistischen Korrekturen der Einergieigenwerte des prominenten Wasserstoffatoms. Eingeführt wurde sie als „Wurzel“ der Klein-Gordon-Gleichung, einer Wellengleichung für skalare Felder. Diese wurde als Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik definiert, indem in der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung die üblichen Ersetzungen vorgenommen wurden. (Die Schrödinger-Gleichung bekommt man mittels derselben Ersetzung für die kinetische Energie.) Nun ist Klein-Gordon aber von zweiter Ordnung in den Ableitungen, was eine nicht positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte zur Folge hat und die Wahrscheinlichkeitsinterpretation damit unmöglich macht. Das begründet die Notwendigkeit einer kovarianten Gleichung erster Ordnung, der Dirac-Gleichung:

$$(i\rlap{-}\not{\partial} - m)\psi = 0 \quad (2.1)$$

wobei

$$\rlap{-}\not{\partial} = \gamma_\mu \partial^\mu$$

mit der in Anhang C.2 aufgeführten Darstellung der Gammamatrizen γ_μ .

Diese Linearisierung erfordert die Abkehr vom einfachen Skalarfeld ϕ hin zu dem vierkomponentigen Dirac-Spinor ψ (Anhang C.2). Beide Feldgleichungen haben jedoch das Problem negativer Energieeigenwerte, welches von Dirac mit Hilfe der Vorstellung von einem „Dirac-See“, in dem alle negativen elektronischen Zustände besetzt sind und der daraus folgenden Vorhersage von Antiteilchen, den Positronen, brillant gelöst werden konnte.

Die Vorgehensweise bei der Quantisierung, also dem Übergang zur Quantenfeldtheorie, folgt dem Hamiltonschen kanonischen Formalismus. Die Dirac-Gleichung für den quantisierten Dirac-Spinor kann nun als Vielteilchentheorie interpretiert werden, wobei das Betragsquadrat $|\psi|^2$ proportional zur Zahl der existierenden Teilchen ist. Ab jetzt sei ψ demnach ein hermitescher Operator im Heisenberg-Bild und wir erhalten die Dirac-Gleichung als Bewegungsgleichung aus der Variation der folgenden Lagrangedichte nach $\bar{\psi}$:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\rlap{-}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.2)$$

mit

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 .$$

ψ und $\bar{\psi}$ werden als unabhängige dynamische Felder betrachtet. Um die Hamiltondichte (genauer den Hamiltondichte-Operator) zu erhalten, benötigen wir noch den kanonisch konjugierten Impuls:

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}(x) = i\psi^\dagger(x)$$

und berechnen damit:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\psi} - \mathcal{L} = -i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi + m\bar{\psi}\psi \stackrel{(2.1)}{=} i\psi^\dagger \dot{\psi} .$$

Aufgrund der in den Ebene-Welle-Lösungen auftretenden negativen Energien ist diese Hamiltondichte nicht positiv definit. Wir werden jedoch sehen, wie die Quantisierung diese Schwierigkeit behebt. Dazu entwickeln wir zuerst die Lösungen der Dirac-Gleichung nach ebenen Wellen:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} \left[b_\alpha(k) u^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d_\alpha^\dagger(k) v^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right], \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} \left[b_\alpha^\dagger(k) \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{ikx} + d_\alpha(k) \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} \right].\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Integration über die zeitliche Richtung mit Hilfe der Massenschalenbedingung ausgeführt und es sind $u^{(\alpha)}$ und $v^{(\alpha)}$ die Spinoren zu positiver und negativer Energie. Ausserdem sind die Koeffizienten zu positiven Frequenzen die Vernichtungsoperatoren b_α und d_α , während diejenigen zu den negativen Frequenzen die Erzeugungsoperatoren d_α^\dagger und b_α^\dagger sind. (Der Operator b_α kann als Vernichter eines Teilchen interpretiert werden und d_α^\dagger als Erzeuger eines Antiteilchen.)

Diese Felder werden jetzt unter Beachtung der Normierungsbedingungen für die Spinoren $u^{(\alpha)}$ und $v^{(\alpha)}$ in die Hamiltondichte eingesetzt und es ergibt sich daraus der folgende Hamiltonoperator:

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x \mathcal{H} \\ &= \int d^3x \frac{i}{2} \left[\psi^\dagger(x) \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi(x) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger(x) \right) \psi(x) \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} k_0 \sum_\alpha \left[b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) - d_\alpha(k) d_\alpha^\dagger(k) \right].\end{aligned}$$

Um negative Energiebeiträge zu verhindern, ist es unumgänglich, statt der gewohnten Kommutatorregeln Antikommutatorregeln für die Erzeuger und Vernichter einzuführen. Damit wird vermieden, dass ein negatives Vorzeichen vor den Produktionsoperator $d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k)$ der Antiteilchen auftaucht. Andernfalls würde das quantenmechanische System durch Antiteilchenerzeugung Energie gewinnen und die Gesamtenergie wäre nicht positiv definit.

Nach Jordan und Wigner postuliert man für die nichtverschwindenden Antikommutatoren:

$$\{b_\alpha(k), b_{\alpha'}^\dagger(k')\} = \{d_\alpha(k), d_{\alpha'}^\dagger(k')\} = (2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (2.3)$$

Wenn wir unter Einbeziehung dieser Postulate den Hamiltonoperator normal-ordnen, subtrahieren wir damit die Nullpunktsenergie heraus und erhalten:

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x : \mathcal{H} : \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} k_0 \sum_\alpha \left[b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) + d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k) \right].\end{aligned}$$

Dieser Hamiltonoperator ist positiv definit, „zählt“ (analog zu demjenigen des harmonischen Oszillators) die Elektronen und Positronen des Vielteilchenzustandes und summiert deren

Energie auf.

Der Vollständigkeit halber seien an dieser Stelle auch die gleichzeitigen Antikommutatoren der Dirac-Felder angegeben, die mittels der obigen Relationen und der Spinsummen über die $u^{(\alpha)}$ und $v^{(\alpha)}$ berechnet werden können. Diese sind das Analogon zu den Vertauschungsregeln von Ort und Impuls aus der Quantenmechanik:

$$\{\psi_i(\vec{x}, t), \psi_j^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\delta_{ij}, \quad (2.4)$$

wobei i und j die Spinorindizes bezeichnen.

Ein wesentliches Argument für die Rechtfertigung der Antikommutationsregeln (2.3) ist zusätzlich, dass sie die Fermi-Dirac-Statistik widerspiegeln. Aus

$$\{b_\alpha^\dagger(k), b_{\alpha'}^\dagger(k')\} = 0$$

folgt nämlich:

$$b_\alpha^\dagger(k)b_\alpha^\dagger(k)|0\rangle = 0,$$

was gleichbedeutend mit der Aussage ist, dass zwei Quanten des Diracfeldes niemals im gleichen Zustand existieren können. Dies ist bekannt als das Paulische Ausschließungsprinzip oder allgemeiner eine Aussage des Spin-Statistik-Theorems, welches einen Zusammenhang zwischen ganz- bzw. halbzahligen Spin und der dazugehörigen Bose-Einstein bzw. Dirac-Statistik herstellt.

2.1.2 Das elektromagnetische Eichfeld

Das elektromagnetische Eichfeld A_μ wird in der Elektrodynamik eingeführt, um die homogenen Maxwell-Gleichungen zu erfüllen. Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lassen sich daraufhin, wie auch die Dirac-Gleichung, aus einem Variationsprinzip gewinnen. Jedoch gibt es in der Beschreibung von masselosen skalaren Feldern Schwierigkeiten bei der Quantisierung. Im Gegensatz zum massiven Feld besitzt es nämlich nur zwei voneinander unabhängige physikalische Komponenten, die den zwei Polarisationsfreiheitsgraden elektromagnetischer Felder entsprechen. In der kovarianten vierdimensionalen Formulierung ist die Redundanz anhand der sogenannten Eichfreiheit ersichtlich. Ändert man das Vektorpotential z.B. in der folgenden Weise:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda, \quad (2.5)$$

so bleibt der Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.6)$$

der die physikalischen Felder enthält, davon unbeeinflusst.

Es gibt aufgrund dessen zwei Herangehensweisen an die Quantisierung. Einerseits kann man mit Hilfe der Coulomb-Eichung zwei Komponenten von A^μ als die physikalischen auszeichnen und daraufhin quantisieren, verliert dabei allerdings die Kovarianz. Oder man kann die

Kovarianz erhalten, muss sich aber im Verlaufe der Quantisierung mit den zwei überflüssigen Komponenten auseinandersetzen. Wir werden uns nur mit dem zweiten Zugang näher beschäftigen.

Nehmen wir die inhomogenen quellenfreien Maxwell-Gleichungen als Ausgangspunkt:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0, \quad (2.7)$$

dann erkennen wir, dass wir diese aus der folgenden Lagrangedichte durch Variation nach A^μ erhalten:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Schon der nächste Schritt, nämlich die Berechnung des kanonisch konjugierten Impulses, zeigt die bestehenden Probleme auf. Zwar lassen sich die räumlichen Komponenten des Impulses ohne Weiteres berechnen, die zeitliche Impulskomponente hingegen verschwindet.

$$\begin{aligned} \pi^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \\ \pi^i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -\dot{A}^i + \partial^i A^0 = E^i \end{aligned}$$

Wenn man die obige Formel als Operatoridentität auffasst, hat das zur Folge, dass die angestrebten Vertauschungsregeln zwischen dem Eichfeld und seinem kanonisch konjugierten Impuls nicht erfüllt werden können. Zwangsläufig ist dann die Nullkomponente des Impulses mit der Nullkomponente des Feldes vertauschbar.

Eine erste Lösungsmöglichkeit ist, die Eichung mittels einer kovarianten Eichbedingung zu fixieren, um damit vier nichtverschwindende Impulskomponenten zu erhalten.

Durch die Lorenz-Eichungs-Bedingung

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (2.9)$$

erhält man als Bewegungsgleichung eine Wellengleichung für die Komponenten des Eichfeldes:

$$\square A_\mu = 0. \quad (2.10)$$

Die zugehörige Lagrangedichte bekommt man durch das Hinzufügen eines sogenannten Eichfixierungsterms, der sicher stellt, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen die Gleichungen (2.10) reproduzieren. Die allgemeine Form mit Lagrangeschem Multiplikator ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.11)$$

wobei wir uns auf den Fall $\lambda = 1$ (irreführenderweise auch Feynman-Eichung genannt) beschränken werden. Nunmehr ist π_0 zwar formal nichtverschwindend

$$\pi_0 = -\partial_\mu A^\mu,$$

wenn wir aber die Lorenz-Eichung als Operatoridentität ernst nehmen, stehen wir wieder vor der gleichen Schwierigkeit. Man fordert also abgeschwächt das Verschwinden des entsprechenden Erwartungswertes für alle Feldzustände $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|\partial_\mu A^\mu|\psi\rangle. \quad (2.12)$$

Die Konsequenzen dieser Forderung arbeiten wir nun an Hand des bekannten Schemas aus. Wir beginnen damit, die Lösungen der Wellengleichung anzugeben:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \left[a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{ikx} \right], \quad (2.13)$$

wobei die Polarisationsvektoren wie folgt normiert sind

$$\varepsilon^{(\lambda)} \cdot \varepsilon^{(\lambda')} = g^{\lambda\lambda'}$$

und $a^{(\lambda)\dagger}(k)$ bzw. $a^{(\lambda)}(k)$ die Erzeuger bzw. Vernichter der elektromagnetischen Feldquanten bezeichnen.

In einem System, in dem sich die Photonen entlang der 3-Richtung bewegen $k^\mu = (k, 0, 0, k)$, können wir die beiden unphysikalischen Polarisationszustände sofort „aussortieren“. Es sind dann nämlich die Photonen mit der Polarisation $\varepsilon^{(0)} = (1, 0, 0, 0)$ die „zeitartigen“ Photonen, die ebenso unphysikalisch sind wie die „longitudinalen“ Photonen mit $\varepsilon^{(3)} = (0, 0, 0, 1)$. Physikalisch dagegen sind die transversalen Photonen $\varepsilon^{(1)}$ und $\varepsilon^{(2)}$, welche die Bedingung

$$k^\mu \varepsilon_\mu^{(1,2)} = 0 \quad (2.14)$$

erfüllen.

Wenden wir uns nun dem kanonisch konjugierten Impuls der modifizierten Lagrangedichte zu:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{\mu 0} - g^{\mu 0} (\partial_\nu A^\nu) \quad (2.15)$$

und teilen ihn der Übersichtlichkeit halber auf in räumlichen und zeitlichen Anteil:

$$\pi^0 = -\dot{A}^0 - \nabla \cdot \vec{A}, \quad (2.16)$$

$$\pi^i = \partial^i A^0 - \dot{A}^i. \quad (2.17)$$

Da die räumlichen Ableitungen des Eichfeldes zu gleichen Zeiten vertauschen, wird der nicht-verschwindende Kommutator postuliert zu

$$[\dot{A}_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{x}', t)] = ig_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.18)$$

Wenn man jetzt die Entwicklung (2.13) einsetzt, erhält man dadurch die Vertauschungsregel für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = -g^{\lambda\lambda'} 2k_0 (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.19)$$

Diese ist jedoch nicht unproblematisch, denn die zeitartigen Photonen erzeugen beim Kommutieren einen negativen Term, der letztlich eine negative Norm verursachen kann. Verdeutlichen kann man sich das am Einphotonenzustand

$$|1\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} f(k) a^{(0)\dagger}(k) |0\rangle ,$$

der die folgende Norm besitzt:

$$\langle 1|1\rangle = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} |f(k)|^2 \langle 0|0\rangle .$$

Damit besitzen alle Zustände mit einer ungeraden Zahl von Photonen eine negative Norm, was zur Folge hat, dass die Metrik des Fock-Raumes indefinit ist. Dies hat einige unerfreuliche Konsequenzen, so ist z.B. die Wahrscheinlichkeitsinterpretation damit nicht mehr tragbar und auch der Hamilton-Operator erhält durch die „zeitartigen“ Photonen negative Beiträge:

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} k_0 \left[\sum_{\lambda=1}^3 a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right] . \quad (2.20)$$

An dieser Stelle muss man jedoch beachten, dass der Teilchenzahldichteoperator der „zeitartigen“ Photonen $N = -a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k)$ ist. Das rührt daher, dass das Minuszeichen in der Kommutatorrelation sich mit dem obigen Minus weghebt. Mit dem zuvor definierten Einphotonenzustand $|1\rangle$ kann man dies durch Nachrechnen von $N|1\rangle = |1\rangle$ bestätigen. Demzufolge hat H zwar keine negativen Eigenwerte, kann aber trotzdem negative Erwartungswerte besitzen, so z.B.:

$$\langle 1|H|1\rangle = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} k_0 |f(k)|^2 \langle 0|0\rangle .$$

Diese Ergebnisse zeigen uns an, dass wir mit der Abschwächung der Lorenz-Eichungsbedingung als Identität für die Erwartungswerte von physikalischen Zuständen zwar auf dem richtigen Weg sind, wir das Ganze aber noch präziser fassen müssen, um eine konsistente quantenmechanische Interpretation sicherzustellen. Man kann nun den folgenden Weg gehen:

Die Forderung (2.12) wäre erfüllt, wenn wir als Bedingung

$$\partial_\mu A^\mu |\psi\rangle = 0$$

wählen würden. Doch leider kann nicht einmal das Vakuum dieser immer noch zu strengen Forderung gerecht werden. Zerlegen wir nämlich den Heisenberg-Operator A_μ in seine positiven und negativen Frequenzanteile, so erhalten wir:

$$\partial_\mu A^\mu |\psi\rangle = (\partial_\mu A^{(+)\mu} - \partial_\mu A^{(-)\mu}) |\psi\rangle = 0$$

und da $\partial_\mu A^{(-)\mu}$ einen Erzeuger enthält, kann die linke Seite für den Vakuumsgrundzustand nie verschwinden. Trotzdem kann man mit Hilfe dieser Gleichung eine weitere Abschwächung der Lorenz-Eichungsbedingung gefunden werden. Verlangt man nämlich nur

$$\partial_\mu A^{(+)\mu} |\psi\rangle = 0 , \quad (2.21)$$

stellt erstens das Vakuum kein Problem mehr dar und zweitens bleibt die Forderung (2.12) damit erfüllt.

$$\langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = \langle \psi | \partial_\mu A^{(+)\mu} - \partial_\mu A^{(-)\mu} | \psi \rangle = \langle \psi | \partial_\mu A^{(-)\mu} | \psi \rangle = \langle \psi | \partial_\mu A^{(+)\mu} | \psi \rangle^* = 0$$

Die Bedingung (2.21) wurde von Gupta und Bleuler [23, 7] formuliert und löst das Problem der negativen Erwartungswerte des Hamilton-Operators. Dies sieht man durch Einsetzen der Entwicklung des Eichfeldes (2.13) in die obige Bedingung:

$$\sum_{\lambda=0}^3 k^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda)} a^{(\lambda)}(k) | \psi \rangle = 0 .$$

Mit (2.14) und $k^\mu \varepsilon_\mu^{(0)} = -k^\mu \varepsilon_\mu^{(3)}$ ergibt sich

$$\left[a^{(0)}(k) - a^{(3)}(k) \right] | \psi \rangle = 0 . \quad (2.22)$$

An diesem Ausdruck erkennt man, dass physikalische Zustände Überlagerungen von longitudinalen und zeitartigen Photonen darstellen, sodass (2.22) gewährleistet ist. Das bedeutet nicht, dass zeitartige oder longitudinale Photonen an sich existieren können. Es heben sich nun die Beiträge beider unphysikalischer Photonensorten weg:

$$\langle \psi | a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) | \psi \rangle = \langle \psi | a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k) | \psi \rangle , \quad (2.23)$$

und es tragen nur die physikalischen transversalen Photonen zu quantenmechanischen Erwartungswerten bei. Damit haben wir eine Methode der kovarianten Quantisierung des elektromagnetischen Feldes kennengelernt, die mit Hilfe der abgeschwächten Lorenz-Eichungsbedingung (2.21) konsistent wird.

2.1.3 Die allgemeine Lagrange-Dichte

Eine Theorie wie die Quantenelektrodynamik soll natürlich nicht nur freie Elektronen und Photonen beschreiben, sondern vor allem die Wechselwirkung beider untereinander. Deshalb versuchen wir eine Lagrangedichte zu finden, die neben den entsprechenden freien Dichten einen Wechselwirkungsterm enthält, welcher proportional zu einer Kopplungskonstanten ist, deren Größe die Stärke der Wechselwirkung skaliert. Diesen Wechselwirkungsterm kann man aus einem sehr allgemeinen Prinzip der Eichtheorien gewinnen. Ausgehend von der Dirac-Theorie, die global eichinvariant ist, kann man die Invarianz auch unter lokalen Eichtransformationen fordern und erhält dadurch ein Eichfeld, das sich mit dem Vektorpotential der Elektrodynamik identifizieren lässt.

Wir erwarten also von der Quantenelektrodynamik, dass sie eine

- abelsche,
- lokal invariante

Eichtheorie ist. Die entsprechende Eichgruppe ist die unitäre Gruppe $U(1)$.

Wir wählen die Lagrangedichte der Diracschen Theorie (2.2) als Ausgangspunkt und fordern ihre Invarianz unter lokalen, abelschen Phasentransformationen

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iq\phi(x)}\psi(x), \quad (2.24)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-iq\phi(x)}\bar{\psi}(x) \quad (2.25)$$

mit $\phi(x) \in \mathbb{R}$ und der Zahl q , die, wie sich später herausstellt, die Kopplungskonstante der Theorie mit dem Wert der negativen Elementarladung ist. Die Invarianz ist gegeben, wenn sich die Ableitungen der Felder in der gleichen Weise transformieren wie die Felder selbst. Das läßt sich durch die Einführung einer sogenannten kovarianten Ableitung¹ realisieren, die ein Eichfeld beinhaltet:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x). \quad (2.26)$$

Durch die Ortsabhängigkeit des Eichfeldes wird die kovariante Ableitung ebenfalls transformiert und gibt durch die Wahl der Transformationseigenschaften des Eichfeldes die Möglichkeit, die Bedingung

$$D'_\mu \psi'(x) = e^{iq\phi(x)} D_\mu \psi(x), \quad \text{mit} \quad (2.27)$$

$$D'_\mu = \partial_\mu + iqA'_\mu(x).$$

zu erfüllen. Für das transformierte Eichfeld muss also gelten:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu + iqA'_\mu(x))e^{iq\phi(x)}\psi(x) &= e^{iq\phi(x)}(\partial_\mu + iq(\partial_\mu\phi(x)) + iqA'_\mu(x))\psi(x) \\ &\stackrel{(2.27)}{=} e^{iq\phi(x)}(\partial_\mu + iqA_\mu(x))\psi(x). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die aus der Elektrodynamik bekannte Transformationvorschrift für das Vektorpotential, die physikalische Felder unbeeinflusst läßt:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\phi(x). \quad (2.28)$$

Nun können wir die allgemeine Lagrangedichte angeben und erhalten durch die Modifikation des Dirac-Anteils

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(x)(i\mathcal{D} - m)\psi(x) \quad (2.29)$$

$$= \mathcal{L}_{ED}(A_\mu) + \mathcal{L}_{Dirac}(\bar{\psi}(x), \psi(x)) + \mathcal{L}_{WW}(\psi(x), A_\mu) \quad (2.30)$$

mit dem Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_{WW} = -q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x). \quad (2.31)$$

Identifizieren wir den Ladungsstrom mit

$$j^\mu(x) = q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x),$$

¹Die Bezeichnung stammt aus der Differentialgeometrie und deutet zu Recht auf die Analogie zur kovarianten Ableitung der Gravitationstheorie hin.

so können wir damit die Behauptung, dass das Eichfeld dem Vektorpotential der Elektrodynamik entspricht, belegen. Wie gewohnt, kann man aus der Gesamt-Lagrangedichte die Bewegungsgleichungen nach dem Variationsprinzip ableiten.

Für das Dirac-Feld ergibt sich:

$$(i\cancel{\partial} - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (2.32)$$

was der in der Quantenmechanik üblichen Ersetzung des Teilchenimpulses durch den kinetischen Impuls (z.B. beim Übergang zur Pauli-Gleichung) entspricht:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + qA^\mu \quad \text{mit} \quad q = -e.$$

Ebenso erhält man für das Photonfeld die aus der Elektrodynamik in Materie bekannte Maxwell-Gleichung.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = q\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) = j^\nu \quad \text{mit} \quad q = -e \quad (2.33)$$

Da die Operatoren jetzt nicht mehr den freien Bewegungsgleichungen gehorchen, stellt sich die Frage, inwieweit die Vertauschungsregeln der freien Theorien abzuändern sind. Sinnvoll ist, zu verlangen, dass die Felder verschiedener Teilchensorten für alle Zeiten vertauschen und ansonsten die gleichzeitigen Vertauschungsregeln der freien Theorien gelten:

$$[\dot{A}_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{x}', t)] = ig_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.34)$$

$$\{\psi_i(\vec{x}, t), \psi_j^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\delta_{ij}, \quad (2.35)$$

$$[\psi_i(x), A^\mu(y)] = 0 \quad \text{etc.} \quad \text{für alle} \quad x^0, y^0. \quad (2.36)$$

2.2 Greenfunktionen und Propagatoren

Mathematisch bezeichnet eine Greenfunktion die Lösung einer Partiellen Differentialgleichung in einem Gebiet (ohne Rand), sodass für alle x^0 dieses Gebietes

$$\Delta_x g(x^0, x) = 0$$

mit $x \neq x^0$ erfüllt ist. Auf dem Rand des Gebietes soll die Greenfunktion verschwinden.

Die Physik hat diesen Begriff übernommen und meint damit häufig sehr allgemeiner die Lösung einer Potentialgleichung (oder Bewegungsgleichung) für eine Punktquelle und der Befriedigung von Randbedingungen im Unendlichen. Hat man für eine derartige Gleichung die Greenfunktion gefunden, so kann man damit die Lösung für jede beliebige Quelle $\rho(x)$ angeben, sofern das Integral

$$\int d^d x' g(x', x)\rho(x')$$

existiert.

In der Quantenfeldtheorie ist dieser Begriff eng verwandt mit dem des Propagators, welcher die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Bewegung (Propagation) eines Feldquants von einem

Raumzeitpunkt zu einem anderen beschreibt. So erhält man z.B. den Feynmanpropagator der freien skalaren Theorie als kausale Greenfunktion (im physikalischen Sinne) der Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\square + m^2)\Delta_F(x) = -\delta^4(x) \quad (2.37)$$

mit

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ipx}, \quad (2.38)$$

wobei der Summand $i\varepsilon$ verdeutlichen soll, dass der Integrationsweg der p^0 -Integration² den Polen einmal nach unten und das andere Mal nach oben hin „ausweicht“.

2.2.1 Der Dirac-Propagator

Der Dirac-Propagator soll die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür angeben, dass ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Feld an einem Raumzeitpunkt erzeugt wird und zu einem anderen Raumzeitpunkt propagiert, wo es wieder vernichtet wird. Um den vollen kausalen Propagator zu erhalten, muss man jedoch entsprechend der Interpretation von Feynman [15] und Stückelberg zwei Beiträge berücksichtigen.

Zum einen kann zum Raumzeitpunkt y ein Elektron erzeugt werden, welches sich vorwärts in der Zeit zum Raumzeitpunkt x bewegt. Für $x^0 > y^0$ gilt also:

$$\langle 0 | \psi_i(x) \bar{\psi}_j(y) | 0 \rangle = (i\cancel{\partial}_x + m)_{ij} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0} e^{-ip(x-y)}.$$

Dieses Ergebnis, zu dem nur der Term korrespondierend zur Teilchenerzeugung und -vernichtung beiträgt, erhält man durch Einsetzen der Entwicklung (2.3).

Zum anderen kann ein Teilchen mit negativer Energie (Frequenz) erzeugt werden, dass sich rückwärts in der Zeit bewegt. Mit der trivialen Relation

$$e^{ip_0x^0} = e^{i(-p_0)(-x^0)}$$

kann man dieses als Teilchen positiver Energie uminterpretieren, welches sich in der Zeit voranbewegt, genannt Positron. Wir betrachten demnach für $x^0 < y^0$:

$$-\langle 0 | \bar{\psi}_i(y) \psi_j(x) | 0 \rangle = (i\cancel{\partial}_x + m)_{ij} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0} e^{-ip(y-x)}.$$

Der beitragende Term ist hier derjenige der Antiteilchenerzeugung und -vernichtung.

Definieren wir nun den Zeitordnungsoperator für Fermionen unter Beachtung des Minuszeichen, welches durch das Vertauschen zweier Fermionfelder entsteht:

$$T\psi_i(x)\bar{\psi}_j(y) = \begin{cases} \psi_i(x)\bar{\psi}_j(y), & x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}_i(y)\psi_j(x), & x^0 < y^0 \end{cases}, \quad (2.39)$$

²Eingedenk der Teilcheninterpretation werden wir von nun an statt des Wellenzahlvektors k den Impuls p verwenden.

so können wir den Dirac-Propagator mit Feynmanschen Randbedingungen in geschlossener Form angeben:

$$iS_F(x-y) = \langle 0|T\psi_i(x)\bar{\psi}_j(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ip(y-x)}. \quad (2.40)$$

Analog zum Klein-Gordon-Propagator löst der Dirac-Propagator die Dirac-Gleichung für eine punktförmige Quelle, d.h. man erhält ihn ebenso als Lösung der rein algebraischen Gleichung

$$(\not{p}-m)S_F(p) = \mathbb{1}$$

als Propagator im Impulsraum

$$S_F(p) = \frac{1}{(\not{p}-m)} = \frac{(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon} = (\not{p}+m)\Delta_F(p).$$

2.2.2 Der Photon-Propagator

Da wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, dass die Wahrscheinlichkeitsamplitude der Feldpropagation tatsächlich der Lösung der Bewegungsgleichungen unter Feynmanschen Randbedingungen entspricht, werden wir auf der Suche nach dem Photon-Propagator direkt von den Maxwell'schen Gleichungen ausgehen. Dazu schreiben wir die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in der folgenden Form:

$$(g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu = 0 \quad (2.41)$$

und finden als Bestimmungsgleichung für das Inverse des Maxwell-Operators

$$(g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta_\mu^\lambda\delta(x-y). \quad (2.42)$$

Allerdings kann ein solches $D^{\nu\lambda}(x-y)$ nicht existieren, da der Maxwell-Operator für Funktionen $\partial^\nu\Lambda$ den Eigenwert Null besitzt.

Deshalb werden wir, wie schon kennengelernt, die Lagrange-Dichte derart modifizieren, dass die Lorenz-Eichung fixiert ist (2.11) und suchen jetzt das Inverse des Wellenoperators. Dieses Inverse existiert und entspricht natürlich dem Klein-Gordon-Propagator für verschwindende Masse. Demnach ist der Photonpropagator mit Feynmanschen Randbedingungen

$$D_F^{\mu\nu}(x,y) = -g^{\mu\nu}\Delta_F(x,y; m=0) \quad (2.43)$$

bzw. im Impulsraum

$$D_F^{\mu\nu}(p) = -\frac{g^{\mu\nu}}{p^2+i\varepsilon}. \quad (2.44)$$

2.3 Der Pfadintegralformalismus

Der Pfadintegralformalismus, als Alternative zur kanonischen Quantisierung, benutzt statt des Hamilton-Operators die Lagrangedichte als fundamentale Größe und bewahrt damit alle Symmetrien der Theorie. Die folgenden Darstellungen finden sich in fast der gesamten oben genannten Literatur, besonders kurz und prägnant aber in [30] und [41].

2.3.1 Pfadintegrale in der Quantenmechanik

Wir beschränken uns für eine übersichtliche Schreibweise vorerst auf die eindimensionale Quantenmechanik, deren Basis die Vertauschungsrelation zwischen Ort und Impuls ist. Der Ortsoperator im Heisenberg-Bild für nicht explizit zeitabhängigen Hamiltonoperator ist gegeben durch:

$$q(t) = e^{iHt} q e^{-iHt}$$

und sein Eigenzustand $|q(t)\rangle$ liefert die Zahl q . Die Übergangsamplitude (bzw. der Propagator) von einem Anfangszustand in den Endzustand definiert man mit Hilfe der Zeitentwicklung durch

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) \equiv \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \langle q_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | q_i \rangle. \quad (2.45)$$

Mit dieser Amplitude hat man die gesamte quantenmechanische Information des Systems zur Hand, denn für jede Wellenfunktion gilt:

$$\psi(q_f, t_f) = \langle q_f, t_f | \psi \rangle = \int dq_i \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \langle q_i, t_i | \psi \rangle = \int dq_i K(q_f, t_f; q_i, t_i) \langle q_i, t_i | \psi \rangle.$$

In Worten besagt obige Formel: Kennt man die Wellenfunktion zu irgendeinem Zeitpunkt (z.B. dem Anfangszeitpunkt), so kennt man sie durch $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ zu allen anderen Zeitpunkten.

Als bekannte Veranschaulichung dient das Doppelspaltexperiment, dessen Interferenzmuster für elektromagnetische Felder das Huygenssche Prinzip für Wellen widerspiegelt. Für einen Elektronenstrahl dagegen kann das Experiment entweder entsprechend des Welle-Teilchen-Dualismus analog durch ein Wellenfeld gedeutet werden, oder man geht davon aus, dass die Elektronen als Teilchen nicht einen sondern *alle* möglichen Wege zu jedem Auftreffpunkt nehmen. Diese Deutung stammt von Feynman [16] und führte zur Pfadintegraldarstellung der Übergangsamplitude.

Die Amplitude (2.45) wird berechnet, indem das Zeitintervall zwischen Anfangs- und Endzeitpunkt in N gleich große Intervalle aufgeteilt wird, die dann immer kleiner gemacht werden, d.h. es werden zu jedem Zeitpunkt zwischen t_i und t_f alle möglichen Zwischenzustände aufintegriert. Ist der Hamilton-Operator dabei von der Form $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, so erhält man

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{iS_{t_i, t_f}} \quad (2.46)$$

mit der klassischen Wirkung S :

$$S_{t_i, t_f} = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (2.47)$$

und den Randbedingungen $q_i = q(t_i)$, $q_f = q(t_f)$. Das Funktionalintegral verläuft somit über alle Wege, jeweils gewichtet mit der dazugehörigen Wirkung, mit den obigen Endpunkten.

Zusätzlich kann man noch die Impulsintegration ausführen, was auf

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \mathcal{N} \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q e^{iS_{t_i, t_f}} \quad (2.48)$$

führt. Dieser Faktor \mathcal{N} ist zwar unendlich, das ist aber unproblematisch, da nur die jeweils normierten Amplituden physikalisch relevant sind.

Für die späteren Betrachtungen sind vor allem die Matrixelemente über die Heisenberg-Operatoren $q(t_n) \equiv q_n$ von Interesse. Deshalb berechnen wir für $t_f > t_2 > t_1 > t_i$:

$$\langle q_f, t_f | q_2 q_1 | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q_1 \mathcal{D}q_2 \langle q_f, t_f | q_2 | q_2, t_2 \rangle \langle q_2, t_2 | q_1 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle$$

und sehen, dass die Operatoren auf ihre Eigenzustände wirken, sodass die Eigenwerte aus den Matrixelementen gezogen werden können und wir demzufolge drei Übergangsamplituden erhalten. Jede dieser Amplituden kann nun als Funktionalintegral geschrieben werden:

$$\langle q_f, t_f | q_2 q_1 | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q_1 \mathcal{D}q_2 q_1 q_2 \int_{q_2}^{q_f} \mathcal{D}q e^{iS_{t_2, t_f}} \int_{q_1}^{q_2} \mathcal{D}q e^{iS_{t_1, t_2}} \int_{q_i}^{q_1} \mathcal{D}q e^{iS_{t_i, t_1}} . \quad (2.49)$$

Diese Integration verläuft zuerst über alle Wege, die die Punkte q_i und q_2 enthalten und dann wird der gesamte Ausdruck mit den Punkten multipliziert und über alle möglichen q_i und q_2 integriert. Die Gleichung (2.49) läßt sich daher zu

$$\langle q_f, t_f | q_2 q_1 | q_i, t_i \rangle = \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q q_1 q_2 e^{iS_{t_i, t_f}} \quad (2.50)$$

vereinfachen. Für die zweite Möglichkeit der Zeitordnung $t_1 > t_2$ erhalten wir mit analogen Argumenten dasselbe Ergebnis, was bedeutet, dass Funktionalintegrale „automatisch“ zeitordnen. Allgemein kann man also die Matrixelemente über n Heisenberg-Operatoren darstellen durch

$$\langle q_f, t_f | T q_1 \cdots q_n | q_i, t_i \rangle = \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q q_1 \cdots q_n e^{iS_{t_i, t_f}} , \quad (2.51)$$

wobei die Zeitordnung im bosonischen Fall natürlich ohne Minuszeichen auskommt.

2.3.2 Übergang zur Feldtheorie

Um die Notation auch weiterhin schlank zu halten, beschränken wir uns beim jetzt anstehenden Übergang zur Feldtheorie auf skalare Felder. Wir werden den Pfadintegralformalismus völlig analog auf den bosonischen Feldoperator φ im Heisenberg-Bild anwenden. Dessen Eigenzustand ist gegeben durch:

$$|\varphi, t\rangle = e^{iHt} |\varphi\rangle \quad (2.52)$$

und die Übergangsamplitude sieht wie folgt aus:

$$\langle \varphi_f, t_f | \varphi_i, t_i \rangle = \langle \varphi_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | \varphi_i \rangle = \mathcal{N} \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi, t_i, t_f]} . \quad (2.53)$$

Die Randbedingungen sind $\varphi(\vec{x}, t_f) = \varphi_f(\vec{x})$ bzw. $\varphi(\vec{x}, t_i) = \varphi_i(\vec{x})$ und die klassische Wirkung geht als Funktional ein:

$$S[\varphi, t_i, t_f] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \mathcal{L}(\vec{x}, t) \quad (2.54)$$

mit der Lagrangedichte $\mathcal{L}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi(\vec{x}, t)\partial_\mu\varphi(\vec{x}, t) - V(\varphi(\vec{x}, t))$ im skalaren Fall. Außerdem verallgemeinern wir die Matrixelemente zu

$$\langle\varphi_f, t_f|T\varphi(\vec{x}_1, t_1)\cdots\varphi(\vec{x}_n, t_n)|\varphi_i, t_i\rangle = \mathcal{N} \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \mathcal{D}\varphi \varphi(\vec{x}_1, t_1)\cdots\varphi(\vec{x}_n, t_n) e^{iS[\varphi, t_i, t_f]} . \quad (2.55)$$

Natürlich ist dabei immer zu beachten, dass mit $\varphi(\vec{x}, t)$ auf der linken Seite die Heisenberg-schen Operatoren gemeint sind, während es sich rechts um deren Eigenwerte handelt.

2.3.3 Die Vakuumpersistenz-Amplitude

Die Vielteilcheninterpretation der Quantenfeldtheorien zieht es nach sich, dass auch Prozesse wie die Teilchenerzeugung und -vernichtung in den quantitativen Betrachtungen enthalten sein müssen. Dies realisiert man durch Einführen einer Quelle $J(\vec{x}, t)$ und indem man neue Randbedingungen fordert:

Das Vakuum in der unendlich fernen Vergangenheit soll in das Vakuum zu unendlich entfernten Zukunft übergehen, indem Teilchen erzeugt werden, die miteinander wechselwirken und wieder vernichtet werden. Nach Schwinger (1969) suchen wir also die Vakuumpersistenz-Amplitude in Gegenwart der Quelle. Dazu modifiziert man die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_J(\vec{x}, t) = \mathcal{L}_J(x) = \mathcal{L}(x) - J(x)\varphi(x) \quad (2.56)$$

und sucht das Funktional $Z[J]$:

$$Z[J] \propto \langle 0^+ | 0^- \rangle_J . \quad (2.57)$$

Ausgangspunkt der Berechnungen ist die Übergangsamplitude in Gegenwart der Quelle:

$$\langle\varphi_f, t_f|\varphi_i, t_i\rangle_J = \mathcal{N} \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x [\mathcal{L}(x) - J(x)\varphi(x)] \right] . \quad (2.58)$$

Die Funktionalableitungen nach der Quelle und anschließendes „Ausschalten“ ergeben die Matrixelemente

$$\langle\varphi_f, t_f|T\varphi(\vec{x}_1, t_1)\cdots\varphi(\vec{x}_n, t_n)|\varphi_i, t_i\rangle = i^n \frac{\delta\langle\varphi_f, t_f|\varphi_i, t_i\rangle_J}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} . \quad (2.59)$$

Nun erhält man die Vakuumpersistenz-Amplitude, indem man in der Übergangsamplitude (2.58) die Anfangszeit nach $t_i \rightarrow -\infty$ und die Endzeit nach $t_i \rightarrow \infty$ gehen lässt. Dabei sei die Quelle für ein endliches aber großes Zeitintervall $2T$ eingeschaltet, welches symmetrisch zur Null innerhalb des Zeitintervalls (t_i, t_f) liegt. Die Schaltvorgänge sollen adiabatisch sein. (Für Details siehe [30] und [41].) Nach dem Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ folgt:

$$\langle 0^+ | 0^- \rangle_J = \frac{\int \mathcal{D}\varphi e^{S[\varphi] - i \int J\varphi}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{S[\varphi]}} \equiv \frac{Z[J]}{Z[0]} \quad (2.60)$$

In dieser Formel haben wir das Funktional $Z[J]$ definiert, welches die gesamte quantenmechanische Information des Systems beinhaltet. Die Ableitungen dieses Funktionals nach der Quelle liefern die sogenannten n-Punkt-Korrelationsfunktionen:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \frac{i^n}{Z[0]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) e^{S[\varphi] - i \int J\varphi}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{S[\varphi]}} \Bigg|_{J=0} \quad (2.61)$$

Diese werden in der gängigen Literatur als Vakuum-Erwartungswerte über zeitgeordnete Feldoperatoren im Heisenberg-Bild definiert. Da jedoch bei den obigen Betrachtungen auf eine ausführliche Beschreibung in quantenmechanischen Bildern verzichtet wurde, sei unsere Definition in der Funktionalintegral-Darstellung gegeben. Die Äquivalenz beider Definitionen kann man sich mittels der Matrixelemente (2.55) verdeutlichen. Bildet man nämlich die Funktionalableitung der Vakuumpersistenzamplitude analog zu (2.59), ergibt sich:

$$i^n \frac{\delta \langle 0^- | 0^+ \rangle_J}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} = \langle 0^- | T \varphi(\vec{x}_1, t_1) \cdots \varphi(\vec{x}_n, t_n) | 0^+ \rangle \stackrel{(2.61)}{=} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.62)$$

Die Korrelationsfunktionen entsprechen also quantenmechanischen Erwartungswerten und können folgendermaßen physikalisch gedeutet werden:

- Die 1-Punkt-Funktion in Gegenwart der Quelle ist das klassische Feld.
- Die 2-Punkt-Funktion hingegen ist der volle Propagator, d.h. es werden die Wechselwirkungen vollständig berücksichtigt. Setzt man für die Wirkung z.B. die freie Klein-Gordon-Wirkung ein, so ergibt die 2-Punkt-Funktion den Feynman-Propagator der skalaren Theorie (2.38).

2.4 Feynman-Graphen

Die bildliche Sprache der Feynman-Graphen ermöglicht es, komplexe mathematische Formeln physikalisch intuitiv darzustellen. Es gibt für jede Quantenfeldtheorie die passenden Feynmanregeln. Hat man für einen Prozess die entsprechenden Feynmanschen Graphen parat, so kann man ohne weitere Vorbildung z.B. die Streuamplitude für den entsprechenden Prozess berechnen. Auf der anderen Seite kann man ebenso für die abstrakte Formel mittels der Graphen eine Vorstellung über die stattfindenden Prozesse gewinnen. Um das letztere zu tun, werden wir die für uns relevanten Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik auflisten.

Vertex: Der Vertex stellt den Ort der idealisierten Punktwechselwirkung dar.

$$e\gamma^\mu \quad \hat{=} \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} \text{wavy} \quad (\text{QED-Vertex}) \quad (2.63)$$

Propagatoren: Die Propagatoren veranschaulichen die Ausbreitung der Felder zwischen zwei Vertizes.

$$\frac{1}{\not{p} - m} \quad \hat{=} \quad \text{---} \blacktriangleright \text{---} \quad (\text{Fermion-Propagator}) \quad (2.64)$$

$$-\frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \quad \hat{=} \quad \text{---} \text{wavy} \text{---} \quad (\text{Photon-Propagator}) \quad (2.65)$$

externe Felder: Externe Felder koppeln an einen Vertex und entsprechen observablen Größen.

$$A^\mu \quad \hat{=} \quad \text{---} \text{wavy} \text{---} \quad (\text{äußeres Photon}) \quad (2.66)$$

Wir werden keine äußere Elektronen benötigen, da das betrachtete Vakuum nur mit elektromagnetischen Feldern versetzt wird.

Spur: Die Zahl der Spuren gibt in unserem Fall die Ordnung der Näherung wieder.

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}_\gamma \frac{1}{\not{p} - m} \quad \hat{=} \quad \bigcirc \quad (\text{geschlossener Loop}) \quad (2.67)$$

3 Die doppelt-effektive Ein-Loop-Wirkung

In diesem Kapitel wird aufgezeigt, dass der Begriff „effektiv“ im Zusammenhang mit einer Wirkung zwei verschiedene Bedeutungen hat, die in den späteren Betrachtungen beide zum Tragen kommen werden. Zum einen nämlich bezeichnet es die Legendre-Transformierte des erzeugenden Funktionals der n-Punkt-Korrelationsfunktionen, zum anderen ist damit das Ausintegrieren von Freiheitsgraden der Theorie gemeint, wobei in dieser Arbeit die Fermionen als hochenergetische Freiheitsgrade ausintegriert werden. Im Wesentlichen stützt sich die Ausarbeitung auf eine Vortragsreihe von Dr. Holger Gies, die während der Physik-Combo im Wintersemester 2004/2005 gehalten wurde.

3.1 Effektive Wirkung durch Legendre-Transformation

In diesem Abschnitt werden wir auf die Grundlagen der Pfadintegralformulierung zurückgreifen, die im vorigen Kapitel entwickelt wurden. Auch weiterhin werden wir vorerst nicht zwischen dem Eichfeld und den Fermionfeldern unterscheiden und das quantenmechanische Feld mit φ bezeichnen. Seinen Erwartungswert, das klassische Feld, nennen wir ϕ .

Die gesamten Informationen des physikalischen Systems sind kodiert im Funktional $Z[J]$ (2.60), in welches die klassische Wirkung S eingeht.

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi] - i \int J\varphi} \quad (3.1)$$

Davon ausgehend kann man das erzeugende Funktional der zusammenhängenden n-Punkt-Korrelations-Funktionen $W[J]$ definieren, das Schwinger-Funktional:

$$Z[J] \equiv e^{-iW[J]} . \quad (3.2)$$

Obiges kann man analog zur Thermodynamik verstehen, deren freie Energie F dem erzeugenden Funktional W entspricht: $F \equiv i \ln Z$, mit der Zustandssumme Z . Für den Vakuumerwartungswert des quantenmechanischen Feldes in Gegenwart der Quelle ergibt sich:

$$\phi = \langle \varphi \rangle_J = \frac{i}{Z[0]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J} = \frac{\delta W}{\delta J} , \quad (3.3)$$

womit das klassische Feld ϕ in Abhängigkeit der Quelle dargestellt ist und der implizite Zusammenhang $J = J[\phi]$ besteht.

Jetzt nutzt man wie in der klassischen Mechanik oder Thermodynamik die Legendre-Transformation und nennt die Transformierte von W effektive Wirkung.

$$\Gamma[\phi] \equiv -W[J] + \int J\phi \quad \text{mit} \quad J = J[\phi] \quad (3.4)$$

Mit Hilfe der Quantenbewegungsgleichung lässt sich $J(x)$ berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} &= -\frac{\delta W[J]}{\delta\phi(x)} + J(x) + \int \frac{\delta J}{\delta\phi} \phi \\ &= -\int dy \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J[\phi]}{\delta\phi(x)} + J(x) + \int \frac{\delta J}{\delta\phi} \phi \\ &= J(x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Damit kann man die effektive Wirkung $\Gamma[\phi]$ implizit bestimmen. Durch den Vergleich von

$$Z[J] = e^{-iW[J]} \stackrel{(3.4)}{=} e^{i\Gamma[\phi] - i \int J\phi} \stackrel{(3.5)}{=} e^{i\Gamma[\phi] - i \int \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} \phi}$$

und Formel (3.1):

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi] - i \int \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} \varphi}$$

erhält man

$$e^{i\Gamma[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi] - i \int \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} (\varphi - \phi)} \stackrel{(\varphi \rightarrow \phi + \varphi)}{=} \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\phi + \varphi] - i \int \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} \varphi} . \quad (3.6)$$

An diesem sehr formalen formalen Ausdruck gibt es jedoch zwei „Haken“:

- Das Integral enthält beliebig hohe Impulsmoden, welche Divergenzen erzeugen können. Man regularisiert daher mit einem sogenannten „Ultraviolett-Cutoff“, was bedeutet, dass nur über Impulse kleiner als einen Abschneideimpuls Λ integriert wird: $\int_{\Lambda} \mathcal{D}\varphi \phi(p) : p^2 < \Lambda^2$.
- Leider bestimmen die Parameter der Wirkung das Verhalten des Systems bis zu beliebig hohen Impulsen. Die physikalischen Werte dieser Parameter werden jedoch bei einer Messskala μ fixiert, die zu der durch den Abschneideimpuls Λ definierten Skala numerisch nicht unbedingt äquivalent sein muss.

Abschließend wählen wir noch eine andere Darstellung der effektiven Wirkung, indem wir von der Minkowskischen zur euklidischen Geometrie übergehen. Bisher wurde die Quantenfeldtheorie nur in Phasen beschrieben. Gehen wir nun durch analytische Fortsetzung zur euklidischen Theorie über, erhalten wir:

$$it|_M = x_4|_E \Rightarrow \int d^4x|_M = -i \int d^4x|_E$$

Deshalb ergibt sich für die Wirkungen:

$$iS[\varphi]\Big|_M = i \int d^4x \mathcal{L}\Big|_M = -S[\varphi]\Big|_E \quad \text{mit} \quad i\Gamma[\varphi]\Big|_M = -\Gamma[\varphi]\Big|_E \quad (3.7)$$

und die effektive Wirkung hat schließlich folgende Form:

$$e^{-\Gamma[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\phi+\varphi] + \int \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}\varphi} . \quad (3.8)$$

3.2 Die Loop-Entwicklung

Durch die Ersetzung $\varphi \rightarrow \sqrt{\hbar}\varphi$ können wir die Wirkung in Ordnungen von \hbar entwickeln, was bedeutet, dass man mit den \hbar die Zahl der Loops in den Feynman-Graphen zählt. Diese Entwicklung ermöglicht es, in erster Ordnung von \hbar über die fermionischen Pfade zu integrieren und damit eine (doppelt) effektive 1-Loop-Wirkung zu erhalten, welche nur noch vom Eichfeld A_μ abhängt. Wir setzen also

$$e^{-\Gamma[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\phi+\sqrt{\hbar}\varphi] + \int \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}\sqrt{\hbar}\varphi} . \quad (3.9)$$

Die nullte Ordnung läßt sich sofort ablesen zu:

$$\Gamma^{(0)}[\phi] = S[\phi] , \quad \text{„tree-level“} . \quad (3.10)$$

Der führende Term entspricht somit der klassischen Wirkung.

Für die erste Ordnung in \hbar , muss der Exponent entwickelt werden, wobei die ϕ_a und ϕ_b die verschiedenen klassischen Felder von S bezeichnen.

$$S[\phi + \sqrt{\hbar}\varphi] - \int \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}\sqrt{\hbar}\varphi = S[\phi] + \underbrace{\int \left(\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi} - \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} \right)}_{\propto \hbar} \sqrt{\hbar}\varphi + \frac{\hbar}{2} \int \varphi_a \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi_a \delta\phi_b} \varphi_b + O(\hbar^{\frac{3}{2}})$$

Da wir nur an dem 1-Loop-Term interessiert sind, brechen wir die Entwicklung nach dieser Ordnung ab und erhalten:

$$e^{-\Gamma[\phi]} = e^{-S[\phi]} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[-\frac{\hbar}{2} \int \varphi_a \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi_a \delta\phi_b} \varphi_b + O(\hbar^{\frac{3}{2}}) \right] . \quad (3.11)$$

Die obige Schreibweise ist sehr symbolisch und meint, dass die zweiten Ableitungen der Wirkung nach allen Feldern benötigt werden. An dieser Stelle sei eine vereinfachte Möglichkeit dieser abstrakt dargestellten Sattelpunktsnäherung kurz skizziert:

Man führt die obige Näherung erst für die Eichfelder durch und vereinfacht, indem man einen rein bosonischen Strom ankoppelt. Das bedeutet, dass wir von vornherein als äußere Felder ausschließlich elektromagnetische zulassen. Die zweite Ableitung der allgemeinen Wirkung (2.29) nach den Eichfeldern ist aber von diesen unabhängig, weshalb das entsprechende Integral in die Normierungskonstante gezogen werden kann. Demzufolge tritt das Eichfeld nur noch durch das nullte Glied der Entwicklung als klassisches (mittleres) Feld auf. Anschließend können die Fermionen exakt ausintegriert werden, da sie in zweiter Ordnung in die Wirkung

eingehen. Die Fermionfelder sind jedoch Grassman-wertig, weshalb sich für das fermionische Integral der folgende Ausdruck ergibt (siehe auch Anhang C.2):

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\int \bar{\psi}(i\mathcal{D}-m)\psi} = \det(i\mathcal{D} - m) \quad (3.12)$$

Insgesamt erhalten wir unter Beachtung des Faktors $(-i)$ durch die euklidische Darstellung:

$$e^{-\Gamma[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]} = e^{-S[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]} (-i) \det\left(\frac{i\mathcal{D} - m}{i\mathcal{D} - m}\right) \times \text{höhere Loops} \quad (3.13)$$

In Termen der Wirkung geschrieben: $\Gamma[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = S[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + \Gamma^{(1)}[A_\mu] + \dots$, erhält man für die 1-Loop-effektive Wirkung¹

$$\Gamma^{(1)}[A_\mu] = -i \ln \det\left(\frac{i\mathcal{D} - m}{i\mathcal{D} - m}\right). \quad (3.14)$$

Der Nenner trägt hierbei der Forderung Rechnung, dass der Beitrag der effektiven Wirkung für verschwindende Felder ebenfalls verschwinden soll und wird in seiner Bedeutung später als Kontaktterm genauer charakterisiert werden. Innerhalb dieser Theorie können ausschließlich virtuelle Fermionen auftreten, trotzdem können wir später eine Verbindung zur Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren herstellen.

Nun kann man sich die Struktur dieser Loop-Entwicklung nach einigen Umformungen verdeutlichen.

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}[A_\mu] &= -i \operatorname{Tr} \ln\left(\frac{i\mathcal{D} - m}{i\mathcal{D} - m}\right) \\ &= -i \operatorname{Tr} \ln\left(1 - \frac{e\mathcal{A}}{i\mathcal{D} - m}\right) = -i \operatorname{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{e\mathcal{A}}{i\mathcal{D} - m}\right)^n \\ &= i\Omega \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{e\mathcal{A}}{\not{p} - m}\right)^n, \end{aligned}$$

wobei Tr die Spur über die Raumzeit und die Spinorindizes, tr die Spur über die Spinorindizes und Ω das Raumzeitvolumen bezeichnet. Mit den Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik ergibt sich folgende graphische Darstellung der Entwicklung:

$$\Gamma^{(1)}[A_\mu] = \text{Diagram 1} + \frac{1}{2} \text{Diagram 2} + \frac{1}{3} \text{Diagram 3} + \frac{1}{4} \text{Diagram 4} + \dots \quad (3.15)$$

Es treten jedoch nach Furrys Theorem nicht alle der obigen Terme auf. Aus Symmetriegründen verschwinden genau diejenigen mit einer ungeraden Zahl äußerer Photonen.

Nicht nur der 1-Loop-Teil sondern die gesamte Loop-Entwicklung lassen sich in Feynman-Diagrammen darstellen. Jedoch wird der rechnerische Aufwand schnell unverträglich. Schon die Diagramme des 3-Loop-Beitrags sind noch nie berechnet worden.

¹Betrachtet man ausgehend von (3.14) den Niederenergie-Limes ($\omega \ll m_e$), so führt das auf die berühmte Euler-Heisenberg-Wirkung.

3.3 Eigenzeitdarstellung der Wirkung

Der Eigenzeitformalismus, entwickelt von Fock [17] und Schwinger [44], hat sich vor allem für das Studium von effektiven Wirkungen und Propagatoren bewährt. Diese Methode sichert die Invarianz der Resultate, indem sie ausschließlich von eichkovarianten Größen abhängig ist. Somit wollte Schwinger Probleme im Zusammenhang mit der Eichinvarianz umgehen. Da es mit der Eigenzeitmethode außerdem möglich ist, Divergenzen zu isolieren, wird sie häufig einfach als Regularisierungsmethode genutzt.

Darüber hinaus verbindet diese Technik das feldtheoretische Problem eines Teilchenfeldes, welches mit einem externen elektromagnetischen Feld wechselwirkt, mit der Beschreibung einer Teilchenbewegung in Abhängigkeit eines zusätzlichen Entwicklungsparameters, der Eigenzeit. In diesem Sinne greift die Methode zurück auf die Prinzipien „klassischer“ 1-Teilchen-Quantenmechanik, die in Kapitel 2 angerissen wurden.

Um die bisher sehr abstrakte effektive Wirkung in die äußerst nützliche Eigenzeitdarstellung zu bringen, gehen wir von der Determinante in (3.14) aus. Es sei ψ eine Eigenfunktion des Dirac-Operators zum Eigenwert $\lambda - m$:

$$i\mathcal{D}\psi = \lambda\psi ,$$

dann ist $\gamma_5\psi$ ebenfalls Eigenfunktion:

$$i\mathcal{D}\gamma_5\psi = -\gamma_5(i\mathcal{D})\psi = -\lambda(\gamma_5\psi) .$$

Was bedeutet, dass zu jedem Eigenwert λ auch $-\lambda$ existiert, die Eigenwerte also alle gepaart vorkommen, da kein Eigenwert $\lambda = 0$ existiert. Dies spiegelt die Verknüpfung der Dirac-Lorentz-Struktur der (3+1)-dimensionalen QED mit der analytischen Struktur durch den Dirac-Operator wider. Deshalb ist

$$\det(-i\mathcal{D} + m) = \det(i\mathcal{D} + m) . \quad (3.16)$$

Nun läßt sich unter Beachtung der euklidischen Metrik berechnen:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} &= -i \ln \det(i\mathcal{D} - m) + \mathcal{N} \\ &= -i \frac{1}{2} [\ln \det(i\mathcal{D} - m) + \ln \det(-i\mathcal{D} - m)] + \mathcal{N} \\ &= -\frac{i}{2} \ln \det(\mathcal{D}^2 + m^2) + \mathcal{N} \\ &= -\frac{i}{2} \ln \det(-D^2 + m^2 - \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \mathcal{N} , \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei wir $\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ in der folgenden Nebenrechnung eingeführt haben:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu D^\mu D^\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu D^\nu D^\mu) \\ &\stackrel{(\gamma_\mu \gamma_\nu = -\delta_{\mu\nu} + i\sigma_{\mu\nu})}{=} -2D^2 + i\sigma_{\mu\nu}ieF^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(-D^2 - \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right) . \end{aligned}$$

Die Eigenzeitdarstellung erhält man nun, indem man den Logarithmus mit der Frullani-Formel umschreibt:

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = -\int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{-As} - e^{-Bs}) . \quad (3.18)$$

Für unsere Zwecke setzen wir den Parameter s in die komplexe Ebene fort ($s \rightarrow s_{kompl}$) und integrieren über den ersten Quadranten, wobei wir die Null auslassen. Nun nutzen wir den Cauchyschen Integralsatz und erhalten für die Integration über die imaginäre Achse nach der Ersetzung $s_{kompl} \rightarrow is$:

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = -\int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{-iAs} - e^{-iBs}) . \quad (3.19)$$

Die effektive Wirkung erhält damit ihre endgültige Form:

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-im^2 s} \text{Tr} \left(e^{-i(-D^2 - \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu})s} - e^{i\partial^2 s} \right) . \quad (3.20)$$

Im Sinne der Vergleichbarkeit mit späteren Resultaten, führen wir an dieser Stelle den kinetischen Impuls Π ein:

$$\Pi_\mu \equiv p_\mu - eA_\mu , \quad (3.21)$$

welcher in Ortsdarstellung² proportional zur kovarianten Ableitung wird, weshalb man ihn auch kovarianten Impuls nennt.

$$p_\mu - eA_\mu \xrightarrow{OD} -i\partial_\mu - eA_\mu = -iD_\mu \quad (3.22)$$

Wir erhalten nun die effektive 1-Loop-Wirkung in der Eigenzeitdarstellung nach Schwinger [44]:

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-im^2 s} \text{Tr} \left(e^{-i\mathcal{H}s} - e^{i\partial^2 s} \right) , \quad (3.23)$$

wobei

$$\mathcal{H} = -(\gamma\Pi)^2 = \Pi^2 - \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.24)$$

als Hamiltonoperator eines dynamischen Systems interpretiert werden kann. Das Exponential $U(s) = e^{-i\mathcal{H}s}$ kann somit als Zeitentwicklungsoperator angesehen werden, der die Entwicklung eines „Teilchens“ in der Zeit „ s “ beschreibt. Damit ist in dieser Darstellungsweise die Benennung von s als Eigenzeitparameter erklärt.

Historisch war die Herangehensweise natürlich eine andere, nachzulesen ist diese in der Schwingerschen Originalarbeit [44] sowie auch in [18].

²In der Diracschen Theorie wählt man die Zuordnung des Differentialoperators zu einem Impuls üblicherweise so, dass das Elektron den Impuls $p \rightarrow -i\partial$ erhält, während für das Positron $p \rightarrow i\partial$ gilt.

4 Vakuumpolarisation in konstanten, parallelen Feldern

Ziel dieses Kapitels ist es, mit Hilfe des Eigenzeitformalismus' den Polarisationsstensor für einen konstanten elektromagnetischen Hintergrund zu berechnen. Dieser Polarisationsstensor wird exakt in den Hintergrundfeldern sein und beschreibt die Propagation eines schwachen Testfeldes durch das hochenergetische Vakuum. Ausgehend von der von Schwinger [44] berechneten Lagrangedichte in der Eigenzeitdarstellung teilt man in Hinter- und Vordergrundfelder auf. Der Hintergrund wird konstant gesetzt, der Vordergrund kann nun beliebig variieren.

4.1 Einordnung in den theoretischen Hintergrund

Im dritten Kapitel haben wir gesehen, wie man die Wechselwirkung des Vakuums mit einem elektromagnetischen Feld durch Feynman-Graphen darstellen kann. Allgemein veranschaulicht man sich die effektive 1-Loop-Wirkung folgendermaßen:

$$\text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \dots \quad (4.1)$$

Als Grenzfall niedriger Energien ($\omega \ll m_e$) haben Euler und Heisenberg in ihrer wegweisenden Arbeit diese effektive Wirkung für konstante Felder berechnet, die wir mit gestrichelten Beinen darstellen wollen:

$$\text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \dots = \bigcirc\bigcirc \quad (4.2)$$

An dieser Stelle haben wir als graphische Vereinfachung die sogenannten „angezogenen Elektronen“ definiert. Als „angezogen“ bezeichnen wir diejenigen Propagatoren, welche beliebig an den Hintergrund koppeln. Wir kürzen also ab:

Propagator:

$$\begin{array}{c} \text{---} \blacktriangleright \text{---} \\ \text{---} \blacktriangleright \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \blacktriangleright \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \blacktriangleright \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} + \dots, \quad (4.3)$$

Vertex:

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} \begin{array}{c} | \quad | \\ | \quad | \\ | \quad | \end{array} + \dots. \quad (4.4)$$

Die Wirkung (4.2) war und ist Grundlage vielfältiger Berechnungen. Eine Übersicht über die technische Entwicklung ausgehend von dieser Wirkung findet sich im Review-Artikel [13].

Ausgehend von dieser Wirkung wurden auch die ersten nichtlinearen Effekte des Quantenvakuums vorhergesagt. So haben sich erstmalig Euler und Kockel [14] mit der Photon-Photon-Streuung befasst, während später in den Jahren 1970/1971 Effekte wie Photon-Splitting, Photon Dispersion und Polarisationsphänomene in starken magnetischen Feldern vor allem von Adler [1], Brezin und Itzykson [9] sowie dem Ehepaar Bialynicki-Birula [3] ausgearbeitet wurden.

In ihrer Diplomarbeit hat Katrin Koch [33] den Grenzwert niedriger Intensitäten von (4.2) betrachtet und mit einer Lagrangedichte, die bis zur zweiten Ordnung in den Invarianten genähert war, die Ausbreitung des Testfeldes untersucht.

Die dazu notwendige Aufspaltung des Feldes in Vorder- und Hintergrund in der Euler-Heisenberg-Wirkung ist jedoch starken Einschränkungen unterworfen, da diese ausschließlich für konstante Felder hergeleitet wurde. Deshalb betrachteten Tsai und Erber in ihrer Arbeit [48] die allgemeine Wirkung in der Schwingerschen Eigenzeitdarstellung (3.23) und teilten schon an dieser Stelle die Felder auf. Das Testfeld, welches bis zur zweiten Ordnung betrachtet wird, ist nun räumlich und zeitlich frei veränderlich. Der durch den Hintergrund bestimmte Teil der Wirkung, die in der vorliegenden Arbeit für parallele elektromagnetische Felder abgeleitet wurde, hat die graphische Darstellung:

$$\begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \end{array} + \dots. \quad (4.5)$$

Man erkennt gut, dass die Propagation des Testfeldes durch den Hintergrund, welcher an das virtuelle Elektron-Positron-Paar koppelt, verändert wird. Dies hat die erwähnten optischen Phänomene wie Doppelbrechung und auch Absorption, die mit der Paarerzeugung in Zusammenhang steht, zur Folge.

4.2 Grundlagen

Die Ein-Loop-Effektive-Wirkung (3.23) lautet nach Tsai und Erber [48]:

$$\Gamma^{(1)}(\tilde{A}) = \frac{1}{2} i \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \text{Tr} (e^{-i\mathcal{H}s} + c.t.) , \quad (4.6)$$

wobei der Hamiltonoperator, der die Wechselwirkung von Photonen mit Elektronen charakterisiert, wie folgt gegeben ist:

$$\mathcal{H} = \tilde{\Pi}^2 - \frac{1}{2}e\sigma\tilde{F} \quad \text{mit} \quad (4.7)$$

$$\tilde{\Pi} = p_\mu - e\tilde{A}_\mu \quad \text{und} \quad \sigma\tilde{F} = \sigma_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} .$$

Das c.t. bezeichnet die „Kontaktterme“¹, die letztlich die Renormierung des Maxwellterms aus der Wirkung subtrahieren und mit der Normierungskonstante des vorigen Kapitels identisch sind.

Die Spur ist über die Raumzeit- und die Spinorindizes zu nehmen und Π_μ ist der kinetische Impuls. Das externe Feld wird im Weiteren mit großen Buchstaben gekennzeichnet, das Testfeld mit kleinen: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ und $f_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{a}_\nu - \partial_\nu \mathbf{a}_\mu$. Demzufolge ergibt sich für den kinetischen Impuls

$$\tilde{\Pi} = \Pi_\mu - e\mathbf{a}_\mu, \quad \Pi = p_\mu - eA_\mu$$

und die Hamiltonfunktion teilt sich auf in die diejenige des konstanten Hintergrundes und einen Störterm, der das fluktuierende Testfeld beschreibt.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad (4.8)$$

mit

$$\mathcal{H}_0 = \Pi^2 - \frac{1}{2}e\sigma F, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{H}_1 = e \left(\Pi \mathbf{a} + \mathbf{a} \Pi + \frac{1}{2} \sigma f \right) + e^2 \mathbf{a}^2. \quad (4.10)$$

Um lineare Bewegungsgleichungen in den Testfeldern zu erhalten, betrachtet man diese bis zur zweiten Ordnung, ohne jedoch den konstanten Hintergrund zu nähern.

4.3 Bewegungsgleichungen für konstante Felder

Unter Beachtung dessen, dass der Parameter s als die Zeit eines Systems aufgefasst werden kann, welches von obiger Hamiltonfunktion bestimmt wird, betrachten wir die Bewegungsgleichungen für konstante externe Felder. Mit dem ungestörten Hamiltonoperator lässt sich nach Schwinger die Übergangsamplitude, die die Zeitentwicklung des Systems charakterisiert, bestimmen. Des Weiteren erhält man noch einige zum Rechnen nützliche Relationen.

Vorangestellt seien hier die grundlegenden Kommutatorrelationen:

$$[x_\mu, \Pi_\nu] = i\delta_{\mu\nu}, \quad [\Pi_\mu, \Pi_\nu] = ieF_{\mu\nu}. \quad (4.11)$$

¹Diese Bezeichnungsweise ist womöglich veraltet.

Wir beschäftigen uns mit dem dynamischen Problem, in dem die Raumzeitkoordinaten eines „Teilchens“ vom Eigenzeitparameter s abhängen.

$$\frac{dx_\mu}{ds} = -i[x_\mu, \mathcal{H}] = 2\Pi_\mu, \quad (4.12)$$

$$\frac{d\Pi_\mu}{ds} = -i[\Pi_\mu, \mathcal{H}] = e(F_{\mu\nu}\Pi_\nu + \Pi_\nu F_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}e\sigma_{\alpha\nu}i[\Pi_\nu, F_{\alpha\nu}] \quad (4.13)$$

$$= 2eF_{\mu\nu}\Pi_\nu - ie(\partial F_{\mu\nu}/\partial x_\nu) + \frac{1}{2}e\sigma_{\alpha\nu}(\partial F_{\alpha\nu}/\partial x_\mu), \quad (4.14)$$

wobei die erste der Gleichungen die kanonische für die Raumzeit ist, während die zweite eine entsprechende für den kinetischen Impuls (im Gegensatz zum kanonisch konjugierten) darstellt.

Nun greifen wir auf das zweite Kapitel und die dort vorgestellte Definition der Übergangsamplitude (2.45) zurück:

$$\langle x|U(s)|y\rangle = \langle x(s)|y(0)\rangle, \quad \text{mit } U(s) = \exp(-i\mathcal{H}s). \quad (4.15)$$

Diese genügt den folgenden Differentialgleichungen:

$$i\partial_s\langle x(s)|y(0)\rangle = \langle x(s)|\mathcal{H}|y(0)\rangle, \quad (4.16)$$

$$(-i\partial_\mu^x - eA_\mu(x))\langle x(s)|y(0)\rangle = \langle x(s)|\Pi_\mu(s)|y(0)\rangle, \quad (4.17)$$

$$(-i\partial_\mu^y - eA_\mu(y))\langle x(s)|y(0)\rangle = \langle x(s)|\Pi_\mu(0)|y(0)\rangle \quad (4.18)$$

unter der Randbedingung:

$$\lim_{s\rightarrow 0}\langle x(s)|y(0)\rangle = \delta(x-y). \quad (4.19)$$

Spezialisieren wir jetzt auf konstante Felder, vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen wie folgt:

$$\frac{dx_\mu}{ds} = 2\Pi_\mu \quad \text{und} \quad \frac{d\Pi_\mu}{ds} = 2eF_{\mu\nu}\Pi_\nu \quad (4.20)$$

mit den formalen Lösungen

$$\Pi(s) = e^{2eFs}\Pi(0) \quad (4.21)$$

$$x(s) = [(e^{2eFs} - 1)/eF]\Pi(0) + x(0). \quad (4.22)$$

Zur Vereinfachung der Notation sind wir zur Lösung obiger Differentialgleichungen in die Matrixschreibweise übergegangen. Diese Schreibweise ist zulässig, da die Matrix $F_{\mu\nu}$ mit jeder entwickelbaren Funktion von sich vertauscht. Nun schreibt man die Lösungen unter Benutzung der Antisymmetrie des Feldstärketensors um:

$$\Pi(0) = \frac{1}{2}eFe^{-eFs}\sinh^{-1}(eFs)(x(s) - x(0)), \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= \frac{1}{2}eFe^{eFs}\sinh^{-1}(eFs)(x(s) - x(0)) \\ &= (x(s) - x(0))\frac{1}{2}eFe^{-eFs}\sinh^{-1}(eFs). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Wir berechnen jetzt das Quadrat des kinetischen Impulses:

$$\Pi^2(s) = (x(s) - x(0))K(x(s) - x(0)) \quad (4.25)$$

$$\text{mit } K = \frac{1}{4}e^2F^2 \sinh^{-2}(eFs) \quad (4.26)$$

und ordnen die Terme mit Hilfe des folgenden Kommutators:

$$[x(s), x(0)] = [(e^{2eFs} - 1)(eF)^{-1}\Pi(0) + x(0), x(0)] \quad (4.27)$$

$$= i(e^{2eFs} - 1)(eF)^{-1}. \quad (4.28)$$

Daraus ergibt sich für den Hamiltonoperator:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}e\sigma F + x(s)Kx(s) - 2x(s)Kx(0) + x(0)Kx(0) - \frac{i}{2}e \operatorname{tr}F \coth(eFs) \quad (4.29)$$

und man schreibt die Differentialgleichung (4.16) für die Übergangsamplitude:

$$i\partial_s \langle x(s)|y(0) \rangle = \left[-\frac{1}{2}e\sigma F + x(s)Kx(s) + (x - y)K(x - y) - \frac{i}{2}e \operatorname{tr}F \coth(eFs) \right] \langle x(s)|y(0) \rangle. \quad (4.30)$$

Deren Lösung sieht folgendermaßen aus:

$$\langle x(s)|y(0) \rangle = C(x, y)e^{-L(s)}s^{-2} \exp \left[\frac{1}{4}i(x - y)eF \coth(eFs)(x - y) \right] \exp \left(\frac{1}{2}ie\sigma Fs \right) \quad (4.31)$$

mit

$$L(s) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} \ln[(eFs)^{-1} \sinh(eFs)]. \quad (4.32)$$

Die anderen Differentialgleichungen (4.17 und 4.18) können benutzt werden, um den skalaren Faktor $C(x, y)$ zu bestimmen.

$$\langle x(s)|\Pi(s)|y(0) \rangle = \frac{1}{2}[eF \coth(eFs) + eF](x - y)\langle x(s)|y(0) \rangle, \quad (4.33)$$

$$\langle x(s)|\Pi(0)|y(0) \rangle = \frac{1}{2}[eF \coth(eFs) - eF](x - y)\langle x(s)|y(0) \rangle \quad (4.34)$$

Nach Einsetzen von (4.31) erhält man die Bestimmungsgleichungen:

$$\left[-i\partial_\mu^x - eA_\mu(x) - \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}(x - y)_\nu \right] C(x, y) = 0, \quad (4.35)$$

$$\left[i\partial_\mu^y - eA_\mu(y) - \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}(x - y)_\nu \right] C(x, y) = 0. \quad (4.36)$$

Die Lösung der ersteren hat folgende Form:

$$C(x, y) = C(x) \exp \left[ie \int_y^x dz (A(z) + \frac{1}{2}F(z - y)) \right], \quad (4.37)$$

wobei das Integral wegunabhängig ist. (Der Integrand ist als Gradientenfeld darstellbar.) Indem man den Integrationsweg auf die geradlinige Verbindung der Punkte x und y einschränkt und die Antisymmetrie des Feldstärketensors nutzt, vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$C(x, y) = C\phi(x, y) \quad \text{mit} \quad (4.38)$$

$$\phi(x, y) = \exp \left[ie \int_x^y dz A(z) \right], \quad C = \text{konst.} \quad (4.39)$$

Den Wert der Konstante C bekommt man durch die Randbedingung, unter Beachtung dessen, dass der Grenzwert der Transformationsfunktion für s gegen Null feldunabhängig wird. Mit der Darstellung der δ -Distribution mittels des Gaußschen Integrals folgt

$$C = -i(4\pi)^{-2}. \quad (4.40)$$

Schließlich ergibt sich für die Transformationsfunktion:

$$\begin{aligned} \langle x(s)|y(0) \rangle = & -i(4\pi)^{-2} \phi(x, y) e^{-L(s)} s^{-2} \exp \left[\frac{1}{4} i(x-y) eF \coth(eFs)(x-y) \right] \\ & * \exp \left(\frac{1}{2} ie\sigma Fs \right), \quad (4.41) \end{aligned}$$

wobei die gesamte Eichabhängigkeit im Holonomie-Faktor $\phi(x, y)$ steckt.

4.4 Ableitung des Polarisationstensors

Betrachten wir hierfür zuerst die im Integral (4.6) auszuwertende Spur. Diese vereinfachen wir, indem wir sie bis zur zweiten Ordnung in den Testfeldern entwickeln, während der Hintergrund ungenähert bleibt.

Laut Schwinger [44] geht man dabei folgendermaßen vor:

Wir führen den zum Zeitentwicklungsoperator zugehörigen Operator $V(s)$ ein, der der Schrödingergleichung für \mathcal{H}_1 genügt:

$$V(s) = \exp(i\mathcal{H}_0 s) \exp(-i\mathcal{H} s) = U_0^{-1}(s) U(s). \quad (4.42)$$

Demnach folgt aus der Schrödingergleichung im Wechselwirkungsbild:

$$i\partial_s V(s) = U_0^{-1}(s) \mathcal{H}_1 U_0(s) V(s) \quad \text{mit} \quad (4.43)$$

$$V(0) = 1 \quad (4.44)$$

als Anfangsbedingung nach formaler Integration:

$$V(s) = 1 - i \int_0^s ds' U_0^{-1}(s') \mathcal{H}_1 U_0(s') V(s') \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} & = 1 - i \int_0^s ds' U_0^{-1}(s') \mathcal{H}_1 U_0(s') \\ & \quad + (-i)^2 \int_0^s ds' U_0^{-1}(s') \mathcal{H}_1 U_0(s') \int_0^{s'} ds'' U_0^{-1}(s'') \mathcal{H}_1 U_0(s'') + \dots \quad (4.46) \end{aligned}$$

Indem wir jetzt die neuen Integrationsvariablen u_1, u_2, \dots einführen

$$s' = su_1, \quad s'' = s'u_2, \dots, \quad (4.47)$$

erhalten wir als Entwicklung:

$$\begin{aligned} U(s) &= e^{-i\mathcal{H}s} \\ &= U_0(s) + (-is) \int_0^1 du_1 U_0((1-u_1)s) \mathcal{H}_1 U_0(u_1s) + \dots \\ &\quad + (-is)^n \int_0^1 u_1^{n-1} du_1 \int_0^1 u_2^{n-2} du_2 \dots \int_0^1 du_n \\ &\quad \times U_0((1-u_1)s) \mathcal{H}_1 U_0(u_1(1-u_2)s) \dots \\ &\quad \times U_0(u_1 \dots u_{n-1}(1-u_n)s) \mathcal{H}_1 U_0(u_1 \dots u_n s) + \dots \end{aligned} \quad (4.48)$$

Nun betrachten wir den folgenden Zusammenhang in welchem obige Formel ihre Anwendung findet:

$$\text{Tr}U(s) - \text{Tr}U_0(s) = -is \int_0^1 d\lambda \text{Tr} \left[\mathcal{H}_1 e^{-is(\mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}_1)} \right] \quad (4.49)$$

und berechnen damit

$$\begin{aligned} \text{Tr}U(s) &= \text{Tr}U_0(s) + (-is) \text{Tr}[\mathcal{H}_1 U_0(s)] + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} (-is)^2 \int_0^1 du_1 \text{Tr}[\mathcal{H}_1 U_0((1-u_1)s) \mathcal{H}_1 U_0(u_1s)] + \dots \\ &\quad + \frac{(-is)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 u_1^{n-1} du_1 \int_0^1 u_2^{n-2} du_2 \dots \int_0^1 du_n \\ &\quad \times \text{Tr}[\mathcal{H}_1 U_0((1-u_1)s) \mathcal{H}_1 \dots \mathcal{H}_1 U_0(u_1 \dots u_n s)] + \dots \end{aligned} \quad (4.50)$$

Wenn wir wie verabredet nur die Terme bis zweiter Ordnung in \mathbf{a} behalten und u_1 durch $\frac{1}{2}(1+v)$ substituieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \exp(-is\mathcal{H}) &= \text{Tr} e^{-is\mathcal{H}_0} - is \text{Tr} \left[e^{-is\mathcal{H}_0} \mathcal{H}_1 \right] \\ &\quad - \frac{s^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \text{Tr} \left[e^{-i\frac{s}{2}(1-v)\mathcal{H}_0} \mathcal{H}_1 e^{-i\frac{s}{2}(1+v)\mathcal{H}_0} \mathcal{H}_1 \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.51)$$

Nachdem wir nun die Entwicklung der Spur über den Exponentialoperator in zweiter Ordnung der Testfelder ausgewertet haben, besitzen wir das nötige Handwerkszeug zur Berechnung der Determinante mit exaktem Hintergrundfeld. Wir erhalten also für die Ein-Loop-Korrektur der Wirkung in zweiter Ordnung des Testfeldes:

$$\Gamma^1(\tilde{A}) = -\frac{1}{4} i e^2 \int_0^\infty s ds e^{-ism^2} (I_a + I_b + c.t.), \quad (4.52)$$

wobei²:

$$I_a = \frac{2i}{s} \text{Tr} \left(e^{-is\mathcal{H}_0} \mathbf{a}^2 \right), \quad (4.53)$$

$$I_b = \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \text{Tr} \left[e^{-i\frac{s}{2}(1-v)\mathcal{H}_0} \left(\Pi \mathbf{a} + \mathbf{a} \Pi + \frac{1}{2} \sigma f \right) e^{-i\frac{s}{2}(1+v)\mathcal{H}_0} \left(\Pi \mathbf{a} + \mathbf{a} \Pi + \frac{1}{2} \sigma f \right) \right]. \quad (4.54)$$

Im Folgenden werden wir das Hintergrundfeld konstant setzen und weiterhin annehmen, dass elektrisches und magnetisches Feld parallel sind und o.B.d.A. in die z-Richtung zeigen:

$$F_{12} = -F_{21} = B \quad \text{und} \quad F_{30} = -F_{03} = E. \quad (4.55)$$

Die Parallelität der Felder bedeutet hierbei fast keine Einschränkung, da eine allgemeine Feldkonfiguration durch Lorentz-Transformation in unser Szenario umgewandelt werden kann. Dabei ist zu beachten, dass die Situation senkrecht aufeinander stehender Felder physikalisch zu der mit nur einem Feld äquivalent ist. (siehe Anhang B)

Nur die Situation gekreuzter Felder³, die den Grenzfall unendlich großer Wellenlänge für stehende ebene Wellen beschreibt, ist aufgrund des Verschwindens beider Invarianten nicht in dieser Rechnung enthalten.

Vorab werden wir dieselben Abkürzungen wie Urrutia [49] einführen:

$$\begin{aligned} z &= esB, & z' &= esE, \\ k_\mu^\perp &= (0, -k_1, -k_2, 0), & k_\mu^\parallel &= (k_0, 0, 0, -k_3), \\ \tilde{k}_\mu^\perp &= (0, -k_2, k_1, 0), & \tilde{k}_\mu^\parallel &= (k_3, 0, 0, -k_0) \end{aligned}$$

und zusätzlich definieren wir:

$$(V_\parallel)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (V_\perp)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Beginnen wir mit dem ersten Integral:

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{2i}{s} \text{Tr} \left(e^{-is\mathcal{H}_0} \mathbf{a}^2 \right) \\ &= \frac{2i}{s} \text{tr} \int dx \langle x | e^{-is\mathcal{H}_0} | x \rangle \mathbf{a}^2(x), \end{aligned} \quad (4.57)$$

welches die Übergangsamplitude (4.31) enthält, die unabhängig von den Raumzeitkoordinaten ist und demzufolge aus dem Integral gezogen werden kann.

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-is\mathcal{H}_0} | x \rangle &\equiv \langle x(s) | x \rangle \\ &= \frac{-i}{(4\pi)^2} e^{-L(s)} \frac{1}{s^2} \exp \left[\frac{i}{2} e\sigma F s \right] \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$L(s) = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left[\frac{\sinh(eFs)}{eFs} \right].$$

²Die den Impuls enthaltenden Summanden von \mathcal{H}_1 verschwinden in I_a , da sie mit Hilfe der Lorenzzeichnung in eine totale Divergenz umgewandelt werden können. Außerdem verschwindet die Spur über die Spinorindizes des Kommutators σ aufgrund der zyklischen Vertauschbarkeit von Argumenten der Spur.

³„crossed fields“: $\vec{E} \perp \vec{B}$ und $|\vec{E}| = |\vec{B}|$, siehe auch [2, 36]

Die zur Auswertung von $\text{tr}\langle x(s)|x\rangle$ nötigen Berechnungen finden sich in Anhang D.1 und liefern:

$$\text{tr}\langle x(s)|x\rangle = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{z'z}{\sinh z' \sin z} \frac{4}{s^2} \cosh z' \cos z .$$

Daraus folgt für das Integral I_a nach Fouriertransformation des Vektorpotentials:

$$I_a = \frac{2}{(4\pi)^2} \frac{4}{s^3} z'z \coth z' \cot z \int d^4k \mathbf{a}^\mu(-k) \mathbf{a}_\mu(k) . \quad (4.58)$$

Um das zweite Integral auszuwerten, sei eine wichtige Überlegung vorangestellt: Alle in v ungeraden Summanden können keinen Beitrag zum Integral liefern. Wir werden sie in den folgenden Rechnungen demnach ohne weitere Bemerkung unterdrücken.

Nun benutzen wir die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Bewegungsgleichungen. Wir werden folgende Relationen benötigen:

$$\gamma_\mu e^{-i\tau\mathcal{H}_0} = e^{-i\tau\mathcal{H}_0} (\gamma e^{-2eF\tau}) \quad (4.59)$$

$$\Pi_\mu e^{-i\tau\mathcal{H}_0} = e^{-i\tau\mathcal{H}_0} (\Pi e^{-2eF\tau}) \quad (4.60)$$

$$x(\tau) \equiv e^{i\tau\mathcal{H}_0} x e^{-i\tau\mathcal{H}_0} = x + D(\tau)\Pi , \quad (4.61)$$

wobei

$$D(\tau) = \frac{e^{2eF\tau} - 1}{eF} , \quad \tau = s \frac{1+v}{2} .$$

Während die letzteren direkt aus den Gleichungen (4.21, 4.22) folgen, ist für die erste eine kurze Rechnung notwendig (Anhang D.1). Mit Hilfe dieser Relationen ergibt sich für das zweite Integral in Lorenzeichung folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} I_b &= \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \text{Tr} \left[e^{-i\frac{s}{2}(1-v)\mathcal{H}_0} \left(2\mathbf{a}\Pi - i \underbrace{\partial_\mu \mathbf{a}^\mu}_{=0} + \frac{1}{2}\sigma f \right) e^{-i\frac{s}{2}(1+v)\mathcal{H}_0} \left(2\mathbf{a}\Pi - i \underbrace{\partial_\mu \mathbf{a}^\mu}_{=0} + \frac{1}{2}\sigma f \right) \right] \\ &= \text{tr} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \int dx \langle x(s) | 4e^{i\tau\mathcal{H}_0} \mathbf{a}^\mu(x) e^{-i\tau\mathcal{H}_0} (\Pi e^{-2eF\tau})_\mu \mathbf{a}^\nu(x) \Pi_\nu \\ &\quad + e^{i\tau\mathcal{H}_0} \mathbf{a}^\mu(x) e^{-i\tau\mathcal{H}_0} (\Pi e^{-2eF\tau})_\mu \sigma f(x) + e^{i\tau\mathcal{H}_0} \sigma f(x) e^{-i\tau\mathcal{H}_0} \mathbf{a}^\nu(x) \Pi_\nu \\ &\quad + \frac{1}{4} e^{i\tau\mathcal{H}_0} \sigma f(x) e^{-i\tau\mathcal{H}_0} \sigma f(x) | x \rangle . \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt werden die Testfelder Fourier-transformiert und danach der Kommutator

der Gammatrizen ausgewertet.

$$\begin{aligned}
I_b &= \text{tr} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \iint \frac{d^4 q d^4 k}{(2\pi)^4} \mathbf{a}^\mu(q) \mathbf{a}^\nu(k) \\
&\quad \int dx \langle x(s) | 4e^{iqx(\tau)} (\Pi e^{-2eF\tau})_\mu e^{ikx} \Pi_\nu + 2e^{iqx(\tau)} (\Pi e^{-2eF\tau})_\mu \sigma_{\alpha\nu} i k^\alpha e^{ikx} \\
&\quad + 2e^{i\tau\mathcal{H}_0} \sigma_{\alpha\mu} i q^\alpha e^{iqx} e^{-i\tau\mathcal{H}_0} e^{ikx} \Pi_\nu - e^{i\tau\mathcal{H}_0} \sigma_{\alpha\mu} q^\alpha e^{iqx} e^{-i\tau\mathcal{H}_0} \sigma_{\beta\nu} k^\beta e^{ikx} | x \rangle \\
&= \text{tr} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \iint \frac{d^4 q d^4 k}{(2\pi)^4} \mathbf{a}^\mu(q) \mathbf{a}^\nu(k) \\
&\quad \int dx \langle x(s) | 4e^{iqx(\tau)} (\Pi e^{-2eF\tau})_\mu e^{ikx} \Pi_\nu - 2e^{iqx(\tau)} (\Pi e^{-2eF\tau})_\mu \gamma_\nu k \gamma e^{ikx} \\
&\quad - 2(\gamma e^{-2eF\tau})_\mu (\gamma e^{-2eF\tau} q) e^{iqx(\tau)} e^{ikx} \Pi_\nu + (\gamma e^{-2eF\tau})_\mu (\gamma e^{-2eF\tau} q) e^{iqx(\tau)} \gamma_\nu k \gamma e^{ikx} | x \rangle
\end{aligned}$$

Nutzt man außerdem die zyklische Vertauschbarkeit von Faktoren unter der Spur geschickt aus, erhält man als vorläufiges Ergebnis:

$$\begin{aligned}
I_b &= \text{tr} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \iint \frac{d^4 q d^4 k}{(2\pi)^4} \mathbf{a}^\mu(q) \mathbf{a}^\nu(k) \\
&\quad \int dx e^{ikx} \langle x(s) | \left[(2\Pi e^{-2eF\tau})_\mu + (\gamma e^{-2eF\tau})_\mu (\gamma e^{-2eF\tau} q) \right] e^{iqx(\tau)} [2\Pi_\nu + \gamma_\nu k \gamma] | x \rangle. \quad (4.62)
\end{aligned}$$

Um die Rechnung zu einem glücklichen Ende führen zu können, brauchen wir allerdings noch einige weitere Relationen. Mit Baker-Campbell-Hausdorff zeigt man, daß sich $e^{iqx(\tau)}$ aufteilen läßt:

$$\begin{aligned}
e^{iqx(\tau)} &= \exp \left[iq \left(\frac{D(\tau)}{D(s)} \right) x + iq D(\tau) \Pi + iqx - iq \left(\frac{D(\tau)}{D(s)} \right) x \right] \\
&= e^{iqdx(s)} e^{iq(1-d)x} e^\delta,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
d_{\mu\nu} &= [D(\tau)/D(s)]_{\mu\nu} \quad \text{und} \\
\delta &= -\frac{1}{2} iq(1-d)^T D(\tau) q.
\end{aligned}$$

Diese Aufteilung ist sinnvoll, um nun $e^{iqx(s)}$ nach links und entsprechend $e^{iqx(1-d)}$ nach rechts durchzuziehen, damit sich beide als e^{iqx} zum e^{ikx} gesellen können. Natürlich muss man die dabei auftretenden Kommutatoren beachten, wobei die folgende Relation nützlich ist:

$$e^a b = (b + [a, b]) e^a.$$

Mit $[x(s), \Pi] = ie^{2eFs}$ erhält man:

$$I_b = \int \int \frac{d^4 q d^4 k}{(2\pi)^4} \mathbf{a}^\mu(q) \mathbf{a}^\nu(k) \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \text{tr} \left[\int dx e^{i(k+q)x} e^\delta \left\{ 4 (e^{-2eF\tau})_\mu^\alpha \langle x(s) | \Pi_\alpha \Pi_\mu | x \rangle \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\left\{ (2q d e^{eF(s-sv)})_\mu + (\gamma e^{-2eF\tau})_\mu (\gamma e^{-2eF\tau} q) \right\} \{ (-2q(1-d))_\nu + \gamma_\nu k \gamma \} \right] \langle x(s) | x \rangle \right] \right].$$

Dabei verwendeten wir, dass nach (4.34) $\langle x(s) | \Pi_\mu | x \rangle = 0$ gilt. Womit man auch, indem man einen der Impulse durch eine Lösung der Bewegungsgleichungen ersetzt, zeigt:

$$\langle x(s) | \Pi_\mu \Pi_\nu | x \rangle = \langle x(s) | x \rangle \left(-\frac{i}{D(s)} \right)_{\mu\nu}.$$

Des Weiteren benutzen wir:

$$d e^{eF(s-sv)} = d^T.$$

und berechnen an dieser Stelle außerdem das $\delta(q \rightarrow -k)$ zu (Anhang D):

$$\delta \equiv \delta(q \rightarrow -k) = -is \left[\frac{\cosh z' - \cosh z'v}{2z' \sinh z'} k_\parallel^2 + \frac{\cos zv - \cos z}{2z \sin z} k_\perp^2 \right]. \quad (4.63)$$

Anhand der nächsten Formel werden die die aufwändigen Rechnungen, die durch Auswerten der Spur nötig sind, deutlich. Wir werden die Terme gesondert behandeln, jedoch nicht alle Details der Rechnungen ausführen. Das auszuwertende Integral lautet:

$$I_b = \int d^4 k \mathbf{a}^\mu(-k) \mathbf{a}^\nu(k) \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \text{tr} e^\delta \left[\underbrace{\left(-\frac{4ie^{-2eF\tau}}{D(s)} \right)_{\mu\nu}}_{(1)} \underbrace{-4 (kd^T)_\mu (k(1-d))_\nu}_{(2)} \underbrace{-2 (kd^T)_\mu (\gamma_\nu \gamma k)}_{(3)} \right. \\ \left. \underbrace{-2 (\gamma e^{-2eF\tau})_\mu (\gamma e^{-2eF\tau} k)_\nu}_{(4)} \underbrace{- (\gamma e^{-2eF\tau})_\mu (\gamma e^{-2eF\tau} k)_\nu \gamma_\nu \gamma k}_{(5)} \right] \langle x(s) | x \rangle. \quad (4.64)$$

Zuerst wenden wir uns der Transformationsfunktion zu, in der ein Exponential in Abhängigkeit von σ auftritt. Wir benutzen die Überlegungen von vorhin, nutzen aber eine etwas andere Darstellung zur Auswertung:

$$\exp \left[\frac{i}{2} e\sigma F \right] = \exp [-es(\gamma_1 \gamma_2 B + \gamma_0 \gamma_3 E)].$$

Wiederum vertauschen die Matrizen, weshalb man ein Produkt von Exponentialen erhält:

$$\exp \left[\frac{i}{2} e\sigma F \right] = [\mathbb{1} \cosh(esE) - \gamma_0 \gamma_3 \sinh(esE)] [\mathbb{1} \cos(esB) - \gamma_1 \gamma_2 \sin(esB)].$$

Demnach treten Spuren über zwei, vier, sechs und auch acht Gammamatrizen auf (Anhang D). Wir erhalten also mit der Abkürzung:

$$\alpha = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{z'z}{\sinh z' \sin z} \frac{1}{s^2} \quad (4.65)$$

für die ersten Terme:

$$(1) \hat{=} \text{tr} \left[- \left(\frac{4ie^{-2eF\tau}}{D(s)} \right)_{\mu\nu} \langle x(s)|x \rangle \right] = -\alpha \left(\frac{4ie^{-2eF\tau}}{D(s)} \right)_{\mu\nu} 4 \cosh z' \cos z, \quad (4.66)$$

$$(2) \hat{=} \text{tr} [-4(kd^T)_\mu(k(1-d))_\nu \langle x(s)|x \rangle] = -4\alpha(kd^T)_\mu(k(1-d))_\nu 4 \cosh z' \cos z. \quad (4.67)$$

Danach folgen die Terme mit zwei und vier Gammamatrizen:

$$(3) \hat{=} \text{tr} \left[-2(kd^T)_\mu (\gamma_\nu \gamma k) \langle x(s)|x \rangle \right] \\ = -2\alpha(kd^T)_\mu \left[-\tilde{k}_\nu^\perp 4 \cosh z' \sin z - \tilde{k}_\nu^\parallel 4 \sinh z' \cos z + 0 \right], \quad (4.68)$$

$$(4) \hat{=} \text{tr} \left[-2(\gamma e^{-2eF\tau})_\mu (\gamma e^{-2eF\tau} k) (k(1-d))_\nu \langle x(s)|x \rangle \right] \\ = -2\alpha \left[(e^{2eF\tau} V_\perp e^{-2eF\tau})_\mu (k(1-d))_\nu 4 \cosh z' \sin z \right. \\ \left. + (e^{2eF\tau} V_\parallel e^{-2eF\tau})_\mu (k(1-d))_\nu 4 \sinh z' \cos z + 0 \right]. \quad (4.69)$$

Nun kommt es darauf an, nicht die Nerven zu verlieren, um den letzten Term auszuwerten:

$$(5) \hat{=} \text{tr} \left[-(\gamma e^{-2eF\tau})_\mu (\gamma e^{-2eF\tau} k) \gamma_\nu \gamma k \langle x(s)|x \rangle \right] \\ = -4\alpha \left\{ \left[-(e^{-2eF\tau})_{\nu\mu} (ke^{-2eF\tau} k) + (ke^{-2eF\tau})_\mu (e^{-2eF\tau} k)_\nu \right] \cosh z' \cos z \right. \\ - \left[(e^{-2eF\tau})_{\nu\mu} (\tilde{k}_\perp e^{-2eF\tau} k) - (\tilde{k}_\perp e^{-2eF\tau})_\mu (e^{-2eF\tau} k)_\nu \right. \\ \left. - (ke^{-2eF\tau})_\mu (V_\perp e^{-2eF\tau} k)_\nu + (ke^{-2eF\tau} k) (V_\perp e^{-2eF\tau})_{\nu\mu} \right] \cosh z' \sin z \\ - \left[(e^{-2eF\tau})_{\nu\mu} (\tilde{k}_\parallel e^{-2eF\tau} k) - (\tilde{k}_\parallel e^{-2eF\tau})_\mu (e^{-2eF\tau} k)_\nu \right. \\ \left. - (ke^{-2eF\tau})_\mu (V_\parallel e^{-2eF\tau} k)_\nu + (ke^{-2eF\tau} k) (V_\parallel e^{-2eF\tau})_{\nu\mu} \right] \sinh z' \cos z \\ + \left[(e^{2eF\tau} V_\parallel e^{-2eF\tau} k)_\mu (-\tilde{k}_\nu^\perp) - (V_\parallel e^{-2eF\tau})_{\nu\mu} (\tilde{k}_\perp e^{-2eF\tau} k) \right. \\ + (\tilde{k}_\parallel e^{-2eF\tau})_\mu (V_\perp e^{-2eF\tau} k)_\nu + (e^{2eF\tau} V_\perp e^{-2eF\tau} k)_\mu (-\tilde{k}_\nu^\parallel) \\ \left. - (V_\perp e^{-2eF\tau})_{\nu\mu} (\tilde{k}_\parallel e^{-2eF\tau} k) + (\tilde{k}_\perp e^{-2eF\tau})_\mu (V_\parallel e^{-2eF\tau} k)_\nu \right] \sinh z' \sin z \left. \right\}. \quad (4.70)$$

Inzwischen können wir ein mittelfristiges Ziel ins Auge fassen. Wir werden die Wirkung nämlich in der folgenden Form darstellen:

$$\Gamma^{(1)} = -\frac{1}{2} \int d^4 k \mathbf{a}^\mu(-k) \mathbf{a}^\nu(k) \Pi_{\mu\nu}(k). \quad (4.71)$$

Die gesamten Nichtlinearitäten der 1-Loop-Ebene stecken damit in dem Polarisationsensor $\Pi_{\mu\nu}$. Dies entspricht heuristisch der Entstehung eines kurzlebigen Elektron-Positron-Paares, welches beliebig an den Hintergrund koppeln kann und die Propagation des Testfeldes verändert. Demnach ist eine Bedingung an den Polarisationsensor, dass er zu Null

wird, wenn sowohl der Hintergrund verschwindet als auch die Photonen des Testfeldes „on shell“ sind ($k^2 = 0$). Der Lichtstrahl soll sich also im Vakuum in nullter Ordnung entsprechend der Maxwell'schen Wirkung mit Lichtgeschwindigkeit auf dem trivialen Lichtkegel bewegen. Dies erreicht man mit Wahl des Kontaktterms, der somit letztlich den Teil aus der Wirkung subtrahiert, der den Maxwell-Term renormiert.

Bevor wir den Kontaktterm bestimmen, sind jedoch einige Vereinfachungen angeraten (siehe auch Anhang D.3). Beginnen werden wir mit einer partiellen Integration, mit Hilfe derer sich das Integral I_a und der erste Term von I_b zusammenfassen lassen. Der Übersichtlichkeit halber ist das erste Integral hier noch einmal zitiert:

$$I_a = \alpha \frac{2i}{s} g_{\mu\nu} 4 \cosh z' \cos z \int d^4 k \mathbf{a}^\mu(-k) \mathbf{a}^\nu(k)$$

und die entsprechende Identität lautet:

$$\frac{2i}{s} g_{\mu\nu} + \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{2} e^\delta \left[- \left(\frac{4ie^{-2eF\tau}}{D(s)} \right)_{\mu\nu} \right] = \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{2} e^\delta 2k(1-2d)k d_{\mu\nu}. \quad (4.72)$$

Als nächstes wenden wir uns dem zweiten Term des Integrals I_b zu und formen ihn unter Beachtung der Lorenzgleichung um (siehe Übersicht D.1):

$$(2)' \hat{=} -4\alpha (kd^T)_\mu (k(1-d))_\nu = [(1-2d)k]_\mu [k(1-2d)]_\nu \quad (4.73)$$

Den dritten und vierten Term kann man außerdem zusammenfassen und erhält jeweils:

$$\begin{aligned} & 2(dk)_\mu \tilde{k}_\nu^\perp - 2(e^{2eF\tau} V_\perp e^{-2eF\tau} k)_\mu (k(1-d))_\nu \\ &= 2 \frac{\cos zv - \cos z}{\sin z} \tilde{k}_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\perp - \frac{\cosh z'v - \cosh z'}{\sinh z'} \tilde{k}_\mu^\parallel \tilde{k}_\nu^\perp - \frac{\cosh z'v - \cosh z'}{\sinh z'} \tilde{k}_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\parallel, \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} & 2(dk)_\mu \tilde{k}_\nu^\parallel - 2(e^{2eF\tau} V_\parallel e^{-2eF\tau} k)_\mu (k(1-d))_\nu \\ &= -2 \frac{\cosh z'v - \cosh z'}{\sinh z'} \tilde{k}_\mu^\parallel \tilde{k}_\nu^\parallel + \frac{\cos zv - \cos z}{\sin z} \tilde{k}_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\parallel + \frac{\cos zv - \cos z}{\sin z} \tilde{k}_\mu^\parallel \tilde{k}_\nu^\perp. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Abschließend nutzen wir für die restlichen Terme die folgenden drei Identitäten:

$$(e^{2eF\tau} V_\parallel e^{-2eF\tau} k)_\mu = -\tilde{k}_\mu^\parallel, \quad (4.76)$$

$$(V_\parallel e^{-2eF\tau})_{\nu\mu} = -(e^{2eF\tau} V_\parallel)_{\mu\nu}, \quad (4.77)$$

$$(V_\parallel e^{-2eF\tau} k)_\mu = -\left(\tilde{k}_\parallel e^{2eF\tau}\right)_\mu, \quad (4.78)$$

die auch dann ihre Gültigkeit behalten, wenn man überall die „senkrechten“ Größen einsetzt. Jetzt können wir alle Terme zusammensetzen und den verallgemeinerten Polarisationsensor

für parallele konstante Hintergrundfelder in 1-Loop-Ordnung angeben:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu} = & \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{2} \left[e^\delta \frac{z'z}{\sin z \sinh z'} \right. \\
& \left\{ \left[2k(1-2d)kd_{\mu\nu} + [(1-2d)k]_\mu [k(1-2d)]_\nu \right] \cosh z' \cos z \right. \\
& + \left[2 \frac{\cos zv - \cos z}{\sin z} \tilde{k}_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\perp - \frac{\cosh z'v - \cosh z'}{\sinh z'} \tilde{k}_\mu^\parallel \tilde{k}_\nu^\perp - \frac{\cosh z'v - \cosh z'}{\sinh z'} \tilde{k}_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\parallel \right] \cosh z' \sin z \\
& + \left[-2 \frac{\cosh z'v - \cosh z'}{\sinh z'} \tilde{k}_\mu^\parallel \tilde{k}_\nu^\parallel + \frac{\cos zv - \cos z}{\sin z} \tilde{k}_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\parallel + \frac{\cos zv - \cos z}{\sin z} \tilde{k}_\mu^\parallel \tilde{k}_\nu^\perp \right] \sinh z' \cos z \\
& + \left[(e^{2eF\tau})_{\mu\nu} (ke^{-2eF\tau}k) - (ke^{-2eF\tau})_\mu (e^{-2eF\tau}k)_\nu \right] \cosh z' \cos z \\
& + \left[(e^{2eF\tau})_{\mu\nu} (\tilde{k}_\perp e^{-2eF\tau}k) - (\tilde{k}_\perp e^{-2eF\tau})_\mu (e^{-2eF\tau}k)_\nu \right. \\
& + (ke^{-2eF\tau})_\mu (\tilde{k}_\perp e^{2eF\tau})_\nu - (ke^{-2eF\tau}k) (e^{2eF\tau}V_\perp)_{\mu\nu} \left. \right] \cosh z' \sin z \\
& + \left[(e^{2eF\tau})_{\mu\nu} (\tilde{k}_\parallel e^{-2eF\tau}k) - (\tilde{k}_\parallel e^{-2eF\tau})_\mu (e^{-2eF\tau}k)_\nu \right. \\
& + (ke^{-2eF\tau})_\mu (\tilde{k}_\parallel e^{2eF\tau})_\nu - (ke^{-2eF\tau}k) (e^{2eF\tau}V_\parallel)_{\mu\nu} \left. \right] \sinh z' \cos z \\
& - \left[\tilde{k}_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\perp + (e^{2eF\tau}V_\parallel)_{\mu\nu} (\tilde{k}_\perp e^{-2eF\tau}k) - (\tilde{k}_\parallel e^{-2eF\tau})_\mu (\tilde{k}_\perp e^{2eF\tau})_\nu \right. \\
& \left. + \tilde{k}_\mu^\parallel \tilde{k}_\nu^\parallel + (e^{2eF\tau}V_\perp)_{\mu\nu} (\tilde{k}_\parallel e^{-2eF\tau}k) - (\tilde{k}_\perp e^{-2eF\tau})_\mu (\tilde{k}_\parallel e^{2eF\tau})_\nu \right] \sinh z' \sin z \left. \right\} + c.t. \left. \right]
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Führen wir die Grenzübergänge $z, z', k^2 \rightarrow 0$ durch, kann der Kontaktterm zu

$$c.t. = -(1-v^2)(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \tag{4.80}$$

abgelesen werden.

Wir haben damit einen zweistufigen Tensor erhalten, welcher die Ausbreitung eines intensitätsschwachen Lichtstrahls (2.Ordnung) in einem hochenergetischen konstanten elektromagnetischen Hintergrund beschreibt. Das Testfeld ist in keiner Weise eingeschränkt, kann also beliebig räumlich und zeitlich variieren. Gut zu sehen ist an (4.79), dass eine große Anzahl von Termen auftritt, in welchen sich elektrische und magnetische Einflüsse vermischen. Es ist also nicht ausreichend einen Fall zu betrachten, um daraus auf die allgemeine Konfiguration zu schließen.

Da die Polarisation des Vakuums damit einhergeht, dass die Geschwindigkeit des Testfeldes im Bereich der Nichtlinearitäten kleiner als c wird, wurde $\Pi_{\mu\nu}$ in den 70er Jahren als Photonenmassen-Operator [45, 48, 47, 49] bezeichnet. (Den Photonen kann eine effektive „Masse“ zugeschrieben werden.) Derartige physikalische Konsequenzen kann man sich intuitiv veranschaulichen:

Virtuelle Prozesse, wie z.B. die Elektron-Positron-Paar-Erzeugung, übertragen die Eigenschaften der beteiligten Teilchen auf das Photon. Dementsprechend kann den Photonen außerdem eine „Größe“ (im Bereich der Comptonwellenlänge) oder eine „Ladungsverteilung“ zugeordnet werden.

4.5 Wichtige Grenzfälle

Da in der vorliegenden Arbeit der Polarisationsstensor erstmals in der obigen Darstellung für elektromagnetischen Hintergrund berechnet wurde, sind im folgenden Abschnitt die naheliegenden Grenzfälle verschwindender Felder angegeben. Somit können die aus der Literatur [48, 45] bekannten Resultate erhalten werden.

$$E \rightarrow 0 \quad (z' \rightarrow 0)$$

Der nächstliegende Grenzfall ist, das zusätzliche eingeführte elektrische Feld wieder auszuschalten, um damit das Resultat von Tsai und Erber [48] zu reproduzieren. Es ergibt sich als Polarisationsstensor⁴

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^B = & \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{2} \left[e^{\delta_B} \frac{z}{\sin z} \right. \\ & \left\{ \left[2k(1-2d)kd_{\mu\nu} + [(1-2d)k]_\mu [k(1-2d)]_\nu \right] \cos z \right. \\ & + \left[2 \frac{\cos zv - \cos z}{\sin z} \tilde{k}_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\perp \right] \sin z \\ & + \left[(e^{2eF\tau})_{\mu\nu} (ke^{-2eF\tau}k) - (ke^{-2eF\tau})_\mu (e^{-2eF\tau}k)_\nu \right] \cos z \\ & + \left[(e^{2eF\tau})_{\mu\nu} (\tilde{k}_\perp e^{-2eF\tau}k) - (\tilde{k}_\perp e^{-2eF\tau})_\mu (e^{-2eF\tau}k)_\nu \right. \\ & \left. + (ke^{-2eF\tau})_\mu (\tilde{k}_\perp e^{2eF\tau})_\nu - (ke^{-2eF\tau}k) (e^{2eF\tau}V_\perp)_{\mu\nu} \right] \sin z \left. \right\} + c.t. \left. \right], \quad (4.81) \end{aligned}$$

wobei

$$\delta_B = -is \left[\frac{1-v^2}{4} k_\parallel^2 + \frac{\cos zv - \cos z}{2z \sin z} k_\perp^2 \right]. \quad (4.82)$$

Anhand dieses Polarisationsstensors haben Tsai und Erber [48] in ihrer Abhandlung den Photonen-Absorptionskoeffizient berechnet. Dieser steht im Zusammenhang mit der photoneninduzierten Teilchenproduktion, weshalb wie erwartet für ein niedrigfrequentes Photon im schwachen Magnetfeld $[(\omega/m) \ll 1$ und $(eH/m^2) \ll 1]$ keine Absorption auftritt. Erst hochfrequente Photonen ($\omega > 2m$) können Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugen.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde außerdem die Äquivalenz zu dem Ergebnis der nachfolgenden Arbeit von Tsai [47] gezeigt. Da die verwendeten Methoden jedoch dieselben wie in Abschnitt 4.6 sind, wurde die Berechnung an dieser Stelle nicht ausgeführt.

⁴An dieser Stelle werden zwei kleine Vorzeichenfehler in den Rechnungen von Tsai und Erber offenbar, wie später mit der Überführung in das Ergebnis von Urrutia [49] bestätigt wird.

$B \rightarrow 0$ ($z \rightarrow 0$)

Außerdem bietet sich an, dass analoge Resultat für den rein elektrischen Fall anzuschauen:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^E &= \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{2} \left[e^{\delta_E} \frac{z'}{\sinh z'} \right. \\ &\quad \left\{ \left[2k(1-2d)kd_{\mu\nu} + [(1-2d)k]_\mu [k(1-2d)]_\nu \right] \cosh z' \right. \\ &\quad \left. - \left[2 \frac{\cosh z'v - \cosh z'v}{\sinh z'} \tilde{k}_\mu^\parallel \tilde{k}_\nu^\parallel \right] \sinh z' \right. \\ &\quad \left. + \left[(e^{2eF\tau})_{\mu\nu} (ke^{-2eF\tau}k) - (ke^{-2eF\tau})_\mu (e^{-2eF\tau}k)_\nu \right] \cosh z' \right. \\ &\quad \left. + \left[(e^{2eF\tau})_{\mu\nu} (\tilde{k}_\parallel e^{-2eF\tau}k) - (\tilde{k}_\parallel e^{-2eF\tau})_\mu (e^{-2eF\tau}k)_\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (ke^{-2eF\tau})_\mu (\tilde{k}_\parallel e^{2eF\tau})_\nu - (ke^{-2eF\tau}k) (e^{2eF\tau}V_\parallel)_{\mu\nu} \right] \sinh z' \right\} + c.t. \Big], \quad (4.83) \end{aligned}$$

mit

$$\delta_E = -is \left[\frac{\cosh z' - \cosh z'v}{2z' \sinh z'} k_\parallel^2 + \frac{v^2 - 1}{4} k_\perp^2 \right]. \quad (4.84)$$

Dieser Polarisationstensor erklärt die Photonenausbreitung in einem konstanten elektrischen Hintergrund. Dabei ist jedoch folgende Subtilität zu beachten:

Wie im obigen rein magnetischen Fall, können auch hier die Brechungsindizes für die Ausbreitung des Testfeldes berechnet werden und wieder beschreibt der Absorptionskoeffizient die Teilchenerzeugung. Allerdings kann in diesem Fall ebenso der Hintergrund an sich Paare erzeugen (Schwinger-Effekt), wodurch jedoch das Feld an diesen Stellen zusammenbricht. Damit ist das Feld nicht mehr statisch und (4.83) verliert seine Gültigkeit.

Dieses Problem kann umgangen werden, indem man den adiabatischen Limes betrachtet, d.h. die Paarerzeugung durch Photonenzerfall soll die spontane bei Weitem übersteigen (siehe auch [11]).

$E, B \rightarrow 0$ ($z', z \rightarrow 0$)

Läßt man den gesamten Hintergrund verschwinden, so bleiben nur noch die Nichtlinearitäten des Testfeldes übrig, welches wir nun mit Großbuchstaben bezeichnen. Das entspricht der Vorgehensweise, ohne in Vorder- und Hintergrund aufzuteilen, bis zur zweiten Ordnung in den Feldern zu entwickeln, wie es von Schwinger [44] durchgeführt wurde. Erwartungsgemäß erhalten wir:

$$\Pi_{\mu\nu}^0 = \frac{e^2}{8\pi^2} (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \int_0^1 dv (1-v^2) \left(e^{-\frac{i}{4}s(1-v^2)k^2} - 1 \right). \quad (4.85)$$

Anhand obiger Formel kann man mit dem Zusammenhang:

$$(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) A^\mu(-k) A^\nu(k) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(-k) F^{\mu\nu}(k) \quad (4.86)$$

den Kontaktterm als Renormierungskonstante identifizieren. Betrachten wir also die Wirkung:

$$\Gamma^{(1)}(\tilde{A}) = -\frac{e^2}{32\pi^2} \int d^4k F_{\mu\nu}(-k) F^{\mu\nu}(k) \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \int_0^1 dv (1-v^2) \left(e^{-\frac{i}{4}s(1-v^2)k^2} - 1 \right)$$

und führen eine partielle Integration bezüglich v durch:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \int_0^1 dv (1-v^2) e^{-\frac{i}{4}s(1-v^2)k^2} \\ &= \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} - \frac{1}{2} k^2 \int_0^1 dv \left(v^2 - \frac{1}{3} v^4 \right) \int_0^\infty ds \exp \left[-is \left(m^2 + \frac{1}{4} (1-v^2) k^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Damit haben wir im ersten Summanden genau den Kontaktterm (nach Integration über v) wiedergefunden. Diese sich weghebenden Terme besitzen in der Wirkung dieselbe Abhängigkeit von Feldstärke und Wellenzahlvektor wie der Maxwell Term. Das heißt, dass der Kontaktterm einen Beitrag passend zur nullten Ordnung aus der 1-Loop-Wirkung subtrahiert und dieser dem Maxwell Term zur Renormierung der Feldstärke hinzugefügt wird. Somit lautet die renormierte Maxwell-Wirkung⁵:

$$W_{MW}^{ren}(A) = -\frac{1}{4} \left[1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \right] \int d^4k F_{\mu\nu}^0(-k) F_0^{\mu\nu}(k). \quad (4.88)$$

Dabei gilt für die auftretende Invariante S :

$$(1 + e_0^2 C) S_0 = S \quad \text{mit} \quad C = \frac{1}{12\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2}. \quad (4.89)$$

Indem man also Integration über die Eigenzeit bis zum Schluss aufhebt, erhält man eine endliche, eichinvariante Wirkung bis zur ersten Loop-Ordnung:

$$\Gamma(A) = -\frac{1}{4} \int d^4k F_{\mu\nu}(-k) F^{\mu\nu}(k) \left[1 - \frac{e^2}{16\pi^2} k^2 \int_0^1 dv \frac{v^2(1-\frac{1}{3}v^2)}{m^2 + \frac{1}{4}k^2(1-v^2)} \right]. \quad (4.90)$$

4.6 Überführung in Urrutias Darstellung

Die Verallgemeinerung der Lagrangedichte, die Thema des Abschnitts 4.4 war, wurde von Urrutia [49] mit den sogenannten nichtkausalen Methoden [45] berechnet. Aufgrund der völlig anderen Darstellung, ist es demnach angeraten, die Äquivalenz der beiden Resultate zu zeigen. Dazu wertet man $\Pi_{\mu\nu}$ Term für Term aus, was hier allerdings nicht für alle 20 Terme dargestellt werden kann. Daher wird die Rechnung an einigen repräsentativen Schritten skizziert und die notwendigen Relationen werden angegeben.

⁵In den obigen Ausdrücken sind die bisherigen Größen mit einer Null gekennzeichnet, die renormierten sind ohne Kennzeichnung.

Ein typischer Term des Polarisationsensors hat z.B. die folgende Form:

$$\begin{aligned}
& -\left(\tilde{k}e^{-2eF\tau}\right)_\mu \left(e^{-2eF\tau}k\right)_\nu = \\
& -\tilde{k}_\mu^\perp k_\nu^\parallel (\cos z \cos zv \cosh z' \cosh z'v - \sin z \sin zv \sinh z' \sinh z'v) \\
& -\tilde{k}_\mu^\perp k_\nu^\perp (\cos^2 z \cos^2 zv + \sin^2 z \sin^2 zv) - k_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\perp (\sin^2 z \cos^2 zv + \cos^2 z \sin^2 zv) \\
& -\tilde{k}_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\parallel (\cos z \cos zv \sinh z' \cosh z'v - \sin z \sin zv \cosh z' \sinh z'v) \\
& + k_\perp^2 g_{\mu\nu}^\perp \sin z \cos z (\cos^2 zv - \sin^2 zv) \\
& -k_\mu^\perp k_\nu^\parallel (\sin z \cos zv \cosh z' \cosh z'v + \cos z \sin zv \sinh z' \sinh z'v) \\
& -k_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\parallel (\sin z \cos zv \sinh z' \cosh z'v + \cos z \sin zv \cosh z' \sinh z'v) .
\end{aligned}$$

Die Berechnung kann mit Hilfe des Anhangs D.1 nachvollzogen werden, wobei wie immer auf das Indexbild geachtet werden muss. Ebenso werden die anderen 19 Terme ausgewertet und es ergeben sich dabei die vielfältigsten Kombinationen der verschiedenen Wellenzahlvektoren $k, \tilde{k}, k_\perp, \tilde{k}_\perp, k_\parallel, \tilde{k}_\parallel$ untereinander und der Beträge der Wellenzahlvektoren mit den Matrizen $g, g_\perp, g_\parallel, V, V_\perp, V_\parallel$.

Nun kann man die Terme geschickt zusammenfassen und sich die Relationen zur Vereinfachung überlegen. Das sieht beispielsweise wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
(k_\parallel^2 g_{\mu\nu} - k_\mu^\parallel k_\nu^\parallel) & \left[\frac{(\cosh z'v - \cosh z')^2}{\sinh^2 z'} - \frac{\sinh^2 z'v}{\sinh^2 z'} + 2 \frac{\cosh z'v - \cosh z'}{\cosh z'} + 1 \right] \cosh z' \cos z \\
& = (k_\parallel^2 g_{\mu\nu} - k_\mu^\parallel k_\nu^\parallel) \left[2 \cos z \frac{\cosh z' - \cosh z'v}{\sinh^2 z'} \right] . \quad (4.91)
\end{aligned}$$

Ebenso verschwinden einige Beiträge, entweder indem sich wie bei Termen proportional zu $V_{\mu\nu}^\perp k_\parallel^2$ und $V_{\mu\nu}^\parallel k_\perp^2$ die acht Summanden gegenseitig wegheben oder indem man ausnutzt, dass

$$V_{\mu\nu}^\perp k_\perp^2 + \tilde{k}_\mu^\perp k_\nu^\perp - k_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\perp = 0$$

gilt. Diese Relation gilt natürlich auch für die „parallelen“ Größen.

Schließlich erhält man den folgenden schon sehr kompakten Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu} & \propto (g_{\mu\nu}^\parallel k_\parallel^2 - k_\mu^\parallel k_\nu^\parallel) \left[2 \cos z \frac{\cosh z' - \cosh z'v}{\sinh^2 z'} \right] \\
& + (g_{\mu\nu}^\perp k_\perp^2 - k_\mu^\perp k_\nu^\perp) \left[2 \cosh z' \frac{\cos zv - \cos z}{\sin^2 z} \right] \\
& + (\tilde{k}_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\parallel + \tilde{k}_\mu^\parallel \tilde{k}_\nu^\perp) \left[\frac{(1 - \cos zv \cos z)(1 - \cosh z'v \cosh z')}{\sinh z' \sin z} + \sinh z'v \sin zv \right] \\
& + (g_{\mu\nu}^\parallel k_\perp^2 + g_{\mu\nu}^\perp k_\parallel^2) [-\coth z' \cot z \sinh z'v \sin zv + \cosh z'v \cos zv] \\
& + (k_\mu^\parallel k_\nu^\perp + k_\mu^\perp k_\nu^\parallel) [\coth z' \cot z \sinh z'v \sin zv - \cosh z'v \cos zv] .
\end{aligned}$$

Nutzt man jetzt die folgende Identität aus:

$$g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu = g_{\mu\nu}^\parallel k_\parallel^2 + g_{\mu\nu}^\perp k_\perp^2 + g_{\mu\nu}^\parallel k_\perp^2 + g_{\mu\nu}^\perp k_\parallel^2 - k_\mu^\parallel k_\nu^\parallel - k_\mu^\perp k_\nu^\perp - k_\mu^\parallel k_\nu^\perp - k_\mu^\perp k_\nu^\parallel ,$$

so kann man die Terme in der gleichen Weise wie Urrutia zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu} \propto & (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) \underbrace{[\cosh z'v \cos zv - \coth z' \cot z \sinh z'v \sin zv]}_{N_0} \\
& + (g_{\mu\nu}^{\parallel}k_{\parallel}^2 - k_{\mu}^{\parallel}k_{\nu}^{\parallel}) \underbrace{\left[2 \cos z \frac{\cosh z' - \cosh z'v}{\sinh^2 z'} - N_0\right]}_{N_1} \\
& + (g_{\mu\nu}^{\perp}k_{\perp}^2 - k_{\mu}^{\perp}k_{\nu}^{\perp}) \underbrace{\left[2 \cosh z' \frac{\cos zv - \cos z}{\sin^2 z} - N_0\right]}_{N_2} \\
& + (\tilde{k}_{\mu}^{\perp}\tilde{k}_{\nu}^{\parallel} + \tilde{k}_{\mu}^{\parallel}\tilde{k}_{\nu}^{\perp}) \underbrace{\left[\frac{(1 - \cos zv \cos z)(1 - \cosh z'v \cosh z')}{\sinh z' \sin z} + \sinh z'v \sin zv\right]}_{N_3}.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Damit ist die Äquivalenz von (4.79) mit dem Ergebnis von Urrutia bewiesen. In ihrem Buch [12] zeigen Dittrich und Gies ausgehend von diesem Resultat, dass eine lorentzinvariante Form des verallgemeinerten Polarisationsensors erhalten werden kann, der beliebige Feldkonfigurationen konstanter Felder beschreibt. Dafür muss man sich als ersten Schritt den vollständigen Satz von linear unabhängigen Lorentz- und Eichinvarianten beschaffen. Hat man diese, vier an der Zahl, so kann man sich die eineindeutige Zuordnung zu den dynamischen Variablen in (4.92) überlegen. Daraufhin beschäftigt man sich mit der Tensorstruktur des Polarisationsensors, vor allem mit den Vereinfachungen durch diverse Symmetrien, und konstruiert eine Basis aus vier linear unabhängigen tensorwertigen Elementen. Nach der eineindeutigen Zuordnung der neuen Basis zur obigen erfolgt schließlich die Verallgemeinerung, indem (4.92) mit den Lorentz-verallgemeinerten neuen Basiselementen und den lorentzinvarianten dynamischen Variablen dargestellt wird.

Eine besonders interessante Anwendung dieses ganz allgemeinen Tensors ist der Grenzübergang zu den „crossed fields“. Obwohl der Polarisationsensor seinen Ursprung in einer Feldkonfiguration hat, die nicht trivial in den Fall verschwindender Invarianten für senkrechte Felder überführt werden kann, kann er bei sorgfältiger Grenzwertbildung auch die „crossed fields“ beschreiben und deckt sich mit den von Narozhnyi [36] und Ritus [40] erhaltenen Ergebnissen.

Grenzfälle: Die in den vorigen Abschnitten betrachteten Grenzfälle sehen nun ebenfalls sehr übersichtlich aus. Durch das Abschalten des elektrischen Feldes erhalten wir den von Tsai [47] berechneten Polarisationsensor für rein magnetischen Hintergrund:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^B = & \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{2} \left[e^{\delta_B} \frac{z}{\sin z} \right. \\
& \left. \left\{ (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)N_0 + (g_{\mu\nu}^{\parallel}k_{\parallel}^2 - k_{\mu}^{\parallel}k_{\nu}^{\parallel})N_1 + (g_{\mu\nu}^{\perp}k_{\perp}^2 - k_{\mu}^{\perp}k_{\nu}^{\perp})N_2 \right\} + c.t. \right]
\end{aligned} \tag{4.93}$$

mit

$$\begin{aligned}\delta_B &= -is \left[\frac{1-v^2}{4} k_{\parallel}^2 + \frac{\cos zv - \cos z}{2z \sin z} k_{\perp}^2 \right], \\ N_0 &= \cos zv - v \sin zv \cot z, \\ N_1 &= \cos z(1-v^2) - N_0, \\ N_2 &= \frac{2(\cos zv - \cos z)}{\sin^2 z} - N_0.\end{aligned}$$

Analog ergibt sich nach dem Ausschalten des magnetischen Feldes für den rein elektrischen Hintergrund:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^E &= \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{2} \left[e^{\delta_E} \frac{z'}{\sinh z'} \right. \\ &\quad \left. \left\{ (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) N_0 + (g_{\mu\nu}^{\parallel} k_{\parallel}^2 - k_\mu^{\parallel} k_\nu^{\parallel}) N_1 + (g_{\mu\nu}^{\perp} k_{\perp}^2 - k_\mu^{\perp} k_\nu^{\perp}) N_2 \right\} + c.t. \right] \quad (4.94)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\delta_E &= -is \left[\frac{\cosh z' - \cosh z'v}{2z' \sinh z'} k_{\parallel}^2 + \frac{v^2 - 1}{4} k_{\perp}^2 \right], \\ N_0 &= \cosh z'v - v \sinh z'v \coth z', \\ N_1 &= \frac{2(\cosh z' - \cosh z'v)}{\sinh^2 z'} - N_0, \\ N_2 &= \cosh z'(1-v^2) - N_0.\end{aligned}$$

4.7 Eine genäherte Darstellung

Um die Einflüsse auf die Lichtausbreitung zu untersuchen, wird es von großem Vorteil sein, wenn man ein weniger komplexes Gebilde als (4.92) betrachten muss. Darum wird an dieser Stelle der Hintergrund in Sinne einer Schwachfeldnäherung ($z', z \ll 1$) betrachtet⁶, was den derzeitigen experimentellen Gegebenheiten entspricht. Der Polarisationsensor (4.92) hat die folgende Form:

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{2} f(z', z) \quad (4.95)$$

mit der Funktion $f(z', z)$, die wir in eine Taylorreihe entwickeln wollen:

$$\begin{aligned}f(z', z) &= e^\delta \frac{z'z}{\sin z \sinh z'} \left[(g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) N_0 + (g_{\mu\nu}^{\parallel} k_{\parallel}^2 - k_\mu^{\parallel} k_\nu^{\parallel}) N_1 \right. \\ &\quad \left. + (g_{\mu\nu}^{\perp} k_{\perp}^2 - k_\mu^{\perp} k_\nu^{\perp}) N_2 + (\tilde{k}_\mu^{\perp} \tilde{k}_\nu^{\parallel} + \tilde{k}_\mu^{\parallel} \tilde{k}_\nu^{\perp}) N_3 \right] \quad (4.96)\end{aligned}$$

⁶Tsai und Erber [48] haben ähnliche Näherungen berechnet, ebenfalls für schwache Felder ($B/B_c \ll 1$) sowie gleichzeitig für niedrige und hohe Frequenzen der Probefelder. Die obige Näherung hingegen ist für den gesamten Frequenzbereich gültig.

Da die linearen Glieder zu Null werden, erhält man für die Näherung bis zur zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned}
f^{(2)}(E, B) = & (1 - v^2) (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) \left[e^{-\frac{i}{4}s(1-v^2)k^2} - 1 \right] + \frac{(es)^2}{2} e^{-\frac{i}{4}s(1-v^2)k^2} \\
& \left\{ (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) \left[\frac{is}{24} (1 - v^2)^3 (k_\parallel^2 E^2 - k_\perp^2 B^2) - \frac{1}{3} (1 - v^2)^2 (E^2 - B^2) \right] \right. \\
& - \frac{1}{2} (1 - v^2) \left(1 + \frac{1}{3}v^2 \right) \left[(g_{\mu\nu}^\parallel k_\parallel^2 - k_\mu^\parallel k_\nu^\parallel) E^2 - (g_{\mu\nu}^\perp k_\perp^2 - k_\mu^\perp k_\nu^\perp) B^2 \right] \\
& + (1 - v^2) \left(1 - \frac{1}{3}v^2 \right) \left[(g_{\mu\nu}^\perp k_\perp^2 - k_\mu^\perp k_\nu^\perp) E^2 - (g_{\mu\nu}^\parallel k_\parallel^2 - k_\mu^\parallel k_\nu^\parallel) B^2 \right] \\
& \left. + \frac{1}{2} (1 - v^2)^2 (\tilde{k}_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\parallel + \tilde{k}_\mu^\parallel \tilde{k}_\nu^\perp) EB \right\}. \tag{4.97}
\end{aligned}$$

In dieser Darstellungsweise lässt sich nun die Eigenzeitintegration⁷ ausführen und man erhält für den genäherten Polarisationsstensor:

$$\begin{aligned}
\Pi^{(2)}(E, B) = & \frac{e^2}{8\pi^2} \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{2} \left\{ - (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) \frac{v^2 (1 - v^2) k^2}{2 [m^2 + \frac{1}{4} (1 - v^2) k^2]} \right. \\
& - \frac{e^2}{2 [m^2 + \frac{1}{4} (1 - v^2) k^2]^2} \left[- \frac{1}{3} (1 - v^2)^2 (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) (E^2 - B^2) \right. \\
& - \frac{1}{2} (1 - v^2) \left(1 + \frac{1}{3}v^2 \right) \left[(g_{\mu\nu}^\parallel k_\parallel^2 - k_\mu^\parallel k_\nu^\parallel) E^2 - (g_{\mu\nu}^\perp k_\perp^2 - k_\mu^\perp k_\nu^\perp) B^2 \right] \\
& + (1 - v^2) \left(1 - \frac{1}{3}v^2 \right) \left[(g_{\mu\nu}^\perp k_\perp^2 - k_\mu^\perp k_\nu^\perp) E^2 - (g_{\mu\nu}^\parallel k_\parallel^2 - k_\mu^\parallel k_\nu^\parallel) B^2 \right] \\
& \left. + \frac{1}{2} (1 - v^2)^2 (\tilde{k}_\mu^\perp \tilde{k}_\nu^\parallel + \tilde{k}_\mu^\parallel \tilde{k}_\nu^\perp) EB \right] \\
& \left. - \frac{e^2}{24 [m^2 + \frac{1}{4} (1 - v^2) k^2]^3} (1 - v^2)^3 (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) (k_\parallel^2 E^2 - k_\perp^2 B^2) \right\} \tag{4.98}
\end{aligned}$$

Dieser Tensor eignet sich für numerische Berechnungen, deren Grundlage die theoretische Optik in Medien ist. Dazu ist es günstig, ein spezielles Koordinatensystem zu wählen, so dass der Ausbreitungsvektor \vec{k} z.B. in der x-z-Ebene liegt. Mit Hilfe einer verallgemeinerten Dispersionsrelation kann man daraufhin die komplexen Brechungsindizes und somit die Ausbreitungseigenschaften des Probestrahles bestimmen.

4.8 Vom Polarisationsstensor zur Teilchenproduktion

Es mag auf den ersten Blick sehr verwirrend sein, dass mit Hilfe einer effektiven Wirkung, aus der die Fermionen „herausintegriert“ wurden, Produktionsraten eben dieser berechnet werden kann. Deshalb werden wir in diesem Abschnitt erst kurz den theoretischen Hintergrund

⁷An dieser Stelle bietet es sich an, vorher den Übergang zu imaginären Eigenzeiten rückgängig zu machen.

klären, bevor ganz allgemein die Größenordnung der Teilchenproduktion abgeschätzt werden kann.

Generell gibt es zwei Möglichkeiten, eine Erzeugungsrate von Teilchen-Antiteilchen-Paaren aus unserer effektiven Wirkung zu gewinnen. Zum einen kann man sich wie oben geschildert mit der Ausbreitung des Testfeldes befassen und mit Hilfe des Imaginärteils des Brechungsindex die Absorptionsrate des Probelasers bestimmen. Diese steht mit der Paarerzeugung durch das Testfeld im hochenergetischen Hintergrund, der photoneninduzierten Teilchenerzeugung, in Zusammenhang.

Andererseits war der Ausgangspunkt bei der Herleitung einer effektiven Wirkung die Vakuumpersistenz-Amplitude in Gegenwart einer Quelle. Ausreichend für die jetzige Betrachtung ist jedoch die Amplitude ohne Quellterme:

$$\langle 0^- | 0^+ \rangle \propto \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{\int \bar{\psi}(i\not{D}+m)\psi} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{\int \bar{\psi}(i\not{D}+m)\psi - e \int A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi}. \quad (4.99)$$

In der obigen Darstellung erkennt man, dass die Persistenzamplitude (4.99) einer freien Dirac-Theorie unter Ankopplung externer Eichfelder entspricht. Zugleich wissen wir jedoch auch, dass die obige Darstellung mit der effektiven Wirkung (3.14) nach Legendre-Transformation übereinstimmt, wenn man die Normierung nach physikalischen Gesichtspunkten bestimmt. Nun kann man die sehr einfache Überlegung anstellen, dass wenn das Vakuum wieder in das Vakuum übergeht, für das Betragsquadrat gilt:

$$|\langle 0^- | 0^+ \rangle|^2 = 1.$$

Umgekehrt bedeutet jede Abweichung von eins eine entsprechende Wahrscheinlichkeit für den Vakuumzerfall, das heißt für die spontane Produktion von Teilchen-Antiteilchen-Paaren. Es bezeichne P die Produktionswahrscheinlichkeit:

$$P = 1 - |\langle 0^- | 0^+ \rangle|^2. \quad (4.100)$$

Aufgrund dessen, dass wir nun um die Äquivalenz unserer effektiven Wirkung $\Gamma^{(1)}$ mit dem Schwinger-Funktional $W[0]$ wissen, können wir die Vakuumpersistenzamplitude in Ein-Loop-Ordnung schreiben als:

$$\langle 0^- | 0^+ \rangle = e^{-iW[0]} \stackrel{(4.99)}{=} e^{i\Gamma^{(1)}(\tilde{A})} \quad (4.101)$$

und definieren die totale Paarproduktionsrate nach [28] durch:

$$\Delta N \equiv \frac{P}{L^3 T} = \frac{1}{L^3 T} \left(1 - e^{-2 \text{Im} \Gamma^{(1)}(\tilde{A})} \right) \quad (4.102)$$

in einem Würfel der Kantenlänge L während der Zeit T .

Für den Fall eines konstanten elektrischen Feldes kann man die im Schwinger-Funktional auftretende Determinante exakt berechnen und leitet damit die berühmte Schwingersche Formel zur Elektron-Positron-Paarerzeugung her:

$$\Delta N \approx \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} \exp\left(-\pi \frac{E_c}{E}\right) \quad (4.103)$$

in führender Ordnung mit der wohlbekanntem kritischen Feldstärke $E_c = m^2/e$. Anhand der obigen Formel erkennt man klar die exponentielle Unterdrückung der Paarproduktion für Feldstärken, welche kleiner als die kritische Feldstärke sind.

Mit Hilfe von (4.103) haben Bulanov und andere [10] die Teilchenproduktion in einem realistisch modellierten Laser-Puls berechnet. Das ist berechtigt unter der Annahme, dass das Laserfeld auf der Längenskala der Teilchenproduktion (Comptonwellenlänge) als konstant betrachtet werden kann. Wie zu erwarten, erhält man mit den hiesigen experimentellen Möglichkeiten (JETI: $I \approx 10^{20} \text{W/cm}^2$) keine messbaren Teilchenproduktionsraten, erst bei Intensitäten von $I \approx 5 \cdot 10^{27} \text{W/cm}^2$, zwei Größenordnungen unterhalb der kritischen Intensität, ist ein sichtbarer Effekt zu erwarten.

Betrachtet man die effektiven Wirkung $\Gamma^{(1)}(\tilde{A})$ ergibt sich dieselbe Schlussfolgerung, denn man kann ohne Weiteres davon ausgehen, dass das intensitätsschwache Testfeld für die spontane Paarproduktion nicht von Belang ist. Erst bei Feldstärken in der Größenordnung der kritischen kann nach [11] der Fall eintreten, dass die photoneninduzierte Teilchenerzeugung die spontane nicht mehr wesentlich übersteigt.

Ergänzend dazu kann man alternierende Felder betrachten, wie es von Brezin und Itzykson [8] mittels der WKB-Näherung getan wurde. Wesentlich in dieser Arbeit, die von einem Vektorpotential der Form $A_\mu = (0, 0, 0, A(t))$ ausging, ist der Parameter γ , der zwischen zwei Regimen vermittelt:

$$\gamma = \frac{m\omega c}{eE}. \quad (4.104)$$

Einerseits erhält man für kleine γ ($\gamma \ll 1$) den Grenzwert großer Felder mit kleiner Frequenz, was dem Fall konstanter Felder entspricht, und [8] reproduziert damit erwartungsgemäß die Schwinger-Formel. Andererseits ergibt sich für große γ ($\gamma \gg 1$) der störungstheoretische Limes kleiner Feldstärken, in der eine andere Feldabhängigkeit der Paarproduktion auftritt. Mit Hilfe dieses Parameters lässt sich nun herausfinden, in welchem der Regime wir uns mit den derzeitigen Lasern befinden. So ergibt sich für die Daten des JETI⁸ ein Wert von $\gamma \approx 10^{-2}$, was bedeutet, dass wir in sehr guter Näherung auf die Schwinger-Formel zur Beschreibung des Hintergrundes zurückgreifen können, also in jedem Falle eine exponentielle Unterdrückung der spontanen Teilchenerzeugung zu erwarten haben.

⁸siehe Einleitung S.5

5 Kinetischer Zugang versus Eigenzeitformalismus

Im Gegensatz zur effektiven Wirkung, die in dieser Arbeit berechnet wurde und die neben den Informationen zur Lichtausbreitung auch die Information zur Stabilität des Vakuums enthält, gibt es die sogenannte kinetische Theorie. Diese ermöglicht die Bestimmung von Teilchenproduktionsraten in zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Feldern. Doch was sind Teilchen?

Um eine physikalisch sinnvolle Festlegung von Teilchen und Antiteilchen zu erhalten, geht man in der nichtwechselwirkenden Theorie von dem dort eindeutigen Grundzustand, dem Vakuum, aus. Dieses ist invariant unter allen Poincare-Transformation, insbesondere unter Zeittranslationen. Das Vakuum bleibt demnach zu allen Zeiten Vakuum. Ausgehend von diesem Grundzustand lässt sich ein ebenso eindeutiger Fockraum konstruieren, indem man Erzeuger und Vernichter einführt, von denen man bei ihrer Wirkung auf den Grundzustand folgendes verlangt: Die Vernichter machen das Vakuum zu Null und dementsprechend bilden die Erzeuger angeregte, also Ein- bzw. Mehrteilchenzustände. Es stellt sich heraus, dass diese Teilchenzustände, charakterisiert durch ihre Masse und Spinzustand, Darstellungen der Poincare-Gruppe sind. Durch die Zeittranslationsinvarianz eines solchen Systemes kann man die Feldoperatoren, als Lösungen der Bewegungsgleichung, entsprechend der Fockdarstellung nach ebenen Wellen entwickeln und es existiert eine eindeutige Unterscheidung zwischen positiven und negativen Frequenzanteilen, denen man Vernichter und Erzeuger zuordnet.

Zusammengefasst gibt es in einem solchen System nur eine einzige Möglichkeit, Teilchen und Antiteilchen zu definieren und diese entsprechen in der Quantenelektrodynamik den Elektronen und Positronen bzw. den Photonen.

Sobald man jedoch eine zeitabhängige Wechselwirkung, in unserem Falle ein zeitabhängiges externes Feld, einschaltet, sind aufgrund der verlorenen Translationsinvarianz bezüglich der Zeit verschiedene Orthonormalsysteme von Lösungen der Bewegungsgleichung gleichberechtigt. In keinem wird mehr eine Unterscheidung in positive und negative Frequenzanteile für alle Zeiten möglich sein, sofern die Störung eine gewisse Stärke übersteigt.

Mit dieser Unterscheidungsmöglichkeit geht auch das Teilchenkonzept verloren. Natürlich kann man auch in zeitabhängigen Systemen Erzeuger und Vernichter definieren, diese sind

jedoch als mathematisches Konstrukt zu verstehen, da sie zeitabhängige Superpositionen von Teilchen- und Antiteilchenzuständen darstellen. Das bedeutet, dass diese „Quasiteilchen“ zu jedem Zeitpunkt eine andere „Mischung“ aus Elektronen und Positronen im obigen Sinne sind.

Obwohl sich die Quasiteilchen damit einer direkten physikalischen Interpretation entziehen, ist dieses Konzept hilfreich. Ist die Störung nämlich in der Zeit lokalisiert und verschwindet für unendlich große positive und negative Zeiten, so kann asymptotisch eine klare Interpretation erzielt werden, wie im nächsten Abschnitt herausgearbeitet wird.

5.1 Quantisierung im zeitabhängigen externen Feld

In diesem Abschnitt soll auf die wesentlichen Gesichtspunkte der Quantisierung eingegangen werden. Schwerpunkt wird insbesondere die Interpretation der zeitabhängigen Erzeuger und Vernichter sein, bzw. die Möglichkeit mit Hilfe dieser eine Teilchenzahldichte für Elektronen und Positronen zu erhalten. Nachzulesen sind diese Aspekte in [22] und teilweise auch in [46]. Wir betrachten ein zeitabhängiges Eichfeld A_μ in der Hamiltongleichung und vereinfachen die folgenden Berechnungen zusätzlich, indem wir es als räumlich konstant annehmen. Außerdem besitze es nur eine z-Komponente:

$$A_\mu = (0, 0, 0, A(t)) . \quad (5.1)$$

Dieses Feld habe die Grenzwerte:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} A(t) = A_\pm , \quad (5.2)$$

was bedeutet, dass in der unendlich fernen Vergangenheit und Zukunft kein elektrisches Feld existiert. Die Fermionfelder seien anders als das Eichfeld, mit welchem sie wechselwirken, quantisiert. Diese Quantisierung entspricht für die asymptotischen Zustände der in Kapitel 2.1 vorgestellten und das Feld ist superpositionierbar aus dem vollständigem System von Lösungen der Dirac-Gleichung $\{\psi_{\vec{p}r}^{(-)}, \psi_{\vec{p}r}^{(+)}\}$:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_r \int d^3p \left[\psi_{\vec{p}r}^{(-)}(x) b_{\vec{p}r} + \psi_{\vec{p}r}^{(+)}(x) d_{\vec{p}r}^\dagger \right] , \quad (5.3)$$

wobei \vec{p} den kontinuierlichen Impuls und r den diskreten Spinzustand meint. In Abwesenheit des externen Feldes bilden die Eigenfunktionen des Zeittranslationsoperators ein solches System und die $\psi_{\vec{p}r}^{(+)}$ entsprechen Lösungen zu positiven Frequenzen, während die $\psi_{\vec{p}r}^{(-)}$ diejenigen zu negativen Frequenzen darstellen. Der Vakuumzustand für die Vergangenheit ist definiert durch:

$$b_{\vec{p}r} |0^- \rangle = d_{-\vec{p}r} |0^- \rangle = 0 \quad (5.4)$$

und durch seine Poincaré-Invarianz lässt sich der Fock-Raum konstruieren. Die Erzeuger und Vernichter beschreiben damit Elektronen bzw. Positronen.

Schaltet man das Feld ein, so ist, wie schon erwähnt, eine derartige Translationsinvarianz in

der Zeit nicht mehr gegeben und es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Definition eines Orthonormalsystems von Lösungen. Eine Variante für ein Orthonormalsystem erhält man, wenn man die Operatoren des „in-Vakuums“ in der Zeit „dreht“, um damit den Hamiltonoperator zu diagonalisieren. Man beschreibt also die Wechselwirkung mit dem zeitabhängigen Eichfeld als System, in welchem nun sowohl die Erzeuger und Vernichter als auch der Vakuumzustand zeitabhängig sind. Geleistet wir dies durch die unitäre Bogoliubov-Transformation:

$$\begin{aligned} b_{\vec{p}r}(t) &= \alpha_{\vec{p}}(t) b_{\vec{p}r} - \beta_{\vec{p}}(t) d_{-\vec{p}r}^\dagger, \\ d_{\vec{p}r}(t) &= \alpha_{-\vec{p}}(t) d_{\vec{p}r} + \beta_{-\vec{p}}(t) b_{-\vec{p}r}^\dagger \end{aligned} \quad (5.5)$$

mit der Bedingung

$$|\alpha_{\vec{p}}(t)|^2 + |\beta_{\vec{p}}(t)|^2 = 1, \quad (5.6)$$

die gleichzeitig die Umkehrbarkeit der Transformation und die Erhaltung der Kommutatorrelationen gewährleistet. Damit verschwinden alle nichtdiagonalen Terme, die sich durch die Wechselwirkung mit dem zeitabhängigen Eichfeld ergeben haben, aus dem Hamiltonoperator und man erhält eine neue Darstellung des Spinorfeldes:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_r \int d^3p \left[\Psi_{\vec{p}r}^{(-)}(x) b_{\vec{p}r}(t) + \Psi_{\vec{p}r}^{(+)}(x) d_{-\vec{p}r}^\dagger(t) \right]. \quad (5.7)$$

Die neue Basis hängt mit vorherigen wie folgt zusammen:

$$\psi_{\vec{p}r}^{(-)}(x) = \alpha_{\vec{p}}(t) \Psi_{\vec{p}r}^{(-)}(x) - \beta_{\vec{p}}^*(t) \Psi_{\vec{p}r}^{(+)}(x), \quad (5.8)$$

$$\psi_{\vec{p}r}^{(+)}(x) = \alpha_{\vec{p}}^*(t) \Psi_{\vec{p}r}^{(+)}(x) + \beta_{\vec{p}}(t) \Psi_{\vec{p}r}^{(-)}(x), \quad (5.9)$$

während sich wie gefordert für den Hamiltonoperator ergibt:

$$H(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{r=1,2} \int d^3p \omega(\vec{p}, r) \left[b_{\vec{p}r}^\dagger(t) b_{\vec{p}r}(t) - d_{-\vec{p}r}(t) d_{-\vec{p}r}^\dagger(t) \right] \quad (5.10)$$

mit der Dispersionsrelation in Abhängigkeit des kinetischen Impulses (3.21):

$$\omega^2(\vec{p}, r) = m^2 + \vec{\Pi}^2. \quad (5.11)$$

An der Bogoliubov-Transformation erkennt man sofort, dass den neuen Erzeugern und Vernichtern keine unmittelbare physikalische Bedeutung mehr zukommt, denn man erhält eine quasifreie Theorie, in der die Wechselwirkung sowohl durch die Erzeuger und Vernichter als auch durch das Vakuum absorbiert wird. Deshalb spricht man innerhalb dieses mathematischen Konstruktes von Quasiteilchen und definiert das zeitabhängige Quasiteilchen-Vakuum durch:

$$b_{\vec{p}r}(t)|0_t\rangle = d_{-\vec{p}r}(t)|0_t\rangle = 0. \quad (5.12)$$

Schließlich erhält man für Übergangsamplitude des „instantanen Vakuums“ in das „in-Vakuum“ den Zusammenhang:

$$|\langle 0^- | 0_t \rangle|^2 = \prod_{\vec{p}} |\alpha_{\vec{p}}(t)|^2 = \exp \left[\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p \ln(1 - |\beta_{\vec{p}}(t)|^2) \right] \quad (5.13)$$

und berechnet die Koeffizienten der Transformation mit Hilfe der Heisenbergartigen Bewegungsgleichungen, die aus der Variation der Wirkung gewonnen werden können.

Betrachten wir nun die spektrale Dichte der Quasiteilchen-Paare im Zustand $|0^-\rangle$:

$$N_{\vec{p}}(t) = \langle 0^- | b_{\vec{p}r}^\dagger(t) b_{\vec{p}r}(t) | 0^- \rangle = \langle 0^- | d_{-\vec{p}r}^\dagger(t) d_{-\vec{p}r}(t) | 0^- \rangle = |\beta_{\vec{p}}(t)|^2 \delta^3(\vec{p} = 0) \quad (5.14)$$

und berechnen für einen unendlich ausgedehnten Raum, also kontinuierliches Impulsspektrum, die Dichte der Quasiteilchen pro Einheitsvolumen:

$$n(t) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p n_{\vec{p}}(t) \quad \text{mit} \quad n_{\vec{p}}(t) = |\beta_{\vec{p}}(t)|^2 \quad (5.15)$$

Demnach ergibt sich für die Dichte der durch ein äußeres Feld erzeugten reellen Elektron-Positron-Paare:

$$n = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p n(\vec{p}) \quad \text{mit} \quad n(\vec{p}) = \lim_{t \rightarrow \infty} n_{\vec{p}}(t), \quad (5.16)$$

da die Bogoliubov-Transformation den Übergang vom „in-Vakuum“ zum „out-Vakuum“ leistet.

Natürlich gibt es einen Zusammenhang zwischen dieser Methode der Berechnung der Teilchenzahldichten und derjenigen durch eine effektive Wirkung. Für den Fall eines räumlich konstanten elektromagnetischen Feldes folgt aus (4.101):

$$|\langle 0^- | 0_t \rangle|^2 = \exp \left[-2V \int dt \text{Im} \mathcal{L}_{eff}^{(1)}(t) \right] \quad (5.17)$$

Vergleicht man nun die Vakuumpersistenzwahrscheinlichkeit der effektiven Wirkung (5.17) mit derjenigen in der kinetischen Theorie:

$$|\langle 0^- | 0_t \rangle|^2 = \exp \left[\frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3p \ln(1 - n(\vec{p})) \right] \quad (5.18)$$

so ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$\int dt \text{Im} \mathcal{L}_{eff}^{(1)}(t) = -\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p \ln(1 - n(\vec{p})) \quad (5.19)$$

Mit Hilfe dieses Resultats kann die bekannte Schwinger-Formel (4.103) zur Teilchen-Antiteilchen-Paarerzeugung in einem konstanten elektrischen Feld hergeleitet werden (siehe [22]). Das bekräftigt noch einmal, dass erst der Grenzübergang zu unendlich großen Zeiten bei bekannter Asymptotik die Beschreibung von Teilchen bzw. Antiteilchen gewährleistet.

5.2 Wird die Teilchenproduktion nun messbar?

Die obige Frage bezieht sich auf die letzte Veröffentlichung von Herrn Blaschke [6] und den am 21. Januar 2005 gehaltenen Vortrag¹ im Institutsseminar des IOQ. Darin wurde die kinetische

¹Thema war: „Versteckte Produktion von Elektron-Positron-Paaren in Pulsen optischer Laser“.

Theorie vereinfachend für den Fall einer skalaren Elektrodynamik betrachtet und die Verteilungsfunktion $N_{\vec{p}}(t)$ der Quasiteilchen ausgewertet. Als Grundlage für diese Überlegungen kann die Oszillatordarstellung nach [37] genutzt werden, die wir kurz anreißen wollen.

In der skalaren Theorie hat die Lagrangedichte das folgende Aussehen:

$$\mathcal{L}(x) = D_\mu^* \varphi^* D^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi \quad (5.20)$$

mit der kovarianten Ableitung (2.26) und wir nehmen für das Eichfeld in der Hamiltongleichung an:

$$A^\mu(t) = (0, A^1(t), A^2(t), A^3(t)) , \quad (5.21)$$

wiederum mit bekannter Asymptotik. Für die Lösung der aus der Lagrangedichte folgenden Bewegungsgleichung

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\varphi = 0 \quad (5.22)$$

nutzen wir aufgrund der Homogenität in der Raumrichtung folgenden Ansatz:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(\vec{p}, t) .$$

Damit erhält man eine Differentialgleichung vom Typ einer Schwingungsgleichung, jedoch mit einer zeitabhängigen Frequenz:

$$\ddot{\varphi}^{(\pm)}(\vec{p}, t) + \omega(\vec{p}, t)\varphi^{(\pm)}(\vec{p}, t) = 0 , \quad \omega^2(\vec{p}, t) = m^2 + \vec{\Pi}^2 \quad (5.23)$$

In den Grenzfällen unendlicher Zeiten ergeben sich ebene Wellen, so z.B. in der unendlich fernen Vergangenheit

$$\varphi^{(\pm)}(\vec{p}, t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} e^{\pm i\omega_- t} \quad \text{mit} \quad \omega_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \omega(t) . \quad (5.24)$$

Im Gegensatz zu dem im vorigen Abschnitt kennengelernten Vorgehen, quantisieren wir nun nicht die freie Theorie, sondern die Theorie unter Einbeziehung der zeitabhängigen Wechselwirkung durch das Eichfeld, also mit Hilfe der obigen Frequenz:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2\omega(\vec{p}, t)}} \left[a(\vec{p}, t) + b^\dagger(-\vec{p}, t) \right] . \quad (5.25)$$

Die auftretenden Erzeuger und Vernichter entsprechen den Operatoren (5.5) nach der Bogoliubov-Transformation, entziehen sich demnach einer Teilcheninterpretation. Aufgrund der völligen Analogie zur Quantisierung Kapitel 2.1 erhalten wir die gewöhnlichen Vertauschungsregeln:

$$[a(\vec{p}, t), a^\dagger(\vec{q}, t)] = [b(\vec{p}, t), b^\dagger(\vec{q}, t)] = \delta(\vec{p} - \vec{q}) . \quad (5.26)$$

Außerdem ist der Hamilton-Operator diagonal:

$$H(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \omega(\vec{p}, t) \left[a^\dagger(\vec{p}, t)a(\vec{p}, t) + b(\vec{p}, t)b^\dagger(\vec{p}, t) \right] . \quad (5.27)$$

Ausgehend von diesem Resultat kann man sich die Heisenbergartigen Bewegungsgleichungen der Erzeuger und Vernichter a, a^\dagger und b, b^\dagger beschaffen, indem man die Wirkung berechnet:

$$S = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dt d^3p \left[\frac{i}{2} \left(a^\dagger(\vec{p}, t) \dot{a}(\vec{p}, t) - \dot{a}^\dagger(\vec{p}, t) a(\vec{p}, t) + \dot{b}(\vec{p}, t) b^\dagger(\vec{p}, t) - b(\vec{p}, t) \dot{b}^\dagger(\vec{p}, t) \right) + \Delta(\vec{p}, t) \left[b(\vec{p}, t) a(\vec{p}, t) - a^\dagger(\vec{p}, t) b^\dagger(-\vec{p}, t) \right] - H(\vec{p}, t) \right] \quad (5.28)$$

mit

$$\Delta(\vec{p}, t) = \frac{\dot{\omega}(\vec{p}, t)}{\omega(\vec{p}, t)}. \quad (5.29)$$

In der obigen Wirkung fallen die sogenannten „anormalen“ Terme auf, welche die Erzeugung von Teilchen-Antiteilchen-Paaren beschreiben. Durch diese erhält man mittels Variation nach a und a^\dagger den ersten Term in den Operatorgleichungen, welcher der undefinierten Teilchenauffassung geschuldet ist. Es ergibt sich für die Quasiteilchen:

$$\begin{aligned} \dot{a}^\dagger(\vec{p}, t) &= \frac{1}{2} \Delta(\vec{p}, t) b(-\vec{p}, t) + i[H(t), a^\dagger(\vec{p}, t)], \\ \dot{a}(\vec{p}, t) &= \frac{1}{2} \Delta(\vec{p}, t) b^\dagger(-\vec{p}, t) + i[H(t), a(\vec{p}, t)] \end{aligned} \quad (5.30)$$

und entsprechend liefert die Variation nach b und b^\dagger die analogen Ergebnisse für die Quasi-Antiteilchen. Da wir nun Kenntnis über die zeitliche Entwicklung der Erzeuger und Vernichter der Quasiteilchen haben, besitzen wir diese Information ebenso für die Verteilungsfunktion (5.14):

$$N_{\vec{p}}(t) = \langle 0^- | a^\dagger(\vec{p}, t) a(\vec{p}, t) | 0^- \rangle. \quad (5.31)$$

Leiten wir $N_{\vec{p}}(t)$ nach der Zeit ab und nutzen (5.30), so ergibt sich die folgende Differentialgleichung

$$\dot{N}_{\vec{p}}(t) = \frac{1}{2} \Delta(\vec{p}, t) \left[N_{\vec{p}}^{(+)}(t) + N_{\vec{p}}^{(-)}(t) \right] \quad (5.32)$$

mit den nichtdiagonalen Korrelatoren

$$\begin{aligned} N_{\vec{p}}^{(+)}(t) &= \langle 0^- | a^\dagger(\vec{p}, t) b^\dagger(\vec{p}, t) | 0^- \rangle, \\ N_{\vec{p}}^{(-)}(t) &= \langle 0^- | b^\dagger(-\vec{p}, t) a(\vec{p}, t) | 0^- \rangle \end{aligned} \quad (5.33)$$

und

$$\Delta(\vec{p}, t) = \frac{e\vec{E}(t)\vec{P}(t)}{\omega^2(\vec{p}, t)}. \quad (5.34)$$

Die Korrelatoren (5.33) erfüllen ebenfalls jeweils eine Differentialgleichung:

$$\dot{N}_{\vec{p}}^{(\pm)}(t) = \frac{1}{2} \Delta(\vec{p}, t) [1 + 2N_{\vec{p}}(t)] \pm 2i\omega(\vec{p}, t) N_{\vec{p}}^{(\pm)}(t), \quad (5.35)$$

die durch das bekannte Verfahren der Separation und anschließender Variation der Konstanten gelöst werden kann:

$$N_{\vec{p}}^{(\pm)}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t dt' \Delta(\vec{p}, t') [1 + 2N_{\vec{p}}(t')] e^{\pm 2i \int_{t'}^t ds \omega(\vec{p}, s)}. \quad (5.36)$$

Dabei haben wir die folgenden Grenzwerte eingeführt:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} N_{\vec{p}}^{(\pm)}(t) = 0. \quad (5.37)$$

Fasst man (5.32) und (5.36) in einer Formel zusammen, so ergibt sich die kinetische Gleichung:

$$\dot{N}_{\vec{p}}(t) = \frac{1}{2} \Delta(\vec{p}, t) \int_{-\infty}^t dt' \Delta(\vec{p}, t') [1 + 2N_{\vec{p}}(t')] \cos \left(2 \int_{t'}^t ds \omega(\vec{p}, s) \right). \quad (5.38)$$

Diese Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion der Quasiteilchen, wobei einzig die Grenzfälle für unendliche Zeiten, in diesem Falle skalare, Elektronen und Positronen beschreiben. Sie entspricht einer Boltzmann-Gleichung im kollisionsfreien Limes, mit der Transportprozesse in idealen Gasen beschrieben werden können. Um (5.38) genauer zu untersuchen, stützte Herr Blaschke sich auf die Betrachtungen von [37] und wertete die kinetische Gleichung in Form des folgenden Gleichungssystems numerisch aus:

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \frac{1}{2} \Delta v_1 \\ \dot{v}_1 &= \Delta(1 + 2N) - 2\omega v_2 \\ \dot{v}_2 &= 2\omega v_1 \end{aligned} \quad (5.39)$$

mit

$$v_1 = 2 \operatorname{Re} N^{(+)} \quad \text{und} \quad v_2 = 2 \operatorname{Im} N^{(+)}.$$

Die Auswertung erfolgte mittels der Runge-Kutta-Methode für eine harmonische Zeitabhängigkeit des Feldes. Als Parameter nutzte Blaschke [6] die erreichbaren Feldstärke von Experimenten am SLAC² und eines geplanten Röntgenlasers. Angaben zur Asymptotik für unendlich große Zeiten wurden nicht gemacht.

Dabei ließ er sich zu der Aussage hinreißen, dass die Quasiteilchen *direkt beobachtbare* Elektron-Positron-Paare seien und er wies insbesondere auf die hohen Teilchendichten während des *noch eingeschalteten Feldes* hin. Die Vorhersage aus dieser Arbeit lag für einen Terrawatt Nd-Glas-Laser mit einer Wellenlänge von 527 nm und maximalen Feldstärken von $6 \cdot 10^{12}$ V/m bei $\approx 10^5$ Paaren in einem Würfel der Kantenlänge 527 nm gemittelt über eine Feldperiode. Dieses Ergebnis hat jedoch keine experimentelle Relevanz.

Der in Jena gehaltene Vortrag ging noch einen Schritt weiter. Neben der bisher betrachteten harmonischen Zeitabhängigkeit kam hier die realistischere Modellierung durch einen Gaußpuls hinzu. Um den messbaren Effekt abzuschätzen, wurde eine Formel für den passenden Crossing-Kanal der Thomson-Streuung nach [35] genutzt. Dieser Wirkungsquerschnitt beschreibt die Vernichtung von *reellen* Elektron-Positron-Paaren und liefert pro Laserpuls 1-2 Vernichtungsereignisse. Die entsprechende Abhandlung wurde bisher nicht veröffentlicht.

²Stanford Linear Accelerator Center (<http://www.slac.stanford.edu>)

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde das hochenergetische Vakuum mit quantenfeldtheoretischen Methoden betrachtet. Insbesondere die Lichtausbreitung eines Probelasers durch einen konstanten elektromagnetischen Hintergrund wurde mit Hilfe des Schwingerschen Eigenzeitformalismus in großer Allgemeinheit untersucht. Es ergab sich der zweistufige Polarisationstensor $\Pi_{\mu\nu}$, welcher die Propagation des Testfeldes in zweiter Ordnung durch die exakt gehaltenen parallelen elektrischen und magnetischen externen Feldern beschreibt. Im Gegensatz zum Hintergrund, der als konstant angenommen wurde, kann der Probestrahl beliebig räumlich und zeitlich variieren.

Das eröffnet die Möglichkeit realistischer numerischer Modellierungen, durch welche die erwarteten optischen Phänomene wie die Doppelbrechung mit hoher Genauigkeit vorhergesagt werden können. Grundlage dieser weitergehenden Berechnungen wird aufgrund der offensichtlichen Analogie des Quantenvakuums zu einem optischen (doppelbrechenden) Medium die etablierte theoretische Optik sein. Ist es mit dem bereitgestellten genäherten Tensor gelungen, numerisch interpretierbare Ausdrücke für die komplexen Brechungsindizes zu erhalten, so kann mittels des Imaginärteils, der die Absorption beschreibt, ebenfalls die hochinteressante photoneninduzierte Paarproduktion erforscht werden.

Untersuchungen in diese Richtung wurden bereits 1976 von Daugherty und Lerche [11] angestellt für den Fall einer ebenen Welle als Probestrahl, der in erster Ordnung genähert wurde und einem mit dieser Arbeit übereinstimmenden Hintergrund. Es ergaben sich äußerst komplizierte Brechungsindizes für Photonen, die senkrecht bzw. parallel zu den äußeren Feldern propagierten und die Folgerung, dass parallel propagierende Photonen vom Hintergrund unbeeinflusst bleiben. Außerdem stellte diese Abhandlung fest, dass die photoneninduzierte Teilchenerzeugung die (exponentiell unterdrückte) spontane bei Weitem übersteigt, solange der Hintergrund nicht in die Größenordnung kritischer Feldstärken gelangt.

Von großem experimentellen Interesse ist im Zusammenhang mit der effektiven Wirkung, in welche der Polarisationstensor eingeht, auch die soeben erwähnte spontane Teilchenerzeugung durch den Zusammenbruch der externen Felder. Deshalb wurde am Ende des vierten Kapitels kurz angerissen, wie eine Paarproduktionsrate aus der Wirkung $\Gamma^{(1)}$ gewonnen werden kann und es wurde gezeigt, dass mit den experimentellen Gegebenheiten in Jena definitiv keine messbare spontane Paarproduktion zu erwarten ist. Der dazu eingeführte Parameter

γ diente auch Ringwald [39] zu Abschätzungen für die derzeit geplanten Lasersysteme, so z.B. das XFEL, welches Teil des Entwurfs des supraleitenden Linearbeschleunigers TESLA am DESY¹ ist. Doch selbst die enormen Intensitäten der Freie-Elektronen-Laser reichen laut Näherungsmethoden wie der WKB-Näherung und den Imaginäre-Zeit-Methoden nicht aus, um einen sichtbaren Effekt zu erzeugen.

Deshalb war das allgemeine Erstaunen um so größer als Blaschke [6] in seiner Arbeit messbar große Teilchenerzeugungsraten sogar für das JETI berechnete. Es konnte jedoch innerhalb der Diplomarbeit gezeigt werden, dass, im Einklang mit den derzeitigen experimentellen Ergebnissen, dieser Abhandlung ein Fehlschluss zu Grunde liegt. Dazu wurde im fünften Kapitel der kinetische Zugang aufbereitet und durch eine eindeutige Teilcheninterpretation der wesentliche Zusammenhang zwischen dieser Methode und derjenigen mittels effektiver Wirkung aufgezeigt.

¹Deutsches Elektronen-Synchrotron (<http://www.desy.de/html/home/index.html>)

A Einheiten und Konventionen

Es wurde das Heavyside-Lorentz-Einheitensystem benutzt, wobei außerdem in natürlichen Einheiten gerechnet wurde, d.h. $\hbar = c = 1$. Daraus ergibt sich für die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$. Der Zusammenhang von gesetzlichen Einheiten zu diesem System ist nach [12] der folgende:

$$\begin{aligned}
 1m &\simeq 5,1 \times 10^6 eV^{-1} \\
 1s &\simeq 1,5 \times 10^{15} eV^{-1} \\
 1kg &\simeq 5,6 \times 10^{35} eV \\
 1A &\simeq 1244 eV \\
 1N/C &\simeq 6,5 \times 10^{-7} eV^2 \\
 1T &\simeq 195,5 eV^2 \\
 1K &\simeq 8,61735 \times 10^{-5} eV
 \end{aligned}$$

Wir benutzen die Einsteinsche Summenkonvention, wobei über griechische Indizes von 0 bis 3 summiert wird, über lateinische von 1 bis 3, sofern nicht anders angegeben. Als Metrik verwenden wir die Lorentz-Metrik mit der Signatur $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(+, -, -, -)$, sodass der Feldstärketensor folgende Form annimmt:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Der entsprechende Tensor mit nach unten gezogenen Indizes hat an Stelle der E_i jeweils $-E_i$ als Einträge. Weiterhin benötigt man den dualen Feldstärketensor $*F^{\mu\nu}$, welcher definiert wird durch:

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (\text{A.2})$$

mit $\epsilon^{0123} = 1$.

B Lorentz-Transformation und Invarianten

Die spezielle Relativitätstheorie, die heute ein Grundpfeiler moderner Physik ist, hat ihre Ursprünge im Elektromagnetismus. Es ist nicht übertrieben zu behaupten, dass sich die spezielle Relativitätstheorie durch die Entwicklung der Maxwell'schen Gleichungen mit ihrer Vereinigung von Elektrizität, Magnetismus und Optik geradezu aufdrängte. Dementsprechend ist natürlich die Quantenelektrodynamik wie alle modernen Feldtheorien eine lorentzkovariante Theorie.

Lorentzkovariant bedeutet die Verträglichkeit mit Lorentztransformationen, die zwischen verschiedenen Inertialsystemen vermitteln. In jedem dieser Systeme, die geradlinig und gleichförmig gegeneinander bewegen ist laut Einsteinschem Postulat die Lichtgeschwindigkeit gleich groß. Das führt zu den bekannten Phänomenen, wie z.B. der Zeitdilatation und der Längenkontraktion. Ohne genauer auf den theoretischen Hintergrund (siehe [19]) einzugehen werde ich hier die Matrixdarstellung der speziellen eigentlichen Lorentztransformation für eine Relativbewegung in die 3-Richtung angeben.

$$(\Lambda_{\nu}^{\mu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

mit

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \quad (\text{B.2})$$

Diese eigentlichen Lorentztransformationen bilden eine 6-parametrische Lie-Gruppe. Nun sind sowohl die Wirkung als auch die Lagrange-Funktion skalare Größen und wir erwarten, dass sie sich unter obigen Transformationen wie Lorentzskalare verhalten. Das wiederum bedeutet, dass die abhängigen Größen ebenfalls nur Lorentzskalare sein können. Diese werden,

wie in Kapitel 3 angegeben, wie folgt gewählt:

$$S = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{B}^2 - \vec{E}^2), \quad (\text{B.3})$$

$$P = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu} = -\vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (\text{B.4})$$

Tatsächlich existieren nur diese zwei Invarianten, da die Kontraktion F_{μ}^{μ} verschwindet und alle weiteren Kontraktionen des Feldstärketensors durch die Identitäten

$$F^{\mu\alpha}F_a^{\nu l} - {}^*F^{\mu\alpha}{}^*F_a^{\nu l} = -2Sg^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad F^{\mu\alpha}{}^*F_a^{\nu l} = -Pg^{\mu\nu}$$

auf S und P zurückgeführt werden können.

Da S und P ihre Werte unter Lorentztransformationen nicht ändern, lassen sich auf den ersten Blick verschiedene Feldkonfigurationen den gleichen Invarianten zuordnen. Das bedeutet, dass die physikalische Äquivalenz zweier Systeme anhand derselben Invarianten erkannt werden kann.

Wir fassen die Folgerungen nach Greiner [19] zusammen:

- Aus der Gleichheit von S in allen Bezugssystemen folgt, dass wenn $|\vec{B}| > |\vec{E}|$ ($|\vec{B}| < |\vec{E}|$) in irgendeinem Bezugssystem, so gilt das auch in allen anderen Lorentzsystemen.
- Verschwindet P in irgendeinem Bezugssystem, so ist das auch in allen anderen der Fall. Da bei einem stetigen Übergang von $\vec{E} \cdot \vec{B} > 0$ nach $\vec{E} \cdot \vec{B} < 0$ auf jeden Fall $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ überschritten wird, ist es unmöglich einen spitzen Winkel zwischen \vec{E} und \vec{B} in einen stumpfen zu transformieren.
- Man kann immer ein Inertialsystem finden, in dem \vec{E} und \vec{B} parallel liegen, sofern nicht beide Invarianten gleichzeitig verschwinden
Wenn $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ gilt, dann in allen Systemen. Es kann jedoch nicht nur eines der beiden Felder verschwinden, da $|\vec{E}| = |\vec{B}|$. Demnach läßt sich $S = 0$ und $P = 0$ nur mit $\vec{E} \perp \vec{B}$ und $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ oder mit $\vec{E} = \vec{B} = 0$ realisieren. Davon abgesehen aber können, bei erhaltenen Invarianten, die Felder durch Lorentztransformationen beliebig gedreht und gestreckt werden.
- Der Fall senkrecht aufeinander stehender Felder kann bei nichtverschwindendem S immer auf den Fall eines Feldes reduziert werden. Ist nämlich $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, so kann man entweder \vec{E} oder \vec{B} zu Null machen, je nachdem ob $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ größer oder kleiner Null ist.

C Mathematisches Handwerkszeug

C.1 Funktionalableitung

Die Funktionalableitung ist eine für die Feldtheorie wesentliche Operation. Sie tritt z.B. bei der Variationsrechnung und der verallgemeinerten Legendre-Transformation auf. Ohne mathematische Strenge soll darum auf die wesentlichen Definitionen und Eigenschaften dieser Ableitung eingegangen werden (siehe [20]).

Definition Sei $F[\phi]$ ein Funktional, also eine Abbildung aus einem normierten Funktionenraum $M = \{\phi(x) : x \in \mathbb{R}\}$ in den Körper der reellen oder der komplexen Zahlen, $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Die Gesamtänderung des Funktionals bei Variationen der Funktion $\phi(x)$ ist

$$\delta F[\phi] \equiv \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) . \quad (\text{C.1})$$

Wie schon die gewöhnliche Differentiation kann man auch die Funktionalableitung als Grenzwert eines Differenzenquotienten beschreiben. Man benötigt dafür eine lokalisierte Störung im Punkt y mit der Stärke ϵ , die als Variation in der „unabhängigen Variablen“, also der Funktion $\phi(x)$, fungiert:

$$\delta \phi(x) = \epsilon \delta(x - y) .$$

Benutzt man Gleichung (C.1), so erhält man

$$\delta F[\phi] = F[\phi + \epsilon \delta(x - y)] - F[\phi] = \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \epsilon \delta(x - y) = \epsilon \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)} \quad (\text{C.2})$$

bzw. im Grenzfall

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi + \epsilon \delta(\cdot - y)] - F[\phi]}{\epsilon} . \quad (\text{C.3})$$

Die Formulierung (C.3) eignet sich zur Berechnung konkreter Ableitungen besser als die formale Definition, zu der sie jedoch äquivalent ist. Man beachte aber, dass der Grenzübergang

$\epsilon \rightarrow 0$ vor anderen auftretenden Grenzübergänge zu berechnen ist, damit keine Mehrdeutigkeiten auftreten können.

Die Funktionalableitung ist linear und es gelten die folgenden Rechenregeln:

- *Produktregel*: Für zwei Funktionale $G[\phi]$ und $H[\phi]$ gilt:

$$\frac{\delta(G[\phi]H[\phi])}{\delta\phi(x)} = \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)}H[\phi] + G[\phi]\frac{\delta H[\phi]}{\delta\phi(x)}. \quad (\text{C.4})$$

- *Kettenregel*: Für das Funktional eines Funktionals gilt:

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)}F[G[\phi]] = \int dx \frac{\delta F[G]}{\delta G(x)} \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(y)}. \quad (\text{C.5})$$

- Spezialfall zur Kettenregel: Sei $G[\phi]$ nur noch eine einfache Funktion $g(\phi)$, dann gilt:

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)}F[g(\phi)] = \frac{\delta F}{\delta g(\phi(y))} \frac{dg(\phi)}{d\phi(y)}. \quad (\text{C.6})$$

Zur Illustration werden an dieser Stelle einige aussagekräftige Beispiele angeführt. Integriert wird immer über die gesamte reelle Achse.

1) $F[\phi] = \int dx (\phi(x))^n$

Man errechnet mit der Beziehung (C.3) für die Funktionalableitung

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int dx (\phi(x) + \epsilon\delta(x-y))^n - \int dx (\phi(x))^n \right) \\ &= \int dx n(\phi(x))^{n-1} \delta(x-y) = n(\phi(y))^{n-1}. \end{aligned}$$

Hier war es nötig, wie oben gefordert, den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ vor der Integration durchzuführen, da ansonsten unbestimmte Ausdrücke der Art $(\delta(x-y))^2$ aufgetreten wären.

2) $F_y[\phi] = \int dx' K(y, x')\phi(x')$

In diesem Beispiel ist das Funktional zusätzlich noch eine Funktion der Koordinate y , was durch den Index gekennzeichnet wird. Die Funktionalableitung nach $\phi(x)$ ist der Integrkern

$$\frac{\delta F_y[\phi]}{\delta\phi(x)} = K(y, x).$$

3) $F_x[\phi] = \phi(x)[1\text{ex}]$

Wie das obige Beispiel auch ist dieses „triviale“ Funktional „parametrisch“ von einer Koordinate abhängig. Da der Funktion ϕ ihr Funktionswert an der jeweiligen Stelle zugeordnet wird, kann die Funktionalableitung nur dann einen nichtverschwindenden Wert liefern, wenn die Variation genau an dieser Stelle erfolgt.

$$\frac{\delta F_x[\phi]}{\delta\phi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\phi(x) + \epsilon\delta(x-y) - \phi(x)) = \delta(x-y)$$

Diese Gleichung kann ebenso zur Definition der Funktionalableitung genutzt werden.

C.2 Spinoren und Grassmann-Zahlen

Etwas genauer werden wir auf Spinoren eingehen, die dem fermionischen Charakter, der in den Rechnungen vorkommenden Elektron-Positron-Paare Rechnung tragen. Nachdem etwas mathematischer Hintergrund der Gammamatrizen vermittelt wurde, werden Spinoren anhand ihrer Transformationseigenschaften charakterisiert. Abschließend soll noch kurz auf Grassmann-Zahlen und deren Rechenregeln eingegangen werden.

C.2.1 Gamma-Matrizen

Die Gammamatrizen erzeugen zusammen mit dem Antikommutator $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$ die *CLIFFORD-Algebra* (nach William Kingdon Clifford).

Zum näheren Verständnis werde ich an dieser Stelle die notwendigen Definitionen nach [50] angeben.

Definitionen

- Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Funktion $Q : V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *quadratische Form*, falls es eine zugeordnete symmetrische Bilinearform $q : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ gibt mit $Q(v) = q(v, v)$.
- Ein Vektorraum B über einem Körper A zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\star : B \times B \rightarrow B, (a, b) \mapsto a \star b$ heißt *assoziative Algebra*, wenn das folgende Assoziativgesetz gilt: $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$.
- Eine *CLIFFORD-Algebra* $Cl(V, Q)$ eines reellen Vektorraums V mit quadratischer Form Q ist eine assoziative Algebra:
 - in welche V injektiv eingebettet ist, d.h. es gibt eine injektive Abbildung $j : V \rightarrow Cl(V, Q)$ und
 - in welcher für das Produkt eingebetteter Vektoren gilt:

$$\begin{aligned} j(v)j(v) &= -Q(v) \quad \text{für alle } v \in V \quad \text{bzw.} \\ j(v)j(w) + j(w)j(v) &= -2q(v, w) \quad \text{für alle } v, w \in V, \end{aligned}$$

wobei $q(v, w) \equiv \frac{1}{4}(Q(v+w) - Q(v-w))$ die von Q durch Polarisierung erhaltene symmetrische Bilinearform ist,

die die universelle Eigenschaft erfüllt, d.h. zu jeder weiteren Einbettung $f : V \rightarrow A$ gibt es ein Algebrenmorphimus $\varphi : Cl(V, Q) \rightarrow A$ mit $f = \varphi \cdot j$.

(Falls eine solche *CLIFFORD-Algebra* gibt, ist sie bis auf Isomorphie eindeutig.)

- Eine *Darstellung* einer Algebra ist eine Einbettung dieser in die Algebra der Endomorphismen eines Vektorraums, also (nach Basiswahl) in eine Matrixalgebra.

In der vorliegenden Arbeit ist mit Raumzeit stets vierdimensional und die Metrik hat Lorentzsignatur, d.h. $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Desweiteren sind alle Gammamatrizen in der *Weyl-Darstellung*, die ich in Termen der Paulimatrizen angeben werde. Zur Erinnerung hier die Paulimatrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

für die die Kommutatorregel $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ gilt. Nun seien:

$$\sigma_\mu = (\sigma_0, \sigma_i), \quad \bar{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\sigma_i), \quad \sigma_0 = \mathbb{1}_2,$$

dann lassen sich die Gammamatrizen wie folgt schreiben [12]:

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Während γ_0 hermitesch ist, sind die anderen vier Gammamatrizen antihermitesch:

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad \gamma_i^\dagger = -\gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, 5 \quad (\text{C.7})$$

und es gilt für die Quadrate:

$$\gamma_0^2 = \gamma_5^2 = 1, \quad \gamma_i^2 = -1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{C.8})$$

Außerdem ist zu beachten, dass γ_5 mit allen anderen Gammamatrizen antikommutiert:

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (\text{C.9})$$

C.2.2 Spintransformationen

Betrachten wir zur Verdeutlichung zuerst das Transformationsverhalten von Skalarfeldern (siehe auch [38]), wie sie z.B. in der Klein-Gordon-Theorie auftreten. Allgemein kann man eine beliebige Lorentztransformation schreiben als:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (\text{C.10})$$

für eine 4×4 -Matrix, die eine Darstellung einer bestimmten Lorentztransformation ist. Wenn nun ein Skalarfeld ein Maximum an der Stelle x_0 besitzt, wird die neue Feldkonfiguration nach Lorentztransformation an der Stelle $x = \Lambda x_0$ ihr Maximum haben. Die entsprechende Transformation des Feldes ist demnach:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x). \quad (\text{C.11})$$

Das heißt, das transformierte Feld, ausgewertet am „verschobenen“ Punkt, ergibt den selben Wert wie das Originalfeld ausgewertet am Punkt, bevor er „verschoben“ wurde. Wie man zeigen kann, läßt diese Transformation die Klein-Gordon-Lagrangedichte invariant.

Das obige Transformationsgesetz ist das einfachst denkbare für ein Feld und es ist die einzige Möglichkeit für ein Feld mit nur einer Komponente. Mehrkomponentige Felder dagegen transformieren auf kompliziertere Weise. Der bekannteste Fall ist der eines Vektorfeldes, wie beispielsweise des Vektorpotentials A^μ .

In diesem Fall trägt die betrachtete Größe außerdem eine Orientierung, die verschoben oder gedreht werden muss. Wenn sich der Punkt, an dem man das Feld auswertet ändert, muss die Orientierung vorwärts rotiert werden:

$$A^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_{\nu} A^\nu(\Lambda^{-1}x) . \quad (\text{C.12})$$

Ebenso transformieren sich Tensoren beliebigen Ranges mit der entsprechenden Anzahl von Lorentzmatrizen. Indem man solche Vektor- und Tensorfelder benutzt, kann man eine Vielzahl von lorentzinvarianten Gleichungen aufschreiben. Allgemein ist jede Gleichung, die nur vollständig kontrahierte Größen enthält, invariant unter Lorentztransformationen.

Auf diese Art und Weise ergibt sich eine große Klasse von lorentzinvarianten Gleichungen, doch es stellt sich heraus, dass noch weitere existieren. Nun könnte man versuchen, systematisch alle möglichen Transformationsgesetze für ein Feld zu finden. Dabei ist es jedoch ausreichend, sich auf lineare Transformationen einzuschränken, da es gezeigt werden kann, dass allgemeine nichtlineare Transformation aus diesen linearen zusammengesetzt werden können. Nehmen wir also an, ϕ_a sei ein n -komponentiges Multiplet, sodass die Lorentztransformation gegeben ist durch:

$$\phi_a(x) \rightarrow M_{ab}(\Lambda)\phi_b(\Lambda^{-1}x) \quad (\text{C.13})$$

mit einer $n \times n$ -Matrix $M(\Lambda)$.

Wir suchen demnach endlichdimensionale Darstellungen der Lorentzgruppe. Beschränken wir uns nun darauf, das Transformationsgesetz für Spinoren zu finden, ist die fundamentale zu erfüllende Eigenschaft die Invarianz der Dirac-Gleichung. Diese nämlich beschreibt die Dynamik der Spinorfelder unabhängig vom Bezugssystem.

So soll nach [5] im gestrichenen System gelten:

$$(-i\not{D}' + m)\psi' = 0 \quad \text{mit} \quad \psi'(x') = M(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \quad (\text{C.14})$$

als Transformationsvorschrift. Dabei wurde benutzt, dass die transformierten Gammamatrizen bis auf eine unitäre Transformation gleich den ursprünglichen sind, weshalb keine Unterscheidung zwischen ihnen notwendig ist.

Wenn im gestrichenen System Beobachter B aus dem Spinorfeld $\psi(x)$ des Beobachters A im ungestrichenen System sein $\psi'(x)$ gewinnen will, benötigt er dazu obige Transformationsvorschrift. Wenn B nun in die Dirac-Gleichung des ungestrichenen Systems $\psi'(x')$ einführt und von links mit $M(\Lambda)$ multipliziert, findet er:

$$\left[-i\hbar M(\Lambda)\gamma^\mu M^{-1}(\Lambda)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right] \psi'(x') = 0 .$$

Unter Beachtung von

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$$

erhält man als Gleichung im gestrichenen System:

$$\left[-i\hbar M(\Lambda) \gamma^\mu M^{-1}(\Lambda) \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} + m \right] \psi'(x') = 0. \quad (\text{C.15})$$

Diese ist identisch mit (C.14), falls man eine Matrix aus Matrizen M finden kann, die die Eigenschaft hat:

$$M(\Lambda) \gamma^\mu M^{-1}(\Lambda) \Lambda_\mu^\nu = \gamma^\nu \quad \text{bzw.} \quad (\text{C.16})$$

$$\Lambda_\mu^\nu \gamma^\mu = M^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu M(\Lambda) \Lambda_\mu^\nu. \quad (\text{C.17})$$

Gleichung (C.16) ist die fundamentale Bestimmungsgleichung für M . Wenn man gezeigt hat, dass diese Gleichung eine Lösung hat, hat man damit die Invarianz der Dirac-Gleichung bewiesen und die Lösung liefert das Transformationsgesetz für Dirac-Spinoren.

In der Konstruktion von M geht man über infinitesimale eigentliche Lorentz-Transformationen und findet, dass ein antisymmetrisches Produkt zweier Matrizen, nämlich

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

als Argument ist der Entwicklung von M auftaucht. Durch wiederholte Anwendung der infinitesimalen Transformationen erhält man schließlich:

$$\psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4} \omega \sigma_{\mu\nu} I^{\mu\nu}\right) \psi(\Lambda^{-1} x'). \quad (\text{C.18})$$

Mit Hilfe dieses Transformationsgesetzes charakterisiert man den Dirac-Spinor.

C.2.3 Grassman-Variablen

Um mit den funktionalen Methoden auch fermionische Felder beschreiben zu können, wie sie in der Herleitung der effektiven Wirkung auftreten, benötigt man sogenannte Grassmann-Variablen α und das komplex konjugierte $\bar{\alpha}$. Diese Zahlen widerspiegeln den fermionischen Charakter der klassischen Felder mit ihren definierenden Eigenschaften:

$$\{\bar{\alpha}, \alpha\} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{\alpha}^2 = \alpha^2 = 0. \quad (\text{C.19})$$

Aus dieser Definition folgt sofort, dass analytische Funktionen von Grassman-Variablen eine sehr einfache Gestalt besitzen:

$$f(\alpha) = f_0 + f_1 \alpha. \quad (\text{C.20})$$

Da im Gegensatz zu herkömmlichen Zahlen die Reihenfolge der Grassmann-Zahlen nicht egal ist, gibt es dementsprechend zwei Möglichkeiten eine Ableitung zu definieren.

Die Linksableitung:

$$\partial_i^L(\alpha_k \alpha_l) = \delta_{ik} \alpha_l - \alpha_k \delta_{il} \quad (\text{C.21})$$

und die Rechtsableitung:

$$\partial_i^R(\alpha_k \alpha_l) = \alpha_k \delta_{il} - \delta_{ik} \alpha_l . \quad (\text{C.22})$$

Außerdem benötigen wir das Integral über Grassmann-Variablen

$$\int d\alpha_i \alpha_j = \int d\bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_j = \delta_{ij} , \quad (\text{C.23})$$

ein lineares Funktional, das von *Berezin* eingeführt wurde und auf folgende Art und Weise plausibel wird:

Eine wesentliche Eigenschaft des bosonischen Funktionalintegrals ist die Invarianz gegenüber Verschiebungen der Integrationsvariablen, was eine zentrale Rolle in der Ableitung der quantenmechanischen Bewegungsgleichungen und den Erhaltungssätzen spielt (siehe auch [38]). Wenn wir dies aber ebenso für die fermionische Theorie fordern, ergibt sich für $\alpha \rightarrow \alpha + \beta$ als Bedingung an das Integral:

$$\int d\alpha(f_0 + f_1 \alpha) = \int d\alpha((f_0 + f_1 \beta) + f_1 \alpha)$$

Die Verschiebung ändert den konstanten Term und läßt den linearen Term unverändert. Die einzige lineare Funktion von f_0 und f_1 , die diese Eigenschaft besitzt, ist jedoch eine Konstante multipliziert mit f_1 . Mit der Wahl der Konstanten als 1 erhalten wir obige Definition. Um die Vorzeichen bei der Integration eindeutig festzulegen, benutzen wir für Mehrfachintegrale die Konvention (nach [54]):

$$\int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} \prod_1^n (\alpha_i \bar{\alpha}_i) = 1 , \quad \text{wobei } \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} = \prod_1^n d\alpha_i \prod_1^n d\bar{\alpha}_i \quad (\text{C.24})$$

unter Beachtung, dass die $d\alpha_i$ und $d\bar{\alpha}_i$ sowohl untereinander als auch mit den α_i und $\bar{\alpha}_i$ kommutieren. Das volle Integral über weniger als $2n$ Variablen verschwindet,

$$\int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} \prod_1^p \alpha_i \prod_1^q \bar{\alpha}_i = 0 , \quad \text{für } p + q < 2n . \quad (\text{C.25})$$

Weiterhin fällt auf, dass:

$$\int d\alpha_i \alpha_k \alpha_l = \delta_{ik} \alpha_l - \delta_{il} \alpha_k , \quad (\text{C.26})$$

was bedeutet, dass das *Berezin*-Integral $\int d\alpha_i$ äquivalent zur Linksableitung bezüglich α_i ist. Im Funktionalintegralformalismus treten insbesondere Gaußsche Integrale auf, weshalb uns

interessiert, wie sich das Integral über Grassmann-Zahlen unter linearen Transformationen ändert:

$$\beta_i = U_{ij}\alpha_j, \quad \bar{\beta}_i = V_{ij}\bar{\alpha}_j.$$

Man erhält

$$\int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} \prod_{i,l}^n (\beta_i \bar{\beta}_l) = \sum_{\{j_i, k_l\}} \prod_{i,l} U_{ij_i} V_{l k_l} \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} (\alpha_{j_i} \bar{\alpha}_{k_l}).$$

Es tragen jedoch nur diejenigen Terme zum Integral bei, für die $\{j_1, \dots, j_n\} = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$ und $\{k_1, \dots, k_n\} = \{\tilde{\sigma}(1), \dots, \tilde{\sigma}(n)\}$ Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ sind. Demnach ergibt sich:

$$\int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} \prod_{i,l}^n (\beta_i \bar{\beta}_l) = \sum_{\sigma, \tilde{\sigma}} \prod_{i,l} U_{i\sigma(i)} V_{l\tilde{\sigma}(l)} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tilde{\sigma}) = \det U \cdot \det V.$$

Mit diesem Wissen können wir im Gauß-Integral die Variablen gemäß $\beta_i = A_{ij}\alpha_j$ transformieren und erhalten

$$\int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} e^{-\bar{\alpha}_i A_{ij} \alpha_j} = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} e^{\bar{\alpha}_i \beta_i} = \sum_k \frac{1}{k!} \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} (\beta_i \bar{\alpha}_i)^k \quad (\text{C.27})$$

$$= \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} \prod_1^n (\beta_i \bar{\alpha}_i) = \det A, \quad (\text{C.28})$$

wobei man beachtet, dass für die Integration nur lineare Terme von Belang sind.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem entsprechenden bosonischen Gauß-Integral, sieht man dass im Gegensatz zur inversen Wurzel der Determinante hier die Determinante an sich eine Rolle spielt.

Gleichermaßen kann man nun unter Beachtung der Verschiebungsinvarianz des *Berezin*-Integrals folgendes Integral mit Hilfe der quadratischen Ergänzung berechnen:

$$\int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} e^{-\bar{\alpha} A \alpha + \bar{\eta} \alpha + \bar{\alpha} \eta} = \det(A) e^{\bar{\eta} A^{-1} \eta}. \quad (\text{C.29})$$

C.3 Spaß mit Spuren

Berechnet man die Spur über die Einheit, so ergibt sich die Raumzeitdimension. Betrachten wir nun die Spur über eine Gammamatrix:

$$\text{tr } \gamma^\mu = \text{tr } \gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu = -\text{tr } \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5$$

nach zyklischer Vertauschung der Argumente folgt somit:

$$\text{tr } \gamma^\mu = -\text{tr } \gamma^\mu$$

Es läßt sich also allgemein feststellen, dass die Spur über eine ungerade Anzahl von Gammamatrizen immer verschwindet.

Die Spur über zwei Gammamatrizen läßt sich mit Hilfe des Antikommutators auswerten.

$$\begin{aligned} \text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu &= \text{tr } (2g^{\mu\nu} \mathbb{1} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 8g^{\mu\nu} - \text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \\ \Rightarrow \text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu &= 4g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Daraus kann man für gerade Anzahlen von Gammamatrizen folgende Regel zum Berechnen der Spur aufstellen:

Man tausche das erste γ ganz nach rechts und dann wiederum zyklisch nach links.

Mit Hilfe dieses „Kochrezeptes“ lassen sich die Spuren über vier, sechs und acht Gammamatrizen berechnen:

$$\begin{aligned}
\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma &= 4(g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
\text{tr } \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\tau &= 4 \left(g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g^{\rho\tau} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\rho\tau} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} g^{\rho\tau} \right. \\
&\quad - g^{\alpha\beta} g^{\mu\rho} g^{\nu\tau} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\rho} g^{\nu\tau} - g^{\alpha\rho} g^{\beta\mu} g^{\nu\tau} \\
&\quad + g^{\alpha\beta} g^{\nu\rho} g^{\mu\tau} - g^{\alpha\nu} g^{\beta\rho} g^{\mu\tau} + g^{\alpha\rho} g^{\beta\nu} g^{\mu\tau} \\
&\quad - g^{\alpha\mu} g^{\nu\rho} g^{\beta\tau} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\rho} g^{\beta\tau} - g^{\alpha\rho} g^{\mu\nu} g^{\beta\tau} \\
&\quad \left. + g^{\beta\mu} g^{\nu\rho} g^{\alpha\tau} - g^{\beta\nu} g^{\mu\rho} g^{\alpha\tau} + g^{\beta\rho} g^{\mu\nu} g^{\alpha\tau} \right) \\
\text{tr } \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\eta &= g^{\alpha\beta} \text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\eta - g^{\alpha\mu} \text{tr } \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\eta \\
&\quad + g^{\alpha\nu} \text{tr } \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\eta - g^{\alpha\rho} \text{tr } \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\eta \\
&\quad + g^{\alpha\tau} \text{tr } \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\eta - g^{\alpha\sigma} \text{tr } \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\tau \gamma^\eta \\
&\quad + g^{\alpha\eta} \text{tr } \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\tau \gamma^\sigma
\end{aligned}$$

wobei die gewählte Darstellung für die acht Gammamatrizen in unserem Falle ausreicht.

D Hilfreiche Identitäten

Dieses Kapitel soll als Nachschlagwerk für diejenigen Leser dienen, die sich vorgenommen haben, das vierte Kapitel der Diplomarbeit vollständig nachzurechnen. Es enthält wesentliche Nebenrechnungen sowie auch einige Identitäten und Darstellungen, die für ein effektives Nachrechnen nützlich sind.

D.1 Übersicht

Um alle Unsicherheiten bezüglich der Darstellung der auftretenden Tensoren zu umgehen, beginnen wir mit einer Übersicht. Die Matrizen wurden mittels Aufteilung der Reihen berechnet und es ergeben sich nur Diagonal- bzw. Nebendiagonalmatrizen. Beim Entwickeln der Funktionen von Tensoren muss allerdings darauf geachtet werden, dass nur einfach kontravariante, einfach kovariante (bzw. umgekehrt) Tensoren mit sich selbst verjüngt werden können.

$$\begin{aligned}
 (e^{\pm 2eF\tau})^\mu{}_\nu &\hat{=} \begin{pmatrix} \cosh(z' + z'v) & & & \\ & \cos(z + zv) & & \\ & & \cos(z + zv) & \\ & & & \cosh(z' + z'v) \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} & -\sinh(z' + z'v) & & \\ & -\sin(z + zv) & & \\ & & \sin(z + zv) & \\ -\sinh(z' + z'v) & & & \end{pmatrix} \\
 (e^{\pm 2eF\tau})^{\mu\nu} &\hat{=} \begin{pmatrix} \cosh(z' + z'v) & & & \\ & -\cos(z + zv) & & \\ & & -\cos(z + zv) & \\ & & & -\cosh(z' + z'v) \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} & \sinh(z' + z'v) & & \\ & \sin(z + zv) & & \\ & -\sin(z + zv) & & \\ -\sinh(z' + z'v) & & & \end{pmatrix} \\
 (e^{\pm 2eF\tau})_{\mu\nu} &\hat{=} \begin{pmatrix} \cosh(z' + z'v) & & & \\ & -\cos(z + zv) & & \\ & & -\cos(z + zv) & \\ & & & -\cosh(z' + z'v) \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} & -\sinh(z' + z'v) & & \\ & \sin(z + zv) & & \\ & -\sin(z + zv) & & \\ \sinh(z' + z'v) & & & \end{pmatrix} \\
 (e^{\pm 2eF\tau})_\mu{}^\nu &\hat{=} \begin{pmatrix} \cosh(z' + z'v) & & & \\ & \cos(z + zv) & & \\ & & \cos(z + zv) & \\ & & & \cosh(z' + z'v) \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} & \sinh(z' + z'v) & & \\ & -\sin(z + zv) & & \\ & \sin(z + zv) & & \\ \sinh(z' + z'v) & & & \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Bei den folgenden Tensoren wird jeweils nur die Signatur für die einfach kontravariante, einfach kovariante Schreibweise angegeben. Die Signaturen der anderen Darstellungen sind dann oben abzulesen.

$$(1 - 2d)^\mu{}_\nu \hat{=} \begin{pmatrix} \frac{(\cosh z'v - \cosh z')}{\sinh z'} \\ -\frac{(\cos zv - \cos z)}{\sin z} \\ \frac{(\cos zv - \cos z)}{\sin z} \\ \frac{(\cosh z'v - \cosh z')}{\sinh z'} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sinh z'v}{\sinh z'} \\ \frac{\sin zv}{\sin z} \\ \frac{\sin zv}{\sin z} \\ \frac{\sinh z'v}{\sinh z'} \end{pmatrix}$$

$$d^\mu{}_\nu \hat{=} \begin{pmatrix} -\frac{(\cosh z'v - \cosh z')}{2 \sinh z'} \\ \frac{(\cos zv - \cos z)}{2 \sin z} \\ -\frac{(\cos zv - \cos z)}{2 \sin z} \\ -\frac{(\cosh z'v - \cosh z')}{2 \sinh z'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sinh z'v}{2 \sinh z'} \\ \frac{\sin zv}{2 \sin z} \\ \frac{\sin zv}{2 \sin z} \\ \frac{\sinh z'v}{2 \sinh z'} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}$$

Vervollständigt wird die Übersicht durch die Identitäten:

$$-\tilde{k}_\parallel^\mu \tilde{k}_\parallel^\nu = g_\parallel^{\mu\nu} k_\parallel^2 - k_\parallel^\mu k_\parallel^\nu, \quad (\text{D.1})$$

$$\tilde{k}_\perp^\mu \tilde{k}_\perp^\nu = g_\perp^{\mu\nu} k_\perp^2 - k_\perp^\mu k_\perp^\nu \quad (\text{D.2})$$

und einen Gedanken an die Winkeladditionstheoreme für die auftretenden Funktionen:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \cosh(\alpha + \beta) &= \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \sinh(\alpha + \beta) &= \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta. \end{aligned}$$

D.2 Identitäten zur Berechnung der verallgemeinerten Lagrangendichte

a) Für die Übergangsamplitude im Integral I_a (4.57) berechnet man folgende Bestandteile: Zuerst wird

$$\frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} i[\gamma_0, \gamma_3] E + \frac{1}{2} i[\gamma_1, \gamma_2] B = i \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} E + \sigma_3 \mathbb{1} B \quad (\text{D.3})$$

eigensetzt in:

$$\begin{aligned}
\exp \left[\frac{i}{2} e \sigma F s \right] &= \text{tr} \left[\sum (-1)^n \frac{z'^n}{n!} \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}^n * \sum i^n \frac{z^n}{n!} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}^n \right] \\
&= \text{tr} \left[\left(\mathbb{1} \sum \frac{z'^{2n}}{(2n)!} - \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \sum \frac{z'^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right. \\
&\quad \left. * \left(\mathbb{1} \sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right] \\
&= 4 \cosh z' \cos z .
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Die obige Darstellung wurde bewusst ein Mal so ausführlich gewählt, damit das Prinzip der Matrixmultiplikation und anschließender Spurbildung deutlich wird. (siehe auch Übersicht) Dann folgt:

$$\begin{aligned}
L(s) &= \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left[\frac{\sum \frac{(esF)^{2n+1}}{(2n+1)!}}{esF} \right] \\
&= \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\sinh z'}{z'} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\sin z}{z} \right] \\
&= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(\sinh z')^2}{z'^2} \frac{(\sin z)^2}{z^2} \right] .
\end{aligned} \tag{D.5}$$

b) Die formale Zeitentwicklung der Gammamatrix taucht als Relation (4.59) auf und wird folgendermaßen abgeleitet: Wir betrachten den Kommutator zwischen der Gammamatrix und dem Hamiltonoperator, um daraufhin eine Differentialgleichung für die Gammamatrix zu erhalten.

$$\begin{aligned}
[\mathcal{H}_0, \gamma_\mu] &= [-(\gamma \Pi)^2, \gamma_\mu] \\
&= -\Pi^\alpha \Pi^\beta (\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta) \\
&= 2[\Pi^\mu, \Pi^\beta] \gamma_\beta \\
&= 2ieF^{\mu\beta} \gamma_\beta
\end{aligned}$$

Unter Beachtung der Zeitunabhängigkeit des Hintergrundes folgt:

$$\dot{\gamma}_\mu(\tau) = e^{i\tau\mathcal{H}_0} i[\mathcal{H}_0, \gamma_\mu] e^{-i\tau\mathcal{H}_0} = -2eF\gamma_\mu(\tau)$$

und damit

$$\gamma_\mu e^{-i\tau\mathcal{H}_0} = e^{-i\tau\mathcal{H}_0} (\gamma_\mu e^{-2eF\tau}) .$$

c) Um den Kommutator δ wie in (4.63) zu berechnen, ist es sinnvoll, so lange wie möglich auf die explizite Matrixdarstellung zu verzichten.

$$\begin{aligned}\delta &= -\frac{1}{2}ik(1-d)^T D(\tau)k = -\frac{1}{2}ik \left[\frac{e^{eFs v} + e^{-eFs v} - e^{eFs} - e^{-eFs}}{(e^{-eFs} - e^{eFs}) eF} \right] k \\ &= -\frac{1}{2}iks \left[\frac{\cosh(eFs v) - \cosh(eFs)}{eFs(\sinh(eFs))} \right] k \\ &= -is \left[\frac{\cosh z' - \cosh z'v}{2z' \sinh z'} k_{\parallel}^2 + \frac{\cos zv - \cos z}{2 \sin z} k_{\perp}^2 \right]\end{aligned}$$

d) Für die partielle Integration (4.72) überlegt man sich zuerst, dass

$$\frac{\partial \delta}{\partial v} = -\frac{is}{2}k(1-2d)k$$

gilt und berechnet dann:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \frac{dv}{2} e^{\delta} 2k(1-2d)k d_{\mu\nu} &= -\int_{-1}^{+1} \frac{dv}{2} \frac{1}{s} \frac{\partial e^{\delta}}{\partial v} \left[-4i \left(\frac{e^{2eF\tau} - 1}{e^{2eFs} - 1} \right)_{\mu\nu} \right] \\ &= \frac{2i}{s} g_{\mu\nu} + \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{2} e^{\delta} \left[-\left(\frac{4ie^{-2eF\tau}}{D(s)} \right)_{\mu\nu} \right]\end{aligned}$$

unter Beachtung dessen, dass der zweite Summand von $d_{\mu\nu}$ keinen Beitrag liefert.

e) Die Berechnung der Identitäten (4.74) und (4.75) werden wir uns an der ersten der beiden klar machen:

$$\begin{aligned}2(dk)_{\mu} \tilde{k}_{\nu}^{\perp} - 2(e^{2eF\tau} V_{\perp} e^{-2eF\tau} k)_{\mu} (k(1-d))_{\nu} \\ &= -((1-2d)k) \tilde{k}_{\nu}^{\perp} + \tilde{k}_{\mu}^{\perp} (k(1-2d))_{\nu} \\ &= \left[-\frac{\cosh z'v - \cosh z'}{\sinh z'} \tilde{k}_{\mu}^{\parallel} + \frac{\cos zv - \cos z}{\sin z} \tilde{k}_{\mu}^{\perp} \right] \tilde{k}_{\nu}^{\perp} \\ &\quad + \tilde{k}_{\mu}^{\perp} \left[-\frac{\cosh z'v - \cosh z'}{\sinh z'} \tilde{k}_{\nu}^{\parallel} + \frac{\cos zv - \cos z}{\sin z} \tilde{k}_{\nu}^{\perp} \right] \\ &= 2 \frac{\cos zv - \cos z}{\sin z} \tilde{k}_{\mu}^{\perp} \tilde{k}_{\nu}^{\perp} - \frac{\cosh z'v - \cosh z'}{\sinh z'} \tilde{k}_{\mu}^{\parallel} \tilde{k}_{\nu}^{\perp} - \frac{\cosh z'v - \cosh z'}{\sinh z'} \tilde{k}_{\mu}^{\perp} \tilde{k}_{\nu}^{\parallel}.\end{aligned}$$

Den zweiten Zusammenhang zeigt man völlig analog.

f) Die drei Identitäten (4.76)-(4.78) seien dem Leser mit Hilfe der Übersicht zum Ausrechnen überlassen. Als Hinweis gilt wie bei allen derartigen Rechnungen, dass man sehr genau auf das Indexbild achten sollte.

Spezielle Spuren

Um dem geneigten Leser das komplikationslose Nachrechnen zu ermöglichen seien hier die auftretenden Spuren explizit angegeben. Die Terme, welche aufgrund der Lorenzbeziehung zu verschwindenden Beiträgen in der Lagrangedichte führen, sind an dieser Stelle schon unterdrückt.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\text{tr}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_1\gamma_2 &= -g_{\alpha 1}g_{\beta 2} + g_{\alpha 2}g_{\beta 1} \\
\frac{1}{4}\text{tr}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_1\gamma_2 &= g_{\alpha\mu}(g_{\beta 1}g_{\nu 2} - g_{\beta 2}g_{\nu 1}) - g_{\beta\mu}(g_{\alpha 1}g_{\nu 2} - g_{\alpha 2}g_{\nu 1}) \\
&\quad - g_{\alpha\nu}(g_{\beta 1}g_{\mu 2} - g_{\beta 2}g_{\mu 1}) + g_{\beta\nu}(g_{\alpha 1}g_{\mu 2} - g_{\alpha 2}g_{\mu 1}) \\
\frac{1}{4}\text{tr}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_0\gamma_3\gamma_1\gamma_2 &= (g_{\alpha 0}g_{\beta 3} - g_{\alpha 3}g_{\beta 0})(g_{\mu 1}g_{\nu 2} - g_{\mu 2}g_{\nu 1}) \\
&\quad + (g_{\alpha 0}g_{\mu 3} - g_{\alpha 3}g_{\mu 0})(g_{\nu 1}g_{\beta 2} - g_{\nu 2}g_{\beta 1}) \\
&\quad + (g_{\alpha 0}g_{\nu 3} - g_{\alpha 3}g_{\nu 0})(g_{\beta 1}g_{\mu 2} - g_{\beta 2}g_{\mu 1}) \\
&\quad + (g_{\mu 0}g_{\nu 3} - g_{\mu 3}g_{\nu 0})(g_{\alpha 1}g_{\beta 2} - g_{\alpha 2}g_{\beta 1}) \\
&\quad + (g_{\nu 0}g_{\beta 3} - g_{\nu 3}g_{\beta 0})(g_{\alpha 1}g_{\mu 2} - g_{\alpha 2}g_{\mu 1}) \\
&\quad + (g_{\beta 0}g_{\mu 3} - g_{\beta 3}g_{\mu 0})(g_{\alpha 1}g_{\nu 2} - g_{\alpha 2}g_{\nu 1})
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] ADLER, Stephen L.: Photon Splitting and Photon Dispersion in an Strong Magnetic Field. In: *Ann. Phys.* (1971)
- [2] BERESTETSKII, L.P.V.B. ; LIFSHITZ, E.M.: *Quantum Electrodynamics (Course of Theoretical Physics)*. Butterworth-Heinemann, 1982
- [3] BIALYNICKA-BIRULA, Z. ; BIALYNICKI-BIRULA, I.: Nonlinear Effects in Quantum Electrodynamics. Photon Propagation and Photon Splitting in an External Field. In: *Phys. Rev. D* 2 (1970), Nr. 10, S. 2341
- [4] BJORKEN, James D. ; DRELL, Sidney D.: *Relativistische Quantenfeldtheorie*. B.I.-Wissenschaftsverlag, 1987
- [5] BJORKEN, James D. ; DRELL, Sidney D.: *Relativistische Quantenmechanik*. B.I.-Wissenschaftsverlag, 1987
- [6] BLASCHKE, D.B. ; PROZORKEVICH, A.V. ; SMOLYANSKY, S.A. ; TARAKANOV, A.V.: Pulsations of the Electron-Positron Plasma in the Field of Optical Lasers. In: *arXiv:physics/0410114* (2004)
- [7] BLEULER, K.: Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen. In: *Helv. Phys. Acta* 23 (1950), Nr. 5
- [8] BREZIN, E. ; ITZYKSON, C.: Pair Production an Vacuum by an Anlternating Field. In: *Phys. Rev. D* (1970)
- [9] BREZIN, E. ; ITZYKSON, C.: Polarization Phenomena in Vacuum Nonlinear Electrodynamics. In: *Phys. Rev. D* 3 (1970), Nr. 2, S. 618
- [10] BULANOV, S.S. ; NAROZHNY, N.B. ; MUR, V.D. ; POPOV, V.S.: On e^+e^- -Pair Production by a focused Laser Pulse in Vakuum. In: *arXiv:hep-ph/0403163* (2004)
- [11] DAUGHERTY, J.K. ; LERCHE, I.: Theory of pair production in strong electric and magnetic fields and its applicability to pulsars. In: *Phys. Rev. D* 14 (1976), Nr. 2
- [12] DITTRICH, Walter ; GIES, Holger: *Probing the Quantum Vacuum*. Springer, 2000
- [13] DUNNE, Gerald V.: Heisenberg-Euler Effective Lagrangians: Basics and Extensions. In: *arXiv: hep-th/0406216* (2004)

- [14] EULER, H. ; KOCKEL, B.: On the Scattering of Light from Light in the Dirac Theory. In: *Naturwissensch.* (1935), Nr. 23
- [15] FEYNMAN, Richard P.: Theory of Positrons. In: *Phys. Rev.* 76 (1949), Nr. 6
- [16] FEYNMAN, Richard P.: *Quantenelektrodynamik.* Oldenburg Verlag, 1989
- [17] FOCK, V.: Die Eigenzeit in klassischer und Quantenmechanik. In: *Physik. Zeitschr. Sowjetunion* 12 (1937), S. 404
- [18] GINZBERG, V.L. (Hrsg.): *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum.* Nova Science Publishers, 1995
- [19] GREINER, Walter ; RAFELSKI, Johann: *Theoretische Physik.* Bd. 3a: *Spezielle Relativitätstheorie.* Harri Deutsch, 1992
- [20] GREINER, Walter ; REINHARDT, Joachim: *Theoretische Physik.* Bd. 7a: *Feldquantisierung.* Harri Deutsch, 1993
- [21] GREINER, Walter ; REINHARDT, Joachim: *Theoretische Physik.* Bd. 7: *Quantenelektrodynamik.* Harri Deutsch, 1993
- [22] GRIB, A.A. ; MAMAYEV, S.G. ; MOSTEPANENKO, V.M.: *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields.* Friedmann Laboratory Publishing, 1994
- [23] GUPTA, S.N.: Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics. In: *Proc. Phys. Soc. A* 63 (1950), Nr. 7
- [24] HEINZL, Thomas: *Lectures on Quantum Field Theory.* (2003)
- [25] HEISENBERG, W. ; EULER, H.: Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons. In: *Z.Phys* (1936)
- [26] HEISENBERG, W. ; PAULI, W.: Zur Quantenmechanik der Wellenfelder. In: *Zeitschr. f. Phys.* 56 (1929), S. 1–61
- [27] HEISENBERG, W. ; PAULI, W.: Zur Quantenmechanik der Wellenfelder, Teil II. In: *Zeitschr. f. Phys.* 59 (1930), S. 168–190
- [28] HOLSTEIN, Barry R.: Strong Field Pair Production. In: *Am. J. Phys* 67 (1999), Nr. 6, S. 499
- [29] HUANG, Kerson: *Quarks, Leptons and Gauge Fields.* World Scientific, 1982
- [30] HUANG, Kerson: *Quantum Field Theory - From Operators to Path Integral.* John Wiley & Sons Inc., 1998
- [31] ITZYKSON, Claude ; ZUBER, Jean-Bernard: *Quantum Field Theory.* McGraw Hill Inc., 1980

- [32] KINOSHITA, T. ; NEWMAN, H. (Hrsg.) ; YPSILANTIS, T. (Hrsg.): *Basic Discoveries in Particle Physics*. Plenum Press, 1995
- [33] KOCH, Katrin: *Vakuumfluktuationen und nichtlineare Elektrodynamik*, FSU Jena, Diplomarbeit, 2005
- [34] KÖPP, Gabriele ; KRÜGER, Frank: *Einführung in die Quantenelektrodynamik*. Teubner Studienbücher, 1997
- [35] LANDAU, L.D. ; LIFSHITZ, E.M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Bd. IVa: *Relativistische Quantentheorie*. Akademie Verlag, 1970
- [36] NAROZHNYI, N.B. ; GINZBURG, V.L. (Hrsg.): *Issues in Intense-Field Quantum Electrodynamics*. Nauka, 1986. – S. 141
- [37] PERVUSHIN, V.N. ; SKOKOV, V.V. ; REICHEL, A.V. ; SMOLYANSKY, S.A. ; PROZORKEVICH, A.V.: The Kinetic Description of Vacuum Particle Creation in the Oscillator Representation. In: *arXiv:hep-th/0307200* (2003)
- [38] PESKIN, Michael E. ; SCHROEDER, Daniel V.: *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, 1995
- [39] RINGWALD, A.: Pair Production from Vacuum at the Focus of an X-Ray Free Electron Laser. In: *arXiv: hep-ph/0103185* (2001)
- [40] RITUS, V.I.: Radiative Corrections in Quantum Electrodynamics with Intense Field and their Analytical Properties. In: *Ann. Phys* 69 (1972), S. 555–582
- [41] RYDER, Lewis H.: *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996
- [42] SAUTER, F.: Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs. In: *Zeitschrift für Physik* 69 (1931), S. 742
- [43] SCHRÖDINGER, E.: Quantisierung als Eigenwertproblem. In: *Ann. Phys* 79 (1926). – siehe auch nachfolgende Arbeiten
- [44] SCHWINGER, Julian: On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. In: *Phys. Rev.* (1950)
- [45] SCHWINGER, Julian: *Particles, Sources and Fields*. Bd. 2. Addison-Wesley, 1989
- [46] S.SCHMIDT ; D.BLASCHKE ; G.RÖPKE ; SMOLYANSKY, S.A. ; PROZORKEVICH, A.V. ; TONEEV, V.D.: A Quantum Kinetic Equation for Particle Production in the Schwinger Mechanism. In: *Int. Journ. of Modern Physics E* (1998), S. 709
- [47] TSAI, Wu yang: Vacuum polarization in homogeneous magnetic fields. In: *Phys. Rev. D* (1974)
- [48] TSAI, Wu yang ; ERBER, Thomas: Photon pair creation in intense magnetic fields. In: *Phys. Rev. D* (1974)

- [49] URRUTIA, L. F.: Vacuum polarization in parallel homogeneous electric and magnetic fields. In: *Phys. Rev. D* (1977)
- [50] WAERDEN, Bartel L. d.: *Algebra I*. Springer-Verlag, 1991
- [51] WEINBERG, Steven: *The Quantum Theory of Fields*. Bd. 1. Cambridge University Press, 1995
- [52] WEINBERG, Steven: *The Quantum Theory of Fields*. Bd. 2. Cambridge University Press, 1995
- [53] WEISSKOPF, Victor: The Electrodynamics of the Vacuum Based on the Quantum Theory of the Electron. In: *Kong. Dans. Vid. Selsk. Math-fys. Medd. XIV* (1936), Nr. 6
- [54] WIPF, Andreas: *Path Integrals*. (2002)
- [55] YNDURAIN, Francisco J.: *Relativistic Quantum Mechanics and Introduction to Field Theory*. Springer, 1996

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich bei Prof. Wipf bedanken, dafür dass er mir ein interessantes und anspruchsvolles Thema vorgeschlagen und gern und ausführlich auf meine Fragen geantwortet hat. Mein besonderer Dank gilt außerdem Dr. Tom Heinzl, der trotz seines Weggangs aus Jena immer ein offenes Ohr für mich hatte und wesentliche Aspekte der Quantenelektrodynamik ebenso wie spezielle Fragen zur Arbeit verständlich und geduldig mit mir besprochen hat. Insbesondere das Arbeitsklima war stets angenehm und offen, was sich in hilfreichen Diskussionen mit Melchior Grützmann, Georg Bergner und Tobias Kästner niedergeschlagen hat. Am meisten bin ich jedoch meinem Wilfried zu Dank verpflichtet, der mich in jeder erdenklichen Weise gestützt und gestärkt hat. Ich danke Dir für jede Woche, die Du allein mit Haus und Jungens gemeistert hast, für jedes wochenendliche Wiederaufpäppeln Deiner erschöpften Katja und vor allem für das Vertrauen und die große Liebe, die Du mir täglich entgegenbringst.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Seitens der Verfasserin bestehen keine Einwände, die vorliegende Diplomarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, den 7. Oktober 2005

Katja Ehrhold