

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut

Diplomarbeit

**Ausgewählte Approximationsmethoden
für supersymmetrische Modelle**

eingereicht von Georg Bergner
geboren am 29. 5. 1979 in Halle/Saale

1. Gutachter: Prof. Dr. phil. habil. Andreas Wipf

2. Gutachter: PD Dr. habil. Tom Heinzl

Tag der Verleihung des Diploms:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Supersymmetrie	7
2.1	Symmetrien, die POINCARÉ-Symmetrie und POINCARÉ-Algebra	7
2.2	Das Theorem von COLEMAN und MANDULA	9
2.3	Spinoren	10
2.4	Beispiele für LORENTZ-Algebren	14
2.4.1	1 + 1 Dimensionen	14
2.4.2	3 + 1 Dimensionen	15
2.5	Die Supersymmetriealgebra als Erweiterung der POINCARÉ-Algebra	15
2.6	Darstellungen der Supersymmetriealgebra	19
2.7	Superraumformalismus	21
2.8	Supersymmetrische Modelle	28
2.8.1	Das WESS-ZUMINO-Modell in 3+1 Dimensionen	28
2.8.2	Das WESS-ZUMINO-Modell in 1+1 Dimensionen	29
2.8.3	Supersymmetrie in 0+1 Dimensionen (supersymmetrische Quantenmechanik)	31
2.8.4	Stromterme in supersymmetrischen Modellen und WARD-Identitäten	33
2.8.5	Spontan gebrochene Supersymmetrie in niedrigster Ordnung Störungstheorie („tree level“)	34
3	Feldtheorie bei endlichen Temperaturen	37
3.1	„imaginary-time“ Formalismus	37
3.2	„real-time“ Formalismus	40
3.3	Supersymmetrie bei endlichen Temperaturen	41
4	Die Molekularfeldnäherung	43
4.1	Herleitung durch Variation des Maßes	43
4.2	Herleitung aus der Gitterformulierung der Quantenfeldtheorie	45
4.3	Herleitung durch Sattelpunktsnäherung in der Zustandssumme	47
4.4	Zusammenfassende Bemerkungen und Aussagen über spontan gebrochene Symmetrie mit Hilfe der Molekularfeldnäherung	49
5	Zur Existenz einer supersymmetrischen Molekularfeldnäherung	52
5.1	Supersymmetrie an einem Gitterpunkt	52
5.2	Bedingungen an eine supersymmetrische Molekularfeldnäherung	53
5.3	Supersymmetrische Erweiterung der bosonischen Näherung durch fermionische Terme	53

Inhaltsverzeichnis

5.4	Eine Molekularfeldnäherung für Fermionen	55
5.5	Schlußfolgerungen	57
6	Allgemeine Betrachtungen zu weiteren möglichen Näherungsverfahren	59
6.1	Das effektive Potential und die effektive Wirkung	59
6.2	Näherungsverfahren	60
6.2.1	Molekularfeldnäherung	63
6.2.2	Loopentwicklung	64
6.2.3	Gaußsche Näherung	64
6.2.4	Näherung für große N	64
6.3	Gaußsche Approximation in der Supersymmetrie	66
7	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	72
7.1	Zusammenfassung	72
7.2	Ausblick	72
A	Definitionen und Konventionen	74
A.1	Allgemeine Definitionen	74
A.2	Gammamatrizen in d Dimensionen	74
A.3	Ladungskonjugation	75
A.4	MAJORANA-Spinoren in der WEYL-Darstellung in vier Dimensionen	76
B	Ausführliche Rechnungen zu Kapitel 2.7	78
C	Herleitung des Variationsprinzips	83
D	Supersymmetrische Eichtheorie	85

...
Der fortgeschrittne Mensch trägt auf erhobnen Schwingen
Dankbar die Kunst mit sich empor,
Und neue Schönheitswelten springen
Aus der bereicherten Natur hervor.
Des Wissens Schranken gehen auf,
Der Geist, in euren leichten Siegen
Geübt, mit schnell gezeitigtem Vergnügen
Ein künstlich All von Reizen zu durchheilen,
Stellt der Natur entlegenere Säulen,
Ereilet sie auf ihrem dunkeln Lauf.
Jetzt wägt er sie mit menschlichen Gewichten,
Mißt sie mit Maßen, die sie ihm geliehn;
Verständlicher in seiner Schönheit Pflichten,
Muß sie an seinem Aug vorüberziehn.
In selbstgefällger jugendlicher Freude
Leiht er den Sphären seine Harmonie,
Und preiset er das Weltgebäude,
So prangt es durch die Symmetrie.¹

...

¹In: Friedrich Schiller: Gedichte (1789-1805), *Die Künstler*

1 Einleitung

Es ist ein Grundanliegen des menschlichen Geistes, Strukturen und Gesetzmäßigkeiten in der Welt, die ihn umgibt, zu erkennen. Ob diese Strukturen auch in der Welt existieren, ob die Welt also auf einem grundlegenden konsistenten logischen System von Gesetzmäßigkeiten beruht, oder ob die Gesetzmäßigkeiten nur dazu dienen, einen gewissen Teil der Welt für den Menschen verständlich zu machen, ist für die Philosophie ein relevantes Problem, das hier aber nicht weiter behandelt werden soll.

Bei dem Erkennen der Strukturen und Gesetzmäßigkeiten spielen Symmetrien und Erhaltungsgrößen eine entscheidende Rolle. Die Bedeutung von Erhaltungsgrößen ist schon aus der klassischen Mechanik bekannt. Mit Hilfe der aus den NEWTONSchen Gesetzen gewonnenen Differentialgleichungen lassen sich bestimmte Erhaltungsgrößen (Energie, Impuls, Drehimpuls) ableiten. Diese Erhaltungsgrößen erweisen sich jedoch als etwas Fundamentaleres. Sie sind eine Folge der Symmetrien von Raum und Zeit. So ergibt sich zum Beispiel die Energieerhaltung aus der Homogenität der Zeit. Durch EMMY NOETHER konnte gezeigt werden, daß es immer eine direkte Verbindung von Symmetrien und Erhaltungsgrößen gibt: Eine Symmetrie bedingt einen Erhaltungssatz, und ein Erhaltungssatz bedingt eine Symmetrie ([29]). Die Suche nach Gesetzmäßigkeiten ist also immer auch eine Suche nach den grundlegenden Symmetrien.

In den fünfziger und sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts kam es dazu, daß eine große Zahl neuer Teilchen mit Hilfe von Beschleunigern und in der kosmischen Strahlung gefunden wurde. Auch hier begnügte sich der menschliche Geist nicht mit dem bloßen Festhalten der experimentellen Daten und Eigenschaften dieser Teilchen. Man suchte vielmehr nach Gesetzmäßigkeiten, nach denen diese Prozesse ablaufen. Dies war damit auch eine Suche nach Symmetrien und Erhaltungsgrößen. Man stellte fest, daß bestimmte Prozesse nicht stattfinden, obwohl sie den bekannten Erhaltungssätzen (Energie, Impuls, Ladung usw.) genügen und erkannte daraus, daß es weitere Erhaltungsgrößen gibt, die diese Prozesse verbieten. Diese zusätzlichen Erhaltungsgrößen führten auf Symmetrien, die für die gefundenen Teilchen gelten. Die so gefundenen Gesetzmäßigkeiten konnten schließlich im Standardmodell zusammengefügt werden. Mit Hilfe des Standardmodells konnten wiederum Vorhersagen gemacht werden, die experimentell bestätigt wurden.

Allerdings läßt das Standardmodell noch einige Fragen offen. Noch immer gibt es mehrere unterschiedliche Teilchenklassen. Ein einziges allen Dingen zugrundeliegendes Prinzip, eine Theorie aus der sich alle Teilchen und Teilchenklassen zwangsläufig ergeben, fehlt damit. Ein großes Problem ist außerdem, daß sich die Gravitation nicht ohne weiteres in die Gesetze der Teilchenphysik integrieren läßt. Die Quantenfeldtheorie stellt eine Art Vereinigung der speziellen Relativitätstheorie mit den Prinzipien der Quantenmechanik dar. Weit schwerer ist es jedoch, die allgemeine Relativitätstheorie, durch die die Gravitation beschrieben wird, mit in dieses Prinzip einzubeziehen. Man benötigt allerdings sehr starke Gravitationsfelder, damit die Gravitation auf dem Niveau der Teilchenphysik relevant wird.

Dadurch gelangt man zu der Frage, wie man die bestehenden Symmetrien noch durch weitere ergänzen kann, ohne mögliche Prozesse zu sehr einzuschränken. Außerdem wäre es

wünschenswert, auch Teilchen unterschiedlicher Masse und unterschiedlichen Spins (also zum Beispiel Fermionen und Bosonen) durch Symmetrietransformationen miteinander in Verbindung zu bringen. Dies ist aber nicht durch sogenannte innere Symmetrien, die nur trivial auf die POINCARÉ-Symmetrie wirken, möglich. Eine weitgehende Einschränkung bezüglich der möglichen Symmetrien wird durch das Theorem von COLEMAN und MANDULA gemacht. Dieses Theorem stellt im gewissen Sinne eine Kritik an jeder möglichen weiteren Symmetrie dar. Nach dem Theorem von COLEMAN und MANDULA sind keine weiteren Symmetrien möglich außer den inneren Symmetrien und der POINCARÉ-Symmetrie. Durch das Theorem bleibt allerdings die Supersymmetrie unberücksichtigt. Diese Symmetrie hat ungerade (antikommütierende) Elemente in ihrer Algebra. Dadurch werden durch ihre Generatoren Fermionen und Bosonen ineinander umgewandelt. Auch die Gravitation läßt sich durch (allerdings lokale) Supersymmetrie in dieses Bild mit einfügen. Dies bezeichnet man als Supergravitation. Weiterhin kann die Supersymmetrie eine Erklärung für das so genannte Hierarchieproblem, das heißt den großen Unterschied zwischen der PLANCKmasse und der Energieskala, bei der die elektroschwache Symmetrie gebrochen wird, geben.

Bisher wurde Supersymmetrie experimentell noch nicht nachgewiesen. Man hat noch keinen der supersymmetrischen Partner bekannter Teilchen gefunden. Die Supersymmetrie muß also auf jeden Fall gebrochen sein, da ungebrochene Supersymmetrie verlangt, daß die Teilchen eines Multipletts die gleiche Masse besitzen. Aber auch ohne einen experimentellen Nachweis kann sich Supersymmetrie als hilfreich und interessant erweisen. Sie dient dann nicht der Darstellung von experimentellen Fakten, sondern als Erweiterung bisheriger mathematischer und theoretischer Konzepte. Diese Erweiterung ist unabhängig von ihrer direkten Einsetzbarkeit hilfreich. So war es zum Beispiel auch bei der Einführung der komplexen Zahlen oder der Erweiterung und Verallgemeinerung der GAUSSSchen Flächentheorie durch RIEMANN noch nicht abzusehen, welche Anwendungen sich für diese neuen Gebiete ergeben würden. Ohne die Entdeckungen von RIEMANN wäre es aber nicht zur Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie durch EINSTEIN gekommen. Auch die Konzepte der Supersymmetrie erweisen sich bereits jetzt schon nicht nur für supersymmetrische Modelle als hilfreich.

Neben dem Konzept der Symmetrie hat das Konzept einer spontan gebrochenen Symmetrie in der modernen Physik an Bedeutung gewonnen. Obwohl das Potential und die LAGRANGE-Dichte einer bestimmten Symmetrie gehorchen, muß sie nicht für den Grundzustand gelten. Das einfachste Beispiel hierfür ist ein eindimensionales Potential, was symmetrisch bezüglich der Transformation $x \rightarrow -x$ ist und auf beiden Seiten des Koordinatenursprunges je ein Minimum besitzt. Im Grundzustand befindet sich ein klassisches Teilchen in einem dieser beiden Minima. Dieser Grundzustand verletzt damit die Symmetrie. Zu einem Phasenübergang kommt es, wenn durch Veränderung bestimmter Parameter (zum Beispiel bei Erhöhung der Temperatur) das System von einem Zustand mit (spontan) gebrochener Symmetrie in einen symmetrischen Zustand (oder umgekehrt) übergeht. Als Beispiel dafür dient häufig die spontane Magnetisierung, zu der es in Ferromagneten beim Überschreiten der CURIE-Temperatur kommt. Durch die Kopplung der Elementarmagnete weisen sie (innerhalb einer Domäne) im Zustand mit der niedrigsten Energie alle in eine Richtung. Welche Richtung dies ist, ist jedoch nicht vorgegeben, denn die Kopplung und das Potential sind rotations-symmetrisch. Ohne äußeres Magnetfeld gibt es damit keine Vorzugsrichtung. Erst wenn das System sich in einem der Grundzustände befindet, ist die Symmetrie gebrochen.

Die Beschreibung von Phasenübergängen ist relativ kompliziert, da hier viele der herkömmlichen Approximationsverfahren versagen. Es gibt jedoch einige Näherungen, mit denen sich trotzdem relativ gute Ergebnisse erzielen lassen. So ist es zum Beispiel bekannt, daß die

1 Einleitung

Molekularfeldnäherung in vier Dimensionen für rein bosonische Modelle Resultate liefert, die nahe an den exakten liegen. Die Näherungsverfahren werden oft nur für bosonische Modelle verwendet. In Modellen, bei denen Fermionen auftauchen, kann man meist über die fermionischen Freiheitsgrade integrieren und Näherungen für die entstehende Determinante verwenden. Möchte man aber die Supersymmetrie nicht verletzen, so sollte man Näherungen, die man für den bosonischen Sektor des Modells verwendet, in entsprechender Weise auch für den fermionischen Sektor benutzen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Phasenstruktur supersymmetrischer Modelle zu untersuchen. Dabei werden wir von bekannten Näherungsverfahren für bosonische Modelle ausgehen. Es ist nicht von vorn herein sichergestellt, daß sich diese Verfahren auch auf supersymmetrische Modelle anwenden lassen, wenn die Symmetrie durch die Näherung nicht verletzt werden soll. Die grundsätzliche Anwendbarkeit der Näherungen steht im Vordergrund der Untersuchungen, deswegen werden einfache niedrigdimensionale Modelle behandelt. In erster Linie ist es das WESS-ZUMINO-Modell in ein beziehungsweise zwei Dimensionen.

Am Anfang dieser Arbeit (Kapitel 2) werden in einer Einführung die Prinzipien der Supersymmetrie vorgestellt. Da die Phasenübergänge häufig im Zusammenhang mit endlichen Temperaturen untersucht werden, beschäftigen wir uns in Kapitel 3 mit der Feldtheorie bei endlichen Temperaturen. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf der Molekularfeldnäherung (Kapitel 4), da diese im Vergleich zu anderen Näherungen die besten Resultate für die Beschreibung von Phasenübergängen liefert. Allerdings wurde dieses Verfahren bisher nur für bosonische Modelle verwendet. Eine Form zu finden, in der es auch für supersymmetrische Modelle verwendet werden kann, ist der Gegenstand von Kapitel 5. In Kapitel 6 wenden wir uns schließlich kurz anderen Näherungsverfahren zu.

2 Supersymmetrie

Dieses Kapitel stellt eine Einführung in die Supersymmetrie dar. Wir beschränken uns hier nicht darauf, die Modelle (Wirkungen und LAGRANGE-Dichten) vorzustellen, und deren Invarianz zu zeigen. Es sollen auch einige der Schritte, die zu diesen Modellen geführt haben, vorgestellt werden. Dazu benötigen wir jedoch zunächst einige Grundlagen, die im Rahmen der Supersymmetrie eine wichtige Rolle spielen. Genauere Ausführungen befinden sich in [48], [38], [11], [47], [3] und [46]. Dabei ist jedoch darauf hinzuweisen, daß in der Supersymmetrie von einigen Autoren unterschiedliche Konventionen benutzt werden, was einen Vergleich der Ergebnisse etwas erschwert. Die hier verwendeten Konventionen sind im Anhang angegeben.

2.1 Symmetrien, die Poincaré-Symmetrie und Poincaré-Algebra

Symmetrien haben eine entscheidende Bedeutung in der modernen Quanten- und Teilchenphysik. Sie sind ein wichtiges Mittel, um Strukturen in der Natur zu erkennen, und in die entsprechenden physikalischen Modelle zu übertragen ([14]). Die Suche nach einer grundlegenden Theorie ist somit immer eine Suche nach den grundlegenden Symmetrien der Natur. Mit Symmetrien sind Erhaltungssätze eng verbunden. Durch das NOETHERSche Theorem wurde gezeigt, daß zu jeder Symmetrie eine Erhaltungsgröße gehört. In neuerer Zeit kam noch ein weiterer Aspekt hinzu. Man unterscheidet heute globale und lokale Symmetrien. Lokale Symmetrien verwendet man in der Eichtheorie und, wenn es sich um lokale Supersymmetrie handelt, in der Supergravitation.

Symmetrie bedeutet, daß es Transformationen gibt, unter denen die physikalischen Gesetze invariant bleiben. Zur mathematischen Beschreibung dieser Transformationen verwendet man die Gruppentheorie. Kontinuierliche Transformationen können in Form einer LIE-Gruppe dargestellt werden. Mathematisch gesehen ist eine LIE-Gruppe eine Gruppe, die zu den Gruppeneigenschaften auch die Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit besitzt. Die infinitesimalen Transformationen werden dabei von der zugehörigen LIE-Algebra bestimmt. Ihre Elemente sind die Generatoren der Transformationen. Sie ist äquivalent zum Tangentialraum am Einselement der Gruppe (ein Vektorraum mit einer LIE-Klammer).

Die Symmetrien der MINKOWSKI-Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie werden durch die POINCARÉ-Gruppe beschrieben. Sie hat die Eigenschaft, daß sie das Wegelement $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ invariant läßt (siehe Anhang A für die hier verwendeten Konventionen und Definitionen). Die zugehörigen Transformationen sind die Drehungen, die Translationen und die LORENTZ-Booster. Die POINCARÉ-Transformationen sind lineare Transformationen:

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (2.1)$$

Damit das Wegelement in der MINKOWSKI-Raum-Zeit sich nicht ändert, muß die POINCARÉ-Gruppe folgende Gestalt haben (d ist die Dimension der betrachteten Raum-Zeit):

$$iL = \left\{ (\Lambda, a) \mid a \in \mathbb{R}^d, \Lambda \in L(\mathbb{R}^d), \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \right\}. \quad (2.2)$$

2 Supersymmetrie

Aus $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ folgt $\det(\Lambda) = \pm 1$ und $(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \eta_{\nu\rho} \eta^{\mu\sigma} \Lambda^\rho_\sigma = \Lambda^\mu_\nu$. Die POINCARÉ-Gruppe hat in vier Dimensionen insgesamt zehn freie Parameter: Vier Translationen und je drei für die Drehungen und LORENTZ-Boosts. Drehungen und LORENTZ-Boosts bezeichnet man als LORENTZ-Transformationen. Sie werden durch die Matrizen Λ (Elemente der LORENTZ-Gruppe) bestimmt. Die POINCARÉ-Gruppe ist das halbeinfache Produkt von der LORENTZ-Gruppe und den Translationen. (Die Gruppenmultiplikation ist also definiert durch $(\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1)$.)

Die dazugehörige POINCARÉ-Algebra kann aus den infinitesimalen Transformationen bestimmt werden. Sei $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$, $a^\mu = \epsilon^\mu$ und ω^μ_ν und ϵ^μ infinitesimal kleine Parameter. Im folgenden werden deshalb nur Anteile bis zu der Ordnung betrachtet, die linear in diesen Parametern ist. Aus $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ folgt:

$$\omega^T \eta + \eta \omega = 0 \rightarrow \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (2.3)$$

Da $(\mathbb{1}, 0)$ das Einselement (e) der Gruppe ist, kann ein beliebiges Element der POINCARÉ-Gruppe nahe e geschrieben werden als:

$$(\mathbb{1} + \omega^\mu_\nu, \epsilon^\mu) = e + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + i \epsilon_\mu P^\mu. \quad (2.4)$$

Auch die $M^{\mu\nu}$ sind dabei antisymmetrisch bezüglich der Vertauschung der beiden Indizes. Durch diese Art der Entwicklung wurde (mit Koeffizienten $\omega_{\mu\nu}$ aus $\Lambda = \mathbb{1} + \omega$) auch die Basis der Algebra (Generatoren $M^{\rho\sigma}$) festgelegt. Nur in dieser speziellen Basis sind die Koeffizienten der Entwicklung $\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma} \omega^\sigma_\nu$, wodurch $\Lambda = e^\omega$ (mit $\omega = \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$) gilt. Mit $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ folgt daraus

$$(\Lambda, a)(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda(\mathbb{1} + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)$$

$$(\Lambda, a)\left[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} + \epsilon_\rho P^\rho\right](\Lambda, a)^{-1} = \frac{1}{2}\Lambda_\mu^\rho \omega_{\rho\sigma} \Lambda_\nu^\sigma M^{\mu\nu} + (\Lambda_\mu^\sigma \epsilon_\sigma - \Lambda_\mu^\rho \omega_{\rho\sigma} \Lambda_\nu^\sigma a^\nu) P^\mu$$

$$(\Lambda, a)M^{\rho\sigma}(\Lambda, a)^{-1} = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma (M^{\mu\nu} + a^\mu P^\nu - a^\nu P^\mu) \quad (2.5)$$

$$(\Lambda, a)P^\rho(\Lambda, a)^{-1} = \Lambda_\mu^\rho P^\mu. \quad (2.6)$$

Nun sollen auch die (Λ, a) als infinitesimale Transformationen betrachtet werden. Es ergibt sich:

$$i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + \epsilon_\mu P^\mu, M^{\rho\sigma}\right] = \omega_\mu^\rho M^{\mu\sigma} + \omega_\nu^\sigma M^{\rho\nu} + \epsilon^\rho P^\sigma - \epsilon^\sigma P^\rho \quad (2.7)$$

$$i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + \epsilon_\mu P^\mu, P^\rho\right] = \omega_\mu^\rho P^\mu. \quad (2.8)$$

Eine LIE-Algebra ist bestimmt durch die Kommutatoren (LIE-Klammern) der Generatoren. Die Kommutatoren der POINCARÉ-Algebra ergeben sich aus den Gleichungen (2.7) und (2.8):

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma}) \quad (2.9)$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\rho] = i(\eta^{\mu\rho} P^\nu - \eta^{\nu\rho} P^\mu) \quad (2.10)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (2.11)$$

Die P^μ sind hierbei die Generatoren der Translationen, die $M^{\mu\nu}$ die der Rotationen und LORENTZ-Boosts.

2 Supersymmetrie

Die Zustände eines Teilchens gehören zu einem HILBERT-Raum, der eine unitäre Darstellung der POINCARÉ-Gruppe trägt. Es gibt zwei CASIMIR-Operatoren der POINCARÉ-Gruppe, das bedeutet zwei Operatoren, die mit allen Generatoren der Algebra kommutieren:

$$\begin{aligned} P^2 &= P_\mu P^\mu \\ W^2 &= W_\mu W^\mu. \end{aligned}$$

$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}$ ist der PAULI-LUBANSKI-Vektor. Durch die Eigenwerte dieser beiden CASIMIR-Operatoren werden die Darstellungen der POINCARÉ-Algebra klassifiziert. Das gleiche gilt deswegen auch für die Teilchen. Für massive Teilchen verbirgt sich dahinter eine Klassifikation nach Masse und Spin des Teilchens.

Die entscheidende Frage ist nun, wie man die POINCARÉ-Gruppe erweitern kann. Eine einfache Art der Erweiterung ist es, eine sogenannte innere Symmetrie hinzuzufügen. Die Transformationen der inneren Symmetriegruppe wirken trivial auf die POINCARÉ-Gruppe, und damit kommutieren die Generatoren (B_r) dieser (LIE-) Gruppe mit denen der POINCARÉ-Gruppe

$$[B_r, B_s] = iC_{rs}^t B_t \tag{2.12}$$

$$[P_\mu, B_r] = 0 \tag{2.13}$$

$$[M_{\mu\nu}, B_r] = 0. \tag{2.14}$$

Die C_{rs}^t sind die Strukturkonstanten der inneren Symmetriegruppe.

Die gesamte Symmetriegruppe ist dann das direkte Produkt aus der Gruppe der inneren Symmetrie und der POINCARÉ-Gruppe. Natürlich kommutieren die Generatoren der inneren Symmetriegruppe auch mit den CASIMIR-Operatoren der POINCARÉ-Gruppe. Das bedeutet aber, daß die Mitglieder eines irreduziblen Multipletts der inneren Symmetriegruppe alle die gleiche Masse und den gleichen Spin haben müssen.

Auch eine Erweiterung durch die konforme Symmetriegruppe ist denkbar. Dies bedeutet eine Art Reskalierung des Wegelements $(ds')^2 = e^{\Omega(x)} ds^2$ durch eine positive Funktion $\Omega(x)$. Auf diese Möglichkeit soll hier aber nicht weiter eingegangen werden (siehe [9]).

Die bisher betrachteten Symmetriegruppen ändern den Spin nicht. Eine Transformation, die den Spin ändert, muß nicht trivial auf die POINCARÉ-Gruppe wirken. Die entscheidende Frage ist, ob eine solche Symmetrie unter bestimmten (physikalisch motivierten) Voraussetzungen existieren kann. Eine weitreichende Einschränkung möglicher Erweiterungen der POINCARÉ-Gruppe als grundlegende Symmetriegruppe der Teilchen stellt das Theorem von COLEMAN und MANDULA dar [6].

2.2 Das Theorem von Coleman und Mandula

COLEMAN und MANDULA untersuchten, welche Möglichkeiten es für die Symmetrien der Streumatrix überhaupt gibt. Dabei machten sie eine Reihe von Annahmen. Diese Annahmen ergeben sich aus physikalisch motivierten Bedingungen an die Streuprozesse. Hier soll das Theorem aus [6] ohne Beweis dargestellt werden.

Sei G eine zusammenhängende Symmetriegruppe der Streumatrix (S). S ist damit ein unitärer Operator auf dem HILBERT-Raum \mathcal{H} ($\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \dots$; $\mathcal{H}^{(n)}$ n -Teilchen-HILBERT-Raum). COLEMAN und MANDULA gingen bei der Symmetriegruppe von einer LIE-Gruppe aus. U sei eine unitäre Darstellung von G auf \mathcal{H} . Für U soll folgendes gelten:

2 Supersymmetrie

- 1) U überführt Einteilchenzustände in Einteilchenzustände und wirkt auf Vielteilchenzustände, als wenn sie Tensorprodukte von Einteilchenzuständen wären.
- 2) G ist eine Symmetrie von S , d.h. U und S kommutieren.

Weiterhin sollen folgende Annahmen gemacht werden:

- 1) G enthält eine Untergruppe, die lokal isomorph zur POINCARÉ-Gruppe ist (LORENTZ-invarianz).
- 2) Teilchenarten korrespondieren mit Darstellungen von der POINCARÉ-Gruppe, die positive Energie haben. Für jedes M soll es nur eine endliche Anzahl von Teilchen geben, deren Masse kleiner als M ist.
- 3) Amplituden der elastischen Streuung sind analytische Funktionen der Energie und des Impulsübertrages bei fast allen Impulsen und Energien (d.h. allen bis auf eine isolierte Menge).
- 3) Streuung von Zweiteilchenzuständen findet bei fast allen Energien statt. ($S = 1 - i(2\pi)^4 \delta(P_\mu - P'_\mu) T \rightarrow T|p, p'\rangle \neq 0$ bei fast allen Energien)
- 4) Es existiert eine Umgebung des Einselementes von G , so daß jedes Element der Umgebung auf einer einparametrischen Untergruppe $g(t)$ liegt. Außerdem definiere $-i \frac{d}{dt}(x, g(t)y) = (x, Ay)$ eine stetige Funktion linear in y und antilinear in x . (x und y sind Zustände. Es handelt sich bei der Symmetriegruppe also um eine LIE-Gruppe mit HERMITESchen Generatoren.)

Unter diesen Voraussetzungen gilt:

Theorem 1 *Die Gruppe G ist ein direktes Produkt der POINCARÉ-Gruppe und einer inneren Symmetriegruppe.*

Dieses Theorem beinhaltet die Aussage eines Theorems von O'RAIFEARTAIGH: Alle Teilchen eines Multipletts (Multiplett einer Erweiterung der POINCARÉ-Gruppe) haben die gleiche Masse, da, wie schon oben erwähnt, auch für die durch innere Symmetrien erweiterte Gruppe $P_\mu P^\mu$ ein CASIMIR-Operator ist.

Wenn man also weiterhin auf ein grundlegendes Symmetrieprinzip und damit auf eine grundlegende Theorie der Elementarteilchen hofft, so muß man nach Ausnahmen suchen, die das Theorem von COLEMAN und MANDULA unberücksichtigt läßt. Dazu sollen aber erst Spinoren und damit eine spezielle Darstellung der POINCARÉ-Algebra eingeführt werden.

Der historische Weg war allerdings anders. Die ersten Ansätze für die Supersymmetrie kamen nicht aus Überlegungen zum Theorem von COLEMAN und MANDULA, sondern aus der Stringtheorie.

2.3 Spinoren

Im folgenden soll eine spezielle Darstellung der LORENTZ-Algebra betrachtet werden. Dazu gehen wir von den in A.2 eingeführten Gammamatrizen aus und definieren:

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\Sigma^{\nu\mu} = \frac{1}{2i} \gamma^{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

2 Supersymmetrie

Durch die so definierten $\Sigma^{\mu\nu}$ erhält man eine $2^{\frac{d}{2}}$ -dimensionale Darstellung der LORENTZ-Algebra (die Spindarstellung), denn:

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\eta^{\mu\rho}\gamma^\nu - \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu) \quad (2.16)$$

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma}). \quad (2.17)$$

Aus dieser Darstellung der Algebra erhält man mit Hilfe der Exponentialabbildung eine einparametrische Familie von Transformationen:

$$S(s) = e^{s\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}, \quad \Gamma^\rho(s) = S^{-1}(s)\gamma^\rho S(s). \quad (2.18)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Gamma^\rho(s) &= -\frac{i}{2}S^{-1}(s)\omega_{\mu\nu}[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho]S(s) = \omega^\rho_\sigma\Gamma^\sigma(s) \\ \text{d.h. } \Gamma^\rho(s) &= S^{-1}(s)\gamma^\rho S(s) = (e^{s\omega})^\rho_\sigma\gamma^\sigma \text{ da } S(0) = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Das Resultat für $s = 1$ ist also eine LORENTZ-Transformation

$$S^{-1}(1)\gamma^\rho S(1) = \Lambda^\rho_\sigma\gamma^\sigma. \quad (2.19)$$

Man kann ein Objekt definieren, dessen Transformation durch S bestimmt wird (Spinor):

$$\psi \rightarrow S\psi(\Lambda^{-1}x). \quad (2.20)$$

Nach Gleichung (A.7) ergibt das Inverse von S

$$S^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0. \quad (2.21)$$

Aus den ψ ergeben sich Objekte, die wie Tensoren einer bestimmten Stufe unter LORENTZ-Transformationen transformieren. Für die Konstruktion einer LAGRANGE-Dichte werden Objekte verwendet, die wie Skalare (Tensoren der Stufe 0) transformieren, also invariant sind. Zunächst wird dazu der DIRAC-konjugierte Spinor von ψ eingeführt:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0. \quad (2.22)$$

Sein Transformationsverhalten ist:

$$\bar{\psi} \rightarrow \psi^\dagger S^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \gamma_0 S^{-1} = \bar{\psi} S^{-1}. \quad (2.23)$$

Deswegen ist $\bar{\psi}\gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}\psi$ ein LORENTZ-Tensor der Stufe n ,

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}\psi \rightarrow \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \cdots \Lambda^{\mu_n}_{\nu_n} \bar{\psi}\gamma^{\nu_1\cdots\nu_n}\psi, \quad (2.24)$$

und $\bar{\psi}\psi$ ist ein Skalar.

Die so eingeführten Spinoren erfüllen keine Vertauschungsrelationen, sondern für sie gelten Antivertauschungsrelationen. Dies ist keine direkte Folge der zugrundeliegenden Symmetrien. Der Grund, weswegen dies für Felder gilt, die unter der LORENTZ-Gruppe nach (2.20) transformieren, liegt darin, daß sich die Felder kausal verhalten müssen (Spin-Statistik-Theorem). Es ist ein Ausdruck der unterschiedlichen Statistik von Fermionen und Bosonen.

2 Supersymmetrie

Zur Konstruktion von einer Wirkung sind außerdem die Hermitizitätseigenschaften wichtig. Man definiert die HERMITESche Konjugation von Spinoren als:

$$(\bar{\psi}\chi)^\dagger = \chi^\dagger\bar{\psi}^\dagger. \quad (2.25)$$

Daraus folgt, daß das Produkt $\bar{\psi}\psi$ hermitesch ist.

Gleichung (2.19) drückt einen Gruppenhomomorphismus zwischen der Spin-Gruppe und der LORENTZ-Gruppe aus. Allerdings ist dieser Homomorphismus nicht eindeutig, da sowohl S als auch $-S$ zu der gleichen LORENTZ-Transformation führen (also eine 2 : 1 Abbildung). Obwohl die Vertauschungsrelationen der Algebra in (2.16) und (2.17) denen der LORENTZ-Algebra entsprechen, gelangen wir doch zu einer anderen Gruppe als der LORENTZ-Gruppe. Es handelt sich um ihre universelle Überlagerungsgruppe. Die Gruppen stimmen in der Umgebung der Eins überein, aber durch Exponentieren bestimmter Darstellungen der Algebra erhält man Elemente, die nicht in der Gruppe selbst, sondern nur in ihrer Überlagerungsgruppe liegen. Die Rechtfertigung dafür, daß nicht nur die LORENTZ-Gruppe selbst, sondern auch die Überlagerungsgruppe eine Symmetriegruppe darstellt, beruht auf der Art der Darstellungen, die in der Quantenmechanik verwendet werden. In der Quantenmechanik wird der Zustand eines Systems nicht nur durch ein einzelnes Element des HILBERT-Raumes beschrieben. Elemente die sich nur um einen Phasenfaktor unterscheiden, führen auf die gleichen Erwartungswerte von Observablen und beschreiben damit denselben Zustand. Symmetrietransformationen werden im HILBERT-Raum durch Operatoren beschrieben, die entweder linear und unitär oder antilinear und antiunitär sind. Wenn die Symmetrie kontinuierlich mit der Identität verbunden ist, kommt nur die erste von beiden Möglichkeiten in Frage. Außerdem gibt es durch die oben genannte Besonderheit quantenmechanischer Systeme noch die Möglichkeit sogenannter projektiver Darstellungen. Bei diesen Darstellungen gilt ($U(\Lambda)$ Darstellung des Elementes Λ der Symmetriegruppe; $e^{i\phi}$ Phasenfaktor):

$$U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = e^{i\phi(\Lambda_1, \Lambda_2)}U(\Lambda_1\Lambda_2). \quad (2.26)$$

Die Möglichkeit solcher projektiver Darstellungen hängt von der Gruppe selbst ab. Damit nicht durch einfaches Umdefinieren der Generatoren der Phasenfaktor ϕ verschwindet, muß entweder die Algebra der Gruppe über zentrale Ladungen verfügen, die mit allen Generatoren vertauschen, oder die Gruppe darf nicht einfach zusammenhängend sein. Die LORENTZ-Gruppe ist nicht einfach zusammenhängend. Der daraus resultierende Phasenfaktor ist ein Vorzeichen $U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = \pm U(\Lambda_1\Lambda_2)$. Deswegen tauchen in der Quantenmechanik Darstellungen der universellen Überlagerungsgruppe auf. Die Gruppe kann so erweitert werden, daß sie einfach zusammenhängend ist, und keine projektiven Darstellungen mehr existieren (siehe [45]).

Physikalische Felder sollten durch eine Darstellung der Symmetriegruppe transformieren. Für Skalarfelder und Vektorfelder ist dies die triviale Darstellung und die Vektordarstellung der LORENTZ-Gruppe

$$\phi(x) \rightarrow \phi(\Lambda^{-1}x) \text{ bzw. } A^\mu(x) \rightarrow \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x). \quad (2.27)$$

Durch die Erweiterung der Gruppe erhält man weitere Darstellungen und Felder, die nach diesen Darstellungen transformieren:

$$\psi \rightarrow S\psi(\Lambda^{-1}x) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}\psi(e^{-\omega}x). \quad (2.28)$$

2 Supersymmetrie

Die infinitesimalen Transformationen, die man aus einer Entwicklung nach $\omega_{\mu\nu}$ erhält, sind:

$$\delta\psi = \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(M^{\mu\nu} + \Sigma^{\mu\nu}) \text{ mit } M_{\mu\nu} = \frac{1}{i}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu). \quad (2.29)$$

Die so definierten $M_{\mu\nu}$ (vgl. Drehimpuls) erfüllen die Vertauschungsrelationen der LORENTZ-Algebra. Auch die Summe $J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}$ ist damit eine Darstellung der LORENTZ-Algebra und erzeugt die Spin-Transformationen für die Spinoren:

$$S\psi(\Lambda^{-1}) = (e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}\psi)(x). \quad (2.30)$$

In diesem Sinne kann man auch von einer Verallgemeinerung des Drehimpulses sprechen.

Die hier verwendete Darstellung der Spinoren ist nicht in jedem Falle irreduzibel. Es existieren oft bezüglich (2.20) invariante Unterräume. In geraden Dimensionen verwendet man linkshändige und rechtshändige Spinoren:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_*)\psi \quad (2.31)$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_*)\psi. \quad (2.32)$$

Die Projektion auf einen dieser Unterräume heißt chirale Projektion. γ_* antikommutiert mit allen Gammamatrizen. Deswegen kommutieren $\Sigma_{\mu\nu}$ und γ_* , wodurch die Unterräume der linkshändigen und der rechtshändigen Spinoren unter LORENTZ-Transformationen invariant bleiben.

Eine weitere Möglichkeit der Einschränkung ist es, eine Realitätsbedingung (MAJORANA-Bedingung) an die ψ zu stellen:

$$\psi = \mathcal{C}\gamma_0^T\psi^* = \psi_C. \quad (2.33)$$

Auch durch diese Bedingung projiziert man auf einen Unterraum, der invariant unter den LORENTZ-Transformationen ist. Dies sieht man mit Hilfe der infinitesimalen Transformationen:

$$\mathcal{C}\gamma_0^T(\delta_\omega\psi)^* = \left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(-L^{\mu\nu} + \mathcal{C}\gamma_0^T\Sigma^{\mu\nu*}\gamma_0^T\mathcal{C}^{-1})\right)\mathcal{C}\gamma_0^T\psi^* \quad (2.34)$$

$$= \delta_\omega(\mathcal{C}\gamma_0^T\psi^*). \quad (2.35)$$

(Dabei wurde (A.16) verwendet.)

Um die MAJORANA-Bedingung verlangen zu können, müssen die \mathcal{C} allerdings bestimmte Bedingungen erfüllen. Wegen

$$\psi_C^* = (\mathcal{C}\gamma_0^T\psi^*)^* = (\mathcal{C}\gamma_0^T)^*\psi = (\mathcal{C}\gamma_0^T)^*(\mathcal{C}\gamma_0^T)\psi^* = \eta\mathcal{C}^*\mathcal{C}\psi^* = \psi^* \quad (2.36)$$

und \mathcal{C} unitär muß $\mathcal{C}^T = \eta\mathcal{C}$ gelten ($\eta = \pm 1$). Dies gilt aber nicht in jeder Dimension. Deswegen kann die MAJORANA-Bedingung auch nicht in jeder Dimension gefordert werden. Nur dort, wo es symmetrische Matrizen \mathcal{C}_+ oder antisymmetrische Matrizen \mathcal{C}_- gibt, ist dies möglich.

Unter bestimmten Umständen ist die chirale Projektion mit der MAJORANA-Bedingung verträglich. Dafür muß gelten:

$$\gamma_*\mathcal{C}\gamma_0^T = \mathcal{C}\gamma_0^T\gamma_*^*. \quad (2.37)$$

Nach (A.9) und (A.16) bedeutet dies aber

$$\mathcal{C}\gamma_0^T\gamma_*^* = -i^d\gamma_*\mathcal{C}\gamma_0^T. \quad (2.38)$$

2 Supersymmetrie

Anhand der Tabelle in Kapitel A.3 sieht man, daß nur in zwei Dimensionen die MAJORANA-Bedingung gefordert werden kann, und sie zugleich mit der chiralen Projektion vereinbar ist. (Alle hier gemachten Aussagen gelten für Dimension d modulo 8, d.h. auch für höhere Dimensionen.) Erfüllen die Spinoren die MAJORANA-Bedingung, so spricht man von MAJORANA-Spinoren. Wenn sie eine der Chiralitätsbedingungen erfüllen, spricht man von rechts- oder linkshändigen WEYL-Spinoren. Fordert man beide Bedingungen, so erhält man MAJORANA-WEYL-Spinoren.

Eine Darstellung, in der man die MAJORANA-Spinoren reell wählen kann, nennt man MAJORANA-Darstellung. Die Ladungskonjugation ist dann proportional zu γ_0 und $\psi_C = \pm\alpha\psi^*$. Damit sind für $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+$ die Gammamatrizen reell (d.h. nach (A.14) und (A.15) $\mathcal{C} = \alpha\gamma^0 = \mathcal{C}^T$) und für $\mathcal{C} = \mathcal{C}_-$ imaginär (d.h. $\mathcal{C} = \alpha\gamma^0 = -\mathcal{C}^T$).

In einer WEYL-Darstellung ist $\gamma_* = -\sigma_3 \otimes \mathbb{1}$ und damit

$$\frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_*) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

In dieser Darstellung bezeichnet man die oberen, linkshändigen, Komponenten als chiral (ψ_α) und die unteren, rechtshändigen, Komponenten als anti-chiral ($\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$).

In der Supersymmetrie werden häufig MAJORANA-Spinoren in der WEYL-Darstellung verwendet. Deswegen ist das Kapitel A.4 diesen Objekten gewidmet.

Für die Berechnung von Pfadintegralen und für die Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen verwendet man Räume mit EUKLIDISCHER Signatur. Auch dann kann man analog zu (2.24) einen LORENTZ-Tensor der Stufe n ($A^{\mu_1 \dots \mu_n}$) mit Hilfe der Gammamatrizen aus Spinoren konstruieren:

$$A^{\mu_1 \dots \mu_n} = \psi^\dagger \gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} \psi. \quad (2.40)$$

2.4 Beispiele für Lorentz-Algebren

Als Beispiele sollen nun die 1 + 1 und die 3 + 1 dimensionale Raum-Zeit betrachtet werden.

2.4.1 1 + 1 Dimensionen

In 1 + 1 Dimensionen hat die LORENTZ-Gruppe nur einen unabhängigen Generator

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Damit hat die Gruppe der LORENTZ-Transformationen die Form:

$$\Lambda = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) = \exp(-\omega_{01}\sigma_1) = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & -\sinh \alpha \\ -\sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Eine Darstellung der Gammamatrizen in 1 + 1 Dimensionen ist

$$\gamma^0 = \sigma_2; \gamma^1 = i\sigma_1 \rightarrow \gamma_* = -\gamma_0\gamma_1 = \sigma_3. \quad (2.43)$$

2.4.2 3 + 1 Dimensionen

Die sechs Generatoren der LORENTZ-Algebra in 3+1 Dimensionen lassen sich in Generatoren der LORENTZ-Boosts (K_i) und Generatoren der Rotationen (J_i) unterteilen:

$$(M_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & -J_3 & J_2 \\ -K_2 & J_3 & 0 & -J_1 \\ -K_3 & -J_2 & J_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

mit:

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ J_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} & J_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & J_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k ; [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k ; [J_i, K_j] = [K_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}K_k. \quad (2.46)$$

Damit lassen sich neue Generatoren konstruieren:

$$B_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \quad ; \quad A_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \quad (2.47)$$

$$[B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k \quad ; \quad [A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k ; [B_i, A_j] = 0. \quad (2.48)$$

Die A_i und B_i ergeben also zwei $sl(2, \mathbb{C})$ Unteralgebren der komplexifizierten LORENTZ-Gruppe. Aber die beiden Unteralgebren sind nicht unabhängig voneinander, da $B_i = A_i^*$. Die Darstellungen der Algebra kann man also nach den Darstellungen der $sl(2, \mathbb{C})$ klassifizieren. Darstellungen der $sl(2, \mathbb{C})$ werden durch ganzzahlig Vielfache von $\frac{1}{2}$ charakterisiert. Deswegen kann man die Darstellungen der LORENTZ-Algebra durch (m, n) (mit m und n halbganze Zahlen) klassifizieren:

$(0, 0)$ ist die triviale skalare Darstellung (Spin 0).

$(\frac{1}{2}, 0)$ ist die linkshändige Darstellung (Spin $\frac{1}{2}$).

$(0, \frac{1}{2})$ ist die rechtshändige Darstellung (Spin $\frac{1}{2}$).

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist die Vektordarstellung (Spin 1).

2.5 Die Supersymmetriealgebra als Erweiterung der Poincaré-Algebra

Jetzt soll es um eine spezielle Erweiterung der Symmetrie gehen, die das Theorem von COLEMAN und MANDULA noch zuläßt. Dabei soll zunächst von vier Dimensionen ausgegangen werden. Die Ergebnisse lassen sich aber auch auf andere Dimensionen übertragen.

2 Supersymmetrie

Fassen wir die grundlegenden Überlegungen zusammen. Der Ausgangspunkt waren die grundlegenden Symmetrien der Raumzeit. Dadurch gelangt man zu der POINCARÉ-Gruppe und der dazugehörigen Algebra. Felder einer physikalischen Theorie transformieren in bestimmten Darstellungen der Symmetriegruppe. Die Operatoren der Quantenmechanik transformieren in unitären (projektiven) Darstellungen dieser Gruppe. Durch den Übergang zur universellen Überlagerungsgruppe (mit Hilfe bestimmter Darstellungen der LORENTZ-Algebra) gelangt man zu neuen Feldern, den Spinor-Feldern. Diese erfüllen keine Vertauschungsregeln mehr sondern Antivertauschungsregeln. Auch die Generatoren der Symmetriegruppe transformieren in bestimmten Darstellungen der Gruppe, die wiederum mit bestimmten Darstellungen der Algebra verknüpft sind. Gleichung (2.6) zeigt, daß P_μ in der $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Darstellung (Vektordarstellung) transformiert. $M_{\mu\nu}$ transformiert als antisymmetrischer Tensor in der Darstellung $(1, 0) \oplus (0, 1)$ (siehe Gleichung (2.5)) und die Generatoren der inneren Symmetriegruppe in der trivialen Darstellung $(0, 0)$ (Gleichung (2.13) und (2.14)). Das Theorem von COLEMAN und MANDULA besagt, daß keine weiteren Generatoren außer die der inneren Symmetrie zu der Symmetriegruppe hinzugefügt werden können, wenn die Symmetriegruppe eine LIE-Gruppe ist.

Durch die Erweiterung der LORENTZ-Gruppe zur universellen Überlagerungsgruppe kamen Felder mit neuen Eigenschaften hinzu. Sie transformieren in der $(\frac{1}{2}, 0)$ bzw. $(0, \frac{1}{2})$ Darstellung und erfüllen keine Vertauschungsregeln, sondern Antivertauschungsregeln. Es ist nun die Frage, ob es auch Generatoren geben kann, die sich so verhalten. Erfüllen einige Generatoren einer Gruppe Antivertauschungsregeln, so ist es keine einfache LIE-Gruppe mehr. Man spricht dann von einer gradierten (LIE-) Gruppe und einer gradierten (LIE-) Algebra. Die Erweiterung der Symmetriegruppe durch antikommutierende, fermionische, Elemente ist durch das Theorem von COLEMAN und MANDULA nicht berücksichtigt. Solche Generatoren transformieren antikommutierende und kommutierende Felder ineinander, also Fermionen (Darstellung $(0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 0)$) in Bosonen (Darstellung $(0, 0)$ oder $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) und umgekehrt. Deswegen sollten solche Generatoren in der $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(0, \frac{1}{2})$ Darstellung transformieren. Bezeichnet werden sie mit Q_α^i und \bar{Q}_α^i . Der Index α ($\dot{\alpha}$) numeriert hier die Spinorkomponenten (WEYL-Darstellung). Der Index i zählt die Anzahl solcher Generatoren (Superladungen, $i = 1, \dots, N$). Transformiert ein Generator in der Darstellung (n, m) und ein anderer Generator in der Darstellung (k, l) , so ist der Kommutator dieser zwei Generatoren eine Linearkombination der Elemente, die in den Darstellungen (u, v) mit $u = |n - k|, |n - k| + 1, \dots, n + k$ und $v = |m - l|, |m - l| + 1, \dots, m + l$ transformieren.

Die $(Q_{\alpha i})^\dagger$ liegen in der zu $(\frac{1}{2}, 0)$ komplex konjugierten Darstellung $(0, \frac{1}{2})$ und müssen deshalb zu den \bar{Q}_α^i gehören. Man kann daher folgende Bedingung fordern:

$$\bar{Q}_\alpha^i = (Q_{\alpha i})^\dagger. \quad (2.49)$$

Dies entspricht, wie später deutlich wird, dem Übergang zu MAJORANA-Spinoren. In vier Dimensionen gelangt man, wie in Abschnitt 2.3 gezeigt, zu irreduziblen Spinoren, wenn man die MAJORANA-Bedingung fordert, in zwei Dimensionen kann man noch zusätzlich die WEYL-Bedingung fordern. Man spricht von $N = 1$ Supersymmetrie, wenn es eine einzige Superladung in einer irreduziblen Darstellung gibt. Das bedeutet die Superladung erfüllt alle Bedingungen, die man in den jeweiligen Dimensionen fordern muß, um zu einer irreduziblen Darstellung zu gelangen. In vier Dimensionen tauchen in der $N = 1$ Supersymmetrie deshalb MAJORANA-Fermionen auf und DIRAC-Fermionen entsprechen $N = 2$.

Der Antikommutator von $Q_{\alpha i}$ mit \bar{Q}_α^i transformiert in der $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Darstellung. Der einzige

2 Supersymmetrie

Generator in dieser Darstellung ist P_μ . Deswegen gilt:

$$\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^j\} = 2\delta_i^j (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu. \quad (2.50)$$

Die Vorfaktoren ergeben sich durch geeignete Umdefinition der $Q_{\alpha i}$.

Der Kommutator von $Q_{\alpha i}$ und P_μ muß eine Linearkombination der Darstellungen $(1, \frac{1}{2})$ und $(0, \frac{1}{2})$ sein, aber es gibt keinen Generator in der $(1, \frac{1}{2})$ Darstellung. Damit gilt:

$$[Q_{\alpha i}, P^\mu] = C_{ij} (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta} j}. \quad (2.51)$$

Zusammen mit dem Hermitesch Konjugierten dieser Gleichung ergibt sich:

$$[[Q_{\alpha i}, P_\mu], P_\mu] = C_{ij} C_{jk}^* (\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu)_\alpha^\beta Q_{\beta k}. \quad (2.52)$$

Da $[P_\mu, P_\nu] = 0$ ist, läßt sich mit Hilfe der JACOBI-Identität¹ zeigen, daß die Matrix C_{ij} verschwindet:

$$[Q_{\alpha i}, P_\mu] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i, P_\mu] = 0. \quad (2.53)$$

Der Antikommutator zweier $Q_{\alpha i}$ ist eine Linearkombination von Generatoren in den Darstellungen $(0, 0)$ und $(0, 1)$. In der $(0, 1)$ Darstellung transformiert aber nur ein Anteil der $M_{\mu\nu}$. Jedoch muß dieser Antikommutator wie die $Q_{\alpha i}$ mit P_μ kommutieren, was auf $M_{\mu\nu}$ nicht zutrifft. Deswegen kommen nur noch Elemente der Algebra in der $(0, 0)$ Darstellung in Frage und

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} Z_{ij}. \quad (2.54)$$

Die $Z_{ij} = -Z_{ji}$ sind die zentralen Ladungen der Algebra. Das bedeutet, sie kommutieren mit allen anderen Elementen der Algebra. Daß sie mit den Generatoren der POINCARÉ-Gruppe kommutieren erkennt man schon daran, daß sie in der trivialen Darstellung liegen. Die zentralen Ladungen sind ein Teil der inneren Symmetriegruppe, $Z_{ij} = a_{ij}^r B_r$.

Der Kommutator von $Q_{\alpha i}$ mit den Generatoren der inneren Symmetriegruppe muß in der $(0, \frac{1}{2})$ Darstellung liegen:

$$[Q_{\alpha i}, B_r] = (b_r)_i^j Q_{\alpha j} \quad \text{und} \quad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i, B_r] = -\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^j (b_r)_j^i. \quad (2.55)$$

Die JACOBI-Identität von $Q_{\alpha i}$ und B_r ergibt:

$$[Z_{ij}, B_r] = (b_r)_i^k Z_{kj} + (b_r)_j^k Z_{ik}, \quad (2.56)$$

und damit:

$$[Z_{ij}, Z_{kl}] = a_{kl}^r (b_r)_i^k Z_{kj} + a_{kl}^r (b_r)_j^k Z_{ik}. \quad (2.57)$$

Der Ausdruck $[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^l, Z_{ij}]$ verschwindet. Dies zeigt man mit Hilfe einer JACOBI-Identität von Q_α und P_μ , wobei P_μ mit Q_α kommutiert. Deswegen ist $a_{kl}^r (b_r)_k^l = 0$. Die zentralen Ladungen liegen im ABELSchen Anteil der inneren Symmetriegruppe. Damit gilt weiterhin $[B_r, Z_{ij}] = 0$.

¹Mit JACOBI-Identitäten sind hier Super-JACOBI-Identitäten gemeint: $\{A, B\} + \text{zyklisch} = 0$ mit $\{A, B\} = [A, B]$, wenn A und B fermionisch sind und sonst $\{A, B\} = [A, B]$. (Das Produkt zweier fermionischer Operatoren ist bosonisch.)

2 Supersymmetrie

Insgesamt erhält man unter Anwendung weiterer Jacobi-Identitäten die Erweiterung der POINCARÉ-Algebra zur Supersymmetriealgebra:

$$[Q_{\alpha i}, P_\mu] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i, P_\mu] = 0 \quad (2.58)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i, M_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot{\beta}}^i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \quad \text{und} \quad [Q_{\alpha i}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} Q_{\beta i} \quad (2.59)$$

$$[Q_{\alpha i}, B_r] = (b_r)_i^j Q_{\alpha j} \quad (2.60)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i, B_r] = -\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^j (b_r)_j^i \quad (2.61)$$

$$\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^j\} = 2\delta_i^j(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \quad (2.62)$$

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} Z_{ij} \quad (2.63)$$

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^j\} = -2\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} Z^{ij}. \quad (2.64)$$

Die zentralen Ladungen kommutieren mit allen Generatoren. Hinzu kommen noch die Relationen der POINCARÉ-Algebra und die der inneren Symmetrie.

Sind keine zentralen Ladungen vorhanden, so ist die Algebra der Supersymmetrie invariant unter einer $U(N)$ Gruppe (N Anzahl der Superladungen). Ist R_i^j eine $U(N)$ Matrix, so gilt

$$Q_{\alpha i} \rightarrow R_i^j Q_{\alpha j}. \quad (2.65)$$

Diese Symmetrie ist Teil der inneren Symmetriegruppe und heißt R-Symmetrie. Für $N = 1$ Supersymmetrie ist dies eine $U(1)$ Symmetriegruppe.

Je nach Anzahl der Superladungen und zentralen Ladungen kann man unterschiedliche Modelle betrachten. Um ein renormierbares Modell zu erhalten, darf die Anzahl der Superladungen nicht größer als vier sein. Für ein realistisches Modell eignet sich am besten die $N = 1$ Supersymmetrie. Bei höherem N gelangt man zu Modellen, deren Struktur sich wesentlich von den bekannten unterscheidet. So beinhaltet das $N = 4$ Modell zum Beispiel nur masselose Teilchen. Diese Modelle eignen sich aber trotzdem dafür, grundlegende Strukturen zu erkennen, da sie in bestimmten Fällen einfachere Berechnungen ermöglichen.

Auch andere Überlegungen als die Frage nach möglichen Symmetrien führen auf die Supersymmetrie. In der Quantentheorie betrachtet man zwei verschiedene Arten von Teilchen, die Fermionen und die Bosonen. Die Supersymmetrie ist die Symmetrie, die beide Teilchenarten miteinander verbindet. Außerdem lassen sich mit Hilfe der Supersymmetrie einige Probleme nicht supersymmetrischer Modellen lösen. Außerdem weisen supersymmetrische Modelle oft weniger Divergenzen auf, da Fermionen und Bosonen zu Divergenzen mit unterschiedlichen Vorzeichen beitragen.

Zum Schluß soll noch eine andere Schreibweise der Algebra besprochen werden. Man kann die Superladungen auch zu vierkomponentigen Objekten zusammenfassen

$$Q_i = \begin{pmatrix} Q_{\alpha i} \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i \end{pmatrix}; \quad \bar{Q}_i = (Q_i^\alpha \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}i}). \quad (2.66)$$

Nach der Relation (2.49) sind die so konstruierten Objekte MAJORANA-Spinoren, denn $Q_i = \mathcal{C}\gamma^{0T}Q_i$. Der Anteil der Supersymmetriealgebra, der die Superladungen enthält, ist in dieser Schreibweise

$$\{Q_i, \bar{Q}_j\} = 2(\delta_{ij}\gamma^\mu P_\mu + i\text{Im}Z_{ij} + i\gamma_5\text{Re}Z_{ij}) \quad (2.67)$$

$$[Q_i, P_\mu] = 0; \quad [Q_i, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}Q_i; \quad [Q_i, R] = i\gamma_5Q_i. \quad (2.68)$$

2.6 Darstellungen der Supersymmetriealgebra

Im folgenden soll es nun darum gehen, Darstellungen der Algebra im Falle $Z_{ij} = 0$ zu finden.

Betrachten wir zunächst nur massive Teilchen. Die Superladungen tragen den Spin $\frac{1}{2}$. Das sieht man daran, daß nach Gleichung (2.59) $[Q, J] = \frac{1}{2}\sigma Q$ gilt. Das Inertialsystem soll das Ruhesystem des Teilchens ($P_\mu = (m, \mathbf{0})$) sein. Damit ist die Wirkung von Q auf einen Zustand mit Spin s eine Linearkombination von Zuständen mit Spin $s - \frac{1}{2}$ und $s + \frac{1}{2}$

$$Q|m, s, s_3\rangle = \sum_{s'_3} C_{s_3 s'_3}^1 |m, s + \frac{1}{2}, s'_3\rangle + \sum_{s'_3} C_{s_3 s'_3}^2 |m, s - \frac{1}{2}, s'_3\rangle \quad (2.69)$$

Aus (2.62) ergibt sich im Ruhesystem

$$\{q_\alpha^i, \bar{q}_\beta^j\} = \delta^{ij} \delta_{\alpha\beta}; \quad \{q_\alpha^i, q_\beta^j\} = \{\bar{q}_\alpha^i, \bar{q}_\beta^j\} = 0 \quad (2.70)$$

mit $q_\alpha^i = \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_{\alpha i}$ und $\bar{q}_\beta^j = \frac{1}{\sqrt{2m}} \bar{Q}_\beta^j$. Dies ist eine CLIFFORD-Algebra für $2N$ fermionische Freiheitsgrade. Die Darstellungen dieser Algebra sind charakterisiert durch ein Spin-Multiplett von Grundzuständen (CLIFFORD-Vakuum), $|m, s_0, s_3\rangle$ ($s_3 = -s_0, \dots, s_0$), für das $q_\alpha^i |m, s_0, s_3\rangle = 0$ gilt. Alle anderen Zustände erhält man durch sukzessives Anwenden von \bar{q}_α^i auf den Vakuumzustand. Der Zustand mit dem höchsten Spin ist deshalb $\bar{q}_1^1 \dots \bar{q}_1^N |m, s_0, s_3\rangle$. Da die Paare $\bar{q}_1^i q_2^i$ den Spin 0 tragen, wird durch das Anwenden von \bar{q}_2^i der Spin wieder herabgesetzt. Der maximale Spin ist deshalb $s_0 + \frac{N}{2}$, und der niedrigste Spin ist 0, wenn $\frac{N}{2} \geq s_0$ gilt, oder $s_0 - \frac{N}{2}$. Als Beispiel kann man $N = 1$ mit $s_0 = 0$ betrachten. Dann existieren vier Zustände: $|m, 0, 0\rangle$ (mit Spin 0); $\bar{q}_1^1 |m, 0, 0\rangle$ und $\bar{q}_2^1 |m, 0, 0\rangle$ (mit Spin $\frac{1}{2}$); $\bar{q}_1^1 \bar{q}_2^1 |m, 0, 0\rangle$ (mit Spin 0). Dies ist das sogenannte WESS-ZUMINO-Multiplett. Schon für $N = 2$ enthält das Multiplett (massive) Zustände mit Spin 1.

Für masselose Teilchen kann man das Inertialsystem immer so wählen, daß $P_\mu = (E, 0, 0, E)$. Die Helizität ist gegeben durch $\frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{P}}{E}$ ($\mathbf{L} \cdot \mathbf{P} = W_0$). Die Gleichung (2.58) ($Z_{ij} = 0$) zeigt, daß durch die Superladungen die Helizität um $\frac{1}{2}$ erhöht bzw. gesenkt wird. Aus (2.59) ergibt sich:

$$\{Q_{1i}, \bar{Q}_1^j\} = 4\delta_i^j E, \quad (2.71)$$

und alle anderen Antikommutatoren der Superladungen sind Null. Durch Reskalierung $q^i = \frac{1}{\sqrt{4E}} Q_{1i}$ ($\bar{q}^j = \frac{1}{\sqrt{4E}} \bar{Q}_1^j$) erhält man daraus eine CLIFFORD-Algebra für N fermionische Freiheitsgrade. Das CLIFFORD-Vakuum $|E, \lambda_0\rangle$ habe die Helizität λ_0 . Durch wiederholtes Anwenden der Operatoren ergeben sich Zustände mit den Helizitäten $\lambda_0 + \frac{1}{2}, \lambda_0 + 1, \dots, \lambda_0 + \frac{N}{2}$. Die Anzahl der jeweiligen Zustände ist $\binom{N}{0}, \binom{N}{1}, \dots, \binom{N}{N}$.

Es ergibt sich daraus der Feldinhalt möglicher supersymmetrischer Modelle. Dabei ist darauf zu achten, daß positive und negative Helizitäten gleich oft auftreten. Dies erfordert die Symmetrie bezüglich PCT-Konjugation. Bei $N = 1$ und $\lambda_0 = 0$ zum Beispiel muß man das Multiplett $0, \frac{1}{2}$ durch das Multiplett $-\frac{1}{2}, 0$ ergänzen und erhält damit als kleinstes supersymmetrisches Multiplett das des masselosen WESS-ZUMINO-Modells $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (Anzahl der Zustände 1, 2, 1).

Für die Quantentheorie sind Darstellungen auf Feldoperatoren von Bedeutung. Die Transformationen (auf dem Niveau infinitesimaler Transformationen) der Feldoperatoren werden durch die Kommutatoren der Generatoren mit den Feldoperatoren bestimmt. So gilt zum

2 Supersymmetrie

Beispiel für die Feldoperatoren $\phi(x+y) = e^{iy \cdot P} \phi(x) e^{-iy \cdot P}$, was zum Ausdruck gebracht wird durch $[\phi, P_\mu] = i\partial_\mu \phi$.

Man erhält ein vollständiges Multipllett von Feldern, daß unter Supersymmetrietransformation bis auf Ableitungen wieder in sich selbst übergeht. Analog zu dem Vorgehen bei der Darstellung der CLIFFORD-Algebra definieren wir einen Feldoperator $\mathfrak{A}(x)$, für den die Bedingung $[\mathfrak{A}, \bar{Q}_\alpha^i] = 0$ gelten soll. Anhand der JACOBI-Identität

$$\{[\mathfrak{A}, Q], \bar{Q}\} + \{[\mathfrak{A}, \bar{Q}], Q\} = [\mathfrak{A}, \{Q, \bar{Q}\}] = 2i\sigma^\mu \partial_\mu \mathfrak{A} \quad (2.72)$$

sieht man, daß das Feld $\mathfrak{A}(x)$ komplex sein muß, da sonst $[\mathfrak{A}, Q] = 0$, $[\mathfrak{A}, \bar{Q}] = 0$ und damit $\partial_\mu \mathfrak{A} = 0$ gilt. Für die restlichen Kommutatoren führt man neue Felder ein:

$$[\mathfrak{A}, Q_\alpha] = 2iv_\alpha ; \{v_\alpha, Q_\beta\} = -i\mathfrak{F}_{\alpha\beta} ; \{v_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = X_{\alpha\dot{\beta}}. \quad (2.73)$$

Die JACOBI-Identitäten für $[\mathfrak{A}, \{Q, Q\}]$ und $[\mathfrak{A}, \{\bar{Q}, Q\}]$ ergeben:

$$2iX_{\alpha\dot{\beta}} = 2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \mathfrak{A} \text{ und } 2(\mathfrak{F}_{\alpha\beta} + \mathfrak{F}_{\beta\alpha}) = 0. \quad (2.74)$$

Man kann deshalb $\mathfrak{F}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} \mathfrak{F}$ (\mathfrak{F} komplexes Feld) setzen. Aus den JACOBI-Identitäten für v erhält man:

$$[\mathfrak{F}, Q_\alpha] = 0 \text{ und } [\mathfrak{F}, \bar{Q}_\alpha] = 2\partial_\mu v^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}. \quad (2.75)$$

Die infinitesimalen Supersymmetrietransformationen kann man mit Hilfe antikommutierender Spinor-Parameter ζ^α wie folgt definieren:

$$\delta_\zeta \phi = -i [\phi, \zeta Q + \bar{Q} \bar{\zeta}] \quad (2.76)$$

Damit ist:

$$\delta_\zeta \mathfrak{A} = 2\zeta v \quad (2.77)$$

$$\delta_\zeta v = -\zeta \mathfrak{F} - i\partial_\mu \mathfrak{A} \sigma^\mu \bar{\zeta} \quad (2.78)$$

$$\delta_\zeta \mathfrak{F} = -2i\partial_\mu v \sigma^\mu \bar{\zeta}, \quad (2.79)$$

und der Kommutator zweier Supersymmetrietransformationen:

$$[\delta_1, \delta_2] \phi = 2i(\zeta_1 \sigma^\mu \bar{\zeta}_2 - \zeta_2 \sigma^\mu \bar{\zeta}_1) \partial_\mu \phi. \quad (2.80)$$

Die Algebra schließt also bis auf eine totale Ableitung. Dies ist also eine Darstellung mit einem zweikomponentigen komplexen Spinor und zwei komplexen Skalarfeldern. Diese Darstellung reicht jedoch, wie oben erwähnt, nicht aus, um ein Modell zu erhalten, das unter PCT-Konjugation symmetrisch ist. Man muß noch ein weiteres Multipllett von Feldern hinzufügen. Von dem niedrigsten Zustand fordert man hier $[\mathfrak{A}^\dagger, Q_\alpha] = 0$. Dies entspricht dem Konjugierten der vorherigen Bedingung. Das entstehende Multipllett wird im nächsten Kapitel noch genauer behandelt.

Auch mit den vierkomponentigen Relationen (2.66) kann man auf diese Weise Darstellungen finden. Für das entstehende Multipllett gelten dann die Transformationen:

$$\delta \hat{A} = \bar{\zeta} \psi ; \delta B = \bar{\zeta} \gamma_5 \psi \quad (2.81)$$

$$\delta \psi = -(F + \gamma_5 G) \zeta - i\hat{\not{D}}(\hat{A} + \gamma_5 B) \zeta \quad (2.82)$$

$$\delta F = i\bar{\zeta} \hat{\not{D}} \psi ; \delta G = i\bar{\zeta} \gamma_5 \hat{\not{D}} \psi. \quad (2.83)$$

ψ ist hier ein vierkomponentiger MAJORANA-Spinor, da die Superladungen auch die MAJORANA-Bedingung erfüllen. Weiterhin gibt es vier reelle Skalarfelder. Es gibt damit genau so viele Freiheitsgrade für Bosonen wie für Fermionen, und der Feldinhalt entspricht genau dem oben konstruierten WESS-ZUMINO-Multipllett. Einfacher ist es jedoch, einen anderen Weg zur Konstruktion der Darstellungen zu verwenden, den Superraumformalismus.

2.7 Superraumformalismus

In diesem Kapitel wird der Superraumformalismus als eine einfachere Methode zur Konstruktion von Multipletts und einer invarianten Wirkung eingeführt. Etwas ausführlichere Rechnungen zu diesem Kapitel finden sich im Anhang B. Um zum Superraum zu gelangen, ergänzt man den vierdimensionalen Raum (Koordinaten x^μ) durch antikommutierende Koordinaten (θ^α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$) und betrachtet Felder $\Phi(x, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ auf diesem erweiterten Raum. Die Superladungen werden als Transformationen dieser Felder dargestellt. Dabei ist die Grundidee, analog zur MINKOWSKI-Raum-Zeit vorzugehen. In der MINKOWSKI-Raum-Zeit sind die Impulsoperatoren als Ableitungen nach den Koordinaten dargestellt $P_\mu \rightarrow -i\partial_\mu$. Da die Superladungen aber die Relationen der Algebra erfüllen müssen, können sie nicht einfach als Translationsoperatoren im Superraum $\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ dargestellt werden. Um diese Überlegungen noch etwas präziser zu formulieren, werden wir uns mit der Struktur der Raum-Zeit etwas näher befassen.

Die MINKOWSKI-Raum-Zeit kann als der Quotientenraum der POINCARÉ-Gruppe faktorisiert durch die LORENTZ-Gruppe aufgefaßt werden. Eine Gruppe (G) kann man in Äquivalenzklassen (Nebenklassen) aufteilen, indem man zwei Elemente dann als zueinander äquivalent betrachtet, wenn sie durch die Multiplikation mit einem Element einer Untergruppe (H) ineinander überführt werden können. Die Menge aller dieser Äquivalenzklassen ist der Quotientenraum (G/H) der Gruppe. Die Nebenklassen lassen sich durch eine Menge von Gruppenelementen ($L(x)$, x sind $\dim(G/H)$ Parameter) parametrisieren, wenn immer genau ein Element $L(x)$ in einer Nebenklasse liegt. Jedes Element der Gruppe läßt sich damit als $g = L(x) \circ h$ ($g \in G$ und $h \in H$) darstellen. Bei der MINKOWSKI-Raum-Zeit ist G die POINCARÉ-Gruppe. Die Untergruppe H ist die LORENTZ-Gruppe, und die Äquivalenzklassen werden durch die Gruppe der Translationen parametrisiert:

$$L(x) = e^{ix^\mu P_\mu} ; h(\omega) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}. \quad (2.84)$$

(Es gilt $L(x)L(y) = L(x+y)$.) Betrachtet man die infinitesimalen Transformationen (verwende (2.6)) oder geht man von der Relation $(\Lambda, 0)(\mathbb{1}, x)(\Lambda^{-1}, 0) = (\mathbb{1}, \Lambda^{-1}x)$ aus, so läßt sich folgendes zeigen

$$h(\omega)L(x)h^{-1}(\omega) = L((e^{-\omega})^\mu{}_\nu x^\nu). \quad (2.85)$$

Die Symmetriegruppe wird auf Feldern ($S(x)$) dargestellt. ($U(x)$ und $U(\omega)$ sind die Darstellungen von $L(x)$ und $h(\omega)$.)

$$S(x+a) = U(a)S(x)U^{-1}(a) \quad (2.86)$$

Damit gilt für die Darstellung der LORENTZ-Transformationen

$$\begin{aligned} U(\omega)S(x)U^{-1}(\omega) &= U((e^{-\omega})^\mu{}_\nu x^\nu)U(\omega)S(0)U^{-1}(\omega)U^{-1}((e^{-\omega})^\mu{}_\nu x^\nu) \\ &= e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu}} S((e^{-\omega})^\mu{}_\nu x^\nu), \end{aligned} \quad (2.87)$$

2 Supersymmetrie

denn $S(0)$ transformiert in einer bestimmten Darstellung der LORENTZ-Gruppe (skalare Felder ($\Omega = 0$), Vektorfelder ($\Omega = \Lambda$) oder Spinoren ($\Omega = \Sigma$)). Zu einer anderen Darstellung der Translationen und LORENTZ-Transformationen als $U(x)$ und $U(\omega)$ gelangt man durch:

$$U(x)S(0)U^{-1}(x) = S(x) \equiv e^{ix^\mu r(P_\mu)}S(0) \quad (2.88)$$

$$U(\omega)S(x)U^{-1}(\omega) \equiv e^{i\omega_{\mu\nu}r(M^{\mu\nu})}S(x), \quad (2.89)$$

oder infinitesimal

$$\delta_a S = -i[S, aP] = ia^\mu r(P_\mu)S \quad (2.90)$$

$$\delta_\omega S = -\frac{i}{2}[S, \omega M] = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}r(M_{\mu\nu})S. \quad (2.91)$$

Als Lösung findet man:

$$r(P_\mu) = i\partial_\mu ; r(M_{\mu\nu}) = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \Omega_{\mu\nu}. \quad (2.92)$$

Analog soll der Superraum ein Quotientenraum der Super-POINCARÉ-Gruppe und der LORENTZ-Gruppe sein. Die Nebenklassen werden parametrisiert durch:

$$L(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp(ix_\mu P^\mu + i\theta^\alpha Q_\alpha + i\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}). \quad (2.93)$$

Mit Hilfe der BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-Formel² und den Relationen der Algebra ((2.58)-(2.64)) zeigt man:

$$L(y, \zeta, \bar{\zeta})L(x, \theta, \bar{\theta}) = L(x', \theta', \bar{\theta}') \quad (2.94)$$

mit

$$x'^\mu = x^\mu + y^\mu + i\zeta\sigma^\mu\bar{\theta} - i\theta\sigma^\mu\bar{\zeta} \quad (2.95)$$

$$\theta' = \theta + \zeta ; \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\zeta}. \quad (2.96)$$

Jetzt betrachtet man wieder die infinitesimalen Transformationen und nutzt dabei (2.59) und erhält:

$$L(\omega)L(x, \theta, \bar{\theta})L(\omega)^{-1} = L(x'', \theta'', \bar{\theta}'') \quad (2.97)$$

mit

$$x''^\mu = (e^{-\omega})^\mu_\nu x^\nu \quad (2.98)$$

$$\theta'' = \theta e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} ; \bar{\theta}'' = e^{\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}\bar{\theta}. \quad (2.99)$$

Eine Darstellung der Symmetriegruppe auf Funktionen der Parameter x, θ und $\bar{\theta}$ erhält man analog zum oben betrachteten Fall:

$$U(a, \zeta, \bar{\zeta})S(x, \theta, \bar{\theta})U^{-1}(a, \zeta, \bar{\zeta}) = S(x', \theta', \bar{\theta}') \quad (2.100)$$

$$U(\omega)S(x, \theta, \bar{\theta})U^{-1}(\omega) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu}}S(x'', \theta'', \bar{\theta}''). \quad (2.101)$$

Betrachtet man nun wieder die infinitesimale Form dieser Gleichungen, so erhält man außer den bekannten Gleichungen für $r(P_\mu)$ und $r(M_{\mu\nu})$ Relationen für eine Darstellung der Superladungen:

$$\delta_\zeta S = -i[S, \zeta Q] = -i\zeta^\alpha r(Q_\alpha)S \quad (2.102)$$

$$\delta_{\bar{\zeta}} S = -i[S, \bar{\zeta}\bar{Q}] = i\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} r(\bar{Q}_{\dot{\alpha}})S \quad (2.103)$$

²Hier $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$, denn die Entwicklung bricht schon nach dem zweiten Glied ab.

2 Supersymmetrie

Die Generatoren der Super-POINCARÉ-Algebra werden auf den Feldern im Superraum dargestellt als:

$$r(P_\mu) = i\partial_\mu \quad (2.104)$$

$$r(M_{\mu\nu}) = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) - \frac{1}{2}\theta(\sigma_{\mu\nu})\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\bar{\theta}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + \Omega_{\mu\nu} \quad (2.105)$$

$$\mathcal{Q}_\alpha \equiv r(Q_\alpha) = i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu \quad (2.106)$$

$$\bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}} \equiv r(\bar{Q}_{\dot{\alpha}}) = -i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + \theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu. \quad (2.107)$$

Deshalb gilt:

$$\{\mathcal{Q}_\alpha, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\beta}}\} = 2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}r(P_\mu), \quad (2.108)$$

und die Gleichung (2.62) ist erfüllt. Die Wirkung der Superladungen ist in dieser Darstellung gleich der Anwendung der Operatoren auf ein beliebiges Feld (Funktion der Koordinaten x^μ , θ^α und $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$). Die Viererschreibweise kann man verwenden, um die Q_α und die $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ zusammenzufassen

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_\alpha \\ \bar{\mathcal{Q}}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = i\gamma_5 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \end{pmatrix} - \gamma^\mu\theta\partial_\mu, \quad (2.109)$$

wobei auch der Parameter θ ein vierkomponentiger MAJORANA-Spinor ist.

Eine Entwicklung von S in den fermionischen Parametern θ_α und $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ bricht ab, da es sich um antikommutierende Größen handelt. Deswegen ist ein allgemeines S

$$\begin{aligned} S(x, \theta, \bar{\theta}) = & C - i\theta\chi + i\bar{\chi}\bar{\theta} - \frac{1}{2}i\theta^2(M - iN) + \frac{1}{2}i\bar{\theta}^2(M + iN) - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu \\ & + i\bar{\theta}^2\theta(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}) - i\theta^2\bar{\theta}(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi) - \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2(D + \frac{1}{2}\square C). \end{aligned} \quad (2.110)$$

(Die Form dieser Entwicklung erscheint im Augenblick vielleicht etwas willkürlich, wenn zum Beispiel $D + \frac{1}{2}\square C$ statt ein einzelnes Feld D als Koeffizient gewählt wird, aber sie erleichtert spätere Rechnungen. Auch was diese Konventionen angeht, existieren in der Literatur verschiedene Varianten.) Die Koeffizienten sind vier komplexe Skalarfelder ($C(x)$, $M(x)$, $N(x)$ und $D(x)$), ein komplexes Vektorfeld ($A_\mu(x)$), zwei Spinoren in der $(\frac{1}{2}, 0)$ Darstellung ($\chi(x)$ und $\lambda(x)$) und zwei Spinoren in der $(0, \frac{1}{2})$ Darstellung ($\bar{\chi}(x)$ und $\bar{\lambda}(x)$). Also gibt es 16 bosonische und 16 fermionische Feldkomponenten. Die Komponenten dieses allgemeinen Superfeldes stellen das sogenannte allgemeine (engl. general) Multiplett dar. In Viererschreibweise erhält man

$$\begin{aligned} S(x, \theta) = & C + i\bar{\theta}\gamma_5\chi - \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta N + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma_5\theta M + \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta A_\mu \\ & + i(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\bar{\theta}(\lambda - \frac{i}{2}\not{\partial}\chi) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)(\bar{\theta}\gamma_5\theta)(D + \frac{1}{2}\square C). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Die Transformationen eines Superfeldes erhält man durch Anwenden von $\bar{\zeta}\mathcal{Q} = \zeta^\alpha\mathcal{Q}_\alpha + \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}}\zeta^{\dot{\alpha}}$ aus (2.106) und (2.107) auf das Superfeld ($\delta S = \delta_\zeta S + \delta_{\bar{\zeta}} S$). Die Transformationen der Komponenten lassen sich dann aus denen des Feldes S ablesen. Man zerlegt dazu das transformierte Feld in seine Komponenten und erhält daraus die transformierten Komponenten

2 Supersymmetrie

($\delta S = \delta C - i\theta\delta\chi + \dots$). Die Transformationen der Komponenten sind

$$\begin{aligned}
\delta C &= i\bar{\zeta}\gamma_5\chi \\
\delta\chi &= (M + i\gamma_5 N)\zeta - i\gamma^\mu\zeta A_\mu - \gamma_5\gamma^\mu\zeta\partial_\mu C \\
\delta A_\mu &= -\bar{\zeta}\partial_\mu\bar{\chi} + i\bar{\zeta}\gamma_\mu\lambda \\
\delta M &= \bar{\zeta}\lambda - i\bar{\zeta}\gamma_\mu\partial^\mu\chi \\
\delta N &= i\bar{\zeta}\gamma_5\lambda + \bar{\zeta}\gamma_5\gamma_\mu\partial^\mu\chi \\
\delta\lambda &= -i\gamma_5\zeta D + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\zeta\partial_\mu A_\nu \\
\delta D &= -\bar{\zeta}\gamma_5\gamma_\mu\partial^\mu\lambda.
\end{aligned} \tag{2.112}$$

Man sieht daran, daß der D -Term in eine totale Ableitung transformiert, also für eine LAGRANGE-Dichte, die zu einer invarianten Wirkung führt, geeignet ist.

Auch ein Produkt von Superfeldern ($S = S_1 S_2$) ist ein Superfeld, da es auf die gleiche Weise transformiert

$$\delta S = [\bar{\zeta}Q, S_1 S_2] = (\bar{\zeta}Q S_1)S_2 + S_1(\bar{\zeta}Q S_2) = \bar{\zeta}Q S. \tag{2.113}$$

Deshalb ist auch jede Potenz von Superfeldern wieder ein Superfeld. In Komponenten geschrieben bedeutet $S_3 = S_1 S_2$

$$C_3 = C_1 C_2 \tag{2.114}$$

$$\chi_3 = C_1 \chi_2 + \chi_1 C_2 \tag{2.115}$$

$$M_3 = C_1 M_2 + M_1 C_2 - \frac{1}{2}\bar{\chi}_1 \gamma_5 \chi_2 \tag{2.116}$$

$$N_3 = C_1 N_2 + N_1 C_2 - \frac{1}{2}\bar{\chi}_1 \chi_2 \tag{2.117}$$

$$A_3^\mu = C_1 A_2^\mu + A_1^\mu C_2 + \frac{1}{2}i\bar{\chi}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \chi_2 \tag{2.118}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= C_1 \lambda_2 + \frac{1}{2}(N_1 + \gamma_5 M_1 + i\cancel{\not{A}}_1 C_1 - i\cancel{\not{A}}_1 \gamma_5)\chi_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(N_2 + \gamma_5 M_2 + i\cancel{\not{A}}_2 C_2 - i\cancel{\not{A}}_2 \gamma_5)\chi_1
\end{aligned} \tag{2.119}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= C_1 D_2 + D_1 C_2 - M_1 M_2 - N_1 N_2 - \partial_\mu C_1 \partial^\mu C_2 - A_{1\mu} A_2^\mu + \bar{\lambda}_1 \chi_2 + \bar{\chi}_1 \lambda_2 \\
&\quad - \frac{1}{2}i(\bar{\chi}_1 \cancel{\not{A}}_1 \chi_2 + (\partial^\mu \bar{\chi}_1)\gamma_\mu \chi_2).
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Mit der gleichen Argumentation kann man zeigen, daß auch Linearkombinationen, komplexe Konjugationen und räumliche Ableitungen von Superfeldern wieder Superfelder sind.

Ableitungen von Superfeldern nach den fermionischen Koordinaten θ sind keine Superfelder. Wir definieren deshalb folgende Ableitung

$$D_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha\partial_\mu \tag{2.121}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \equiv -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu \tag{2.122}$$

$$D \equiv \begin{pmatrix} D_\alpha \\ \bar{D}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \end{pmatrix} - i(\gamma^\mu\theta)\partial_\mu, \tag{2.123}$$

die die Vertauschungsregeln

$$\{D_\alpha, \mathcal{Q}_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{Q}_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (2.124)$$

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (2.125)$$

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu \text{ d.h. } \{D_a, D_b\} = 2\gamma_{ab}^\mu\partial_\mu \quad (2.126)$$

erfüllt. Durch die Anwendung dieser Ableitung auf ein Superfeld erhält man ein neues Superfeld, da (in Viererschreibweise)

$$\delta(D_a S) = -i[\bar{\zeta}Q, D_a S] = -iD_a[\bar{\zeta}Q, S] = D_a\bar{\zeta}QS = \bar{\zeta}QD_a S. \quad (2.127)$$

Ein allgemeines Superfeld ist keine irreduzible Darstellung der Supersymmetrie, denn in Abschnitt 2.6 haben wir Darstellungen mit einem kleineren Feldinhalt gefunden. Weiterhin ist es wahrscheinlich ein D -Term eines Produktes von Superfeldern, aus dem eine LAGRANGE-Dichte für eine supersymmetrische Wirkung konstruiert wird. Der D -Term eines solchen Produktes (2.120) enthält Terme, die wie kinetische Terme einer LAGRANGE-Dichte aussehen. Die Terme, die λ und D enthalten, sorgen jedoch im Pfadintegral dafür, daß die Felder C und χ verschwinden. Man kann also kein allgemeines Superfeld zur Konstruktion einer LAGRANGE-Dichte verwenden. Dies legt die Zwangsbedingung $D = \lambda = 0$ nahe. Die Transformationen (2.112) zeigen, daß diese Bedingungen nur dann mit den Supersymmetrietransformationen vereinbar sind, wenn $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0$ gilt. Der Feldinhalt eines solchen Multipletts ist damit C , χ , M , N und ein Feld Z mit $A_\mu = \partial_\mu Z$. Diese Überlegungen führen auf das sogenannte chirale Multiplett Ω . Äquivalent zu diesen Bedingungen ist

$$\Omega = \frac{1}{4}\bar{D}DS = \frac{1}{4}D_\alpha D^\alpha S + \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}S \equiv \bar{\Phi} + \Phi. \quad (2.128)$$

Das chirale Multiplett kann also noch weiter aufgespalten werden in ein links-chirales Multiplett Φ (auch chiral genannt) und ein rechts-chirales Multiplett $\bar{\Phi}$ (auch anti-chiral genannt). Diese beiden Multipletts sind definiert durch

$$D_\alpha\bar{\Phi} = 0 \quad (2.129)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad (2.130)$$

(Da es nur je zwei unabhängige D_α und $D_{\dot{\alpha}}$ gibt, die antikommutieren, sieht man leicht, daß diese Bedingung bis auf Normierung äquivalent ist zu der Definition in (2.128).) Daraus ergibt sich, daß Φ links-chiral ist, wenn $\bar{\Phi}$ rechts-chiral ist. Anhand der Vertauschungsrelationen der Ableitung D (2.126) ergibt sich außerdem, daß nur ein konstantes Feld ($\partial_\mu\Phi = 0$) gleichzeitig links-chiral und rechts-chiral sein kann.

Es ist klar, daß dies nicht die einzige Möglichkeit ist, das allgemeine Multiplett einzuschränken. Man kann auch $N = M = \partial_\mu A^\mu = 0$, $\lambda = i\not{\partial}\chi$ und $D = -\square C$ fordern, ohne die Supersymmetrie zu verletzen. Andere Multipletts werden auch in der supersymmetrischen Eichtheorie verwendet. Ein kleineres reelles Multiplett kann man durch die Bedingung $S^\dagger = S$ erhalten. Wird diese Bedingung von einem links- oder rechts-chiralen Multiplett gefordert, erhält man jedoch nur ein konstantes Feld ($\Phi = \bar{\Phi}$).

Die Bedingungen (2.129) und (2.130) haben als Lösung

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp(-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu)\Phi(x, \theta) \text{ und } \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp(i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu)\bar{\Phi}(x, \bar{\theta}). \quad (2.131)$$

2 Supersymmetrie

Dies entspricht aber nur einer Verschiebung der x^μ Koordinate um $\pm i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$. Mit neuen Koordinaten $y_{1/2}^\mu = x^\mu \pm i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ (chirale Koordinaten) kann man Φ also wie folgt entwickeln

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi(y_2(x, \theta, \bar{\theta}), \theta) = \mathfrak{A}(y_2) + 2\theta v(y_2) - \theta^2 \mathfrak{F}(y_2) \quad (2.132)$$

$$\bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi(y_1(x, \theta, \bar{\theta}), \theta) = \mathfrak{A}^\dagger(y_1) + 2\bar{\theta}\bar{v}(y_1) - \bar{\theta}^2 \bar{\mathfrak{F}}^\dagger(y_1). \quad (2.133)$$

(Diese Art der Entwicklung ergibt sich auch aus $D_\alpha\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = 0$, $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^\beta = 0$, $D_\alpha y_1^\mu = 0$ und $\bar{D}_{\dot{\alpha}} y_2^\mu = 0$.) Man gelangt leicht zu der Entwicklung in den ursprünglichen Koordinaten zurück

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \mathfrak{A}(x) + 2\theta v(x) - \theta^2 \mathfrak{F}(x) \\ &\quad - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu \mathfrak{A}(x) - i\theta^2\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu v(x) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box \mathfrak{A}(x) \end{aligned} \quad (2.134)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) &= \mathfrak{A}^\dagger(x) + 2\bar{\theta}\bar{v}(x) - \bar{\theta}^2 \bar{\mathfrak{F}}^\dagger(x) \\ &\quad + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu \mathfrak{A}^\dagger(x) - i\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu \bar{v} - \frac{1}{4}\bar{\theta}^2\theta^2\Box \mathfrak{A}^\dagger(x). \end{aligned} \quad (2.135)$$

Dies ist aber nicht notwendig, um die Transformationen der Komponenten auszurechnen, da auch die Superladungen in diese Koordinaten umgerechnet werden können ($Q_{\Phi\alpha}$ für y_2 und $Q_{\bar{\Phi}\dot{\alpha}}$ für y_1):

$$\begin{aligned} Q_{\Phi\alpha} &= i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} & Q_{\bar{\Phi}\dot{\alpha}} &= i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - 2(\sigma^\mu\bar{\theta})_{\dot{\alpha}}\partial_\mu \\ Q_{\Phi\dot{\alpha}} &= -i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + 2(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu & Q_{\bar{\Phi}\alpha} &= -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

(Natürlich ist ∂_μ hier $\frac{\partial}{\partial y_1}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial y_2}$.) Daraus ergeben sich die Transformationen der Komponenten:

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{A} &= 2\zeta v & \delta\mathfrak{A}^\dagger &= 2\bar{\zeta}\bar{v} \\ \delta v &= -\zeta\bar{\mathfrak{F}} - i\sigma^\mu\bar{\zeta}\partial_\mu \mathfrak{A} & \delta\bar{v} &= -\bar{\zeta}\mathfrak{F}^\dagger - i\tilde{\sigma}^\mu\zeta\partial_\mu \mathfrak{A}^\dagger \\ \delta\mathfrak{F} &= -i2\partial_\mu v\sigma^\mu\bar{\zeta} & \delta\mathfrak{F}^\dagger &= i2\zeta\sigma^\mu\partial_\mu \bar{v}. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß aus der Multiplikation von zwei links-chiralen (bzw. rechts-chiralen) Multipletts wieder ein links-chirales (bzw. rechts-chirales) Multiplett entsteht.

Um eine Wirkung zu konstruieren, die invariant unter den Supersymmetrietransformationen ist, benötigt man eine LAGRANGE-Dichte, die entweder selbst schon invariant ist oder unter den Transformationen in eine totale Ableitung übergeht. Als invariante LAGRANGE-Dichte kämen nur konstante Terme in Betracht, da der Antikommutator zweier Superladungen eine Ableitung ist. Also verwendet man Terme, deren Transformation eine totale Ableitung ist. Wie oben schon erwähnt ist der D -Term eines allgemeinen Multipletts dazu geeignet. Aber auch der \mathfrak{F} -Term eines links- oder rechts-chiralen Multipletts transformiert bis auf eine totale Ableitung wieder in sich selbst. Der Ansatz für eine allgemeine invariante Wirkung lautet deshalb

$$I = \int d^4x f|_{\mathfrak{F}} + \int d^4x f^\dagger|_{\mathfrak{F}^\dagger} - \int d^4x K|_D. \quad (2.138)$$

f ist hierbei ein links-chirales und K ein allgemeines reelles Multiplett. In f können keine Superableitungen von chiralen Superfeldern vorkommen, da eine Superableitung eines chiralen Superfeldes nicht mehr chiral ist. K hängt sowohl von links-chiralen Superfeldern Φ als auch von ihrem Konjugierten, den rechts-chiralen Superfeldern, ab. Chirale Anteile in K tragen nicht zum D -Term bei. Auch Superableitungen von einem beliebigen Superfeld liefern nur eine totale Ableitung zum D -Term. Deswegen gelten Multipletts K als äquivalent, wenn sie sich nur durch solche Terme unterscheiden. K wird als KÄHLER-Potential bezeichnet.

2 Supersymmetrie

Aus skalaren chiralen Superfeldern soll jetzt eine invariante Wirkung konstruiert werden, von der wir zusätzlich verlangen, daß sie renormierbar ist. Das bedeutet, die (Massen-) Dimension von Termen der LAGRANGE-Dichte darf höchstens vier sein. Aus den Antikommutatorrelationen der Superladungen (2.62) erkennt man, daß die Superladungen und damit auch die Superableitungen und die Ableitungen nach den fermionischen Koordinaten die Dimension $\frac{1}{2}$ haben müssen. Das bedeutet, die fermionischen Koordinaten tragen die Dimension $-\frac{1}{2}$. Damit hat ein \mathfrak{F} -Term die Dimension $d + 1$ und ein D -Term die Dimension $d + 2$, wenn d die Dimension des Multipletts Φ beziehungsweise die von S ist. Also sollte f maximal die Dimension drei und K maximal zwei haben. Ein chirales skalares Superfeld Φ hat die Dimension eins. f besteht also aus Monomen mit maximal drei Feldern Φ , Ableitungen ∂_μ oder Paaren von Superableitungen. Jedoch tauchen Terme mit Ableitungen in f nicht auf, denn sie sind entweder totale Ableitungen (zwei Ableitungen von einem Feld Φ), oder sie brechen die LORENTZ-Invarianz ($\Phi\partial_\mu\Phi$). Superableitungen kommen aus den oben genannten Gründen nicht vor. f ist also ein maximal kubisches Polynom von chiralen Superfeldern. Ein solches f heißt Superpotential.

Man sieht mit den gleichen Beobachtungen leicht, daß K maximal ein quadratisches Polynom von links- oder rechts-chiralen Superfeldern ist. Damit der D -Term von K nicht verschwindet, muß K sowohl links- als auch rechts-chirale Superfelder enthalten. Damit ergibt sich K als

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = \sum_{mn} g_{mn} \bar{\Phi}_n \Phi_m. \quad (2.139)$$

(Durch geeignete Transformationen kann man g_{mn} diagonalisieren.) Wir werden hier aber nur ein einziges Superfeld Φ und das dazu konjugierte $\bar{\Phi}$ betrachten. Die LAGRANGE-Dichte ist damit

$$\mathcal{L} = f(\Phi)|_{\mathfrak{F}} + f(\bar{\Phi})|_{\mathfrak{F}^\dagger} - \bar{\Phi}\Phi|_D \quad (2.140)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}\mathfrak{A}\square\mathfrak{A}^\dagger - \frac{1}{2}\mathfrak{A}^\dagger\square\mathfrak{A} + \partial^\mu\mathfrak{A}\partial_\mu\mathfrak{A}^\dagger + 2\mathfrak{F}^\dagger\mathfrak{F} + 2iv\sigma^\mu\partial_\mu\bar{v} + 2i\bar{v}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu v \\ &\quad + 2\mathfrak{F}\frac{\partial f(\mathfrak{A})}{\partial\mathfrak{A}} + 2\mathfrak{F}^\dagger\frac{\partial f(\mathfrak{A}^\dagger)}{\partial\mathfrak{A}^\dagger} - 2v\bar{v}\frac{\partial^2 f(\mathfrak{A})}{\partial\mathfrak{A}^2} - 2\bar{v}v\frac{\partial^2 f(\mathfrak{A}^\dagger)}{\partial\mathfrak{A}^{\dagger 2}}. \end{aligned} \quad (2.141)$$

(Zwei LAGRANGE-Dichten gelten hier als gleich, wenn sie sich nur durch eine totale Ableitung nach den räumlichen Koordinaten unterscheiden.) Die Felder kann man umformen in

$$\mathfrak{A} = \frac{A-iB}{2} \quad ; \quad \mathfrak{F} = \frac{F+iG}{2} \quad ; \quad v = \frac{\psi}{2} \quad ; \quad \bar{v} = \frac{\bar{\psi}}{2}. \quad (2.142)$$

Das Potential habe das Minimum bei $\mathfrak{A} = 0$. (Gegebenenfalls kann man dies durch eine Verschiebung des Potentials erreichen.) Da f maximal eine kubische Funktion sein kann, wählt man $f(\mathfrak{A}) = C + \frac{m}{2}\mathfrak{A}^2 + \frac{2}{3}g\mathfrak{A}^3$. Man erhält das WESS-ZUMINO-Modell in 3+1 Dimensionen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu A\partial^\mu A + \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B + \frac{i}{2}\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{1}{2}(F^2 + G^2) \\ &\quad + F(mA + g(A^2 - B^2)) + G(mB + 2gAB) - \bar{\psi}\psi\left(\frac{m}{2} + gA\right) + igB\bar{\psi}\gamma_5\psi. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Es gibt auch noch andere Formulierungen für die LAGRANGE-Dichte im Superraum. Die im Anhang B eingeführte Integration im Superraum liefert von einer Funktion in fermionischen Koordinaten die Koeffizienten einer bestimmten Potenz dieser Koordinaten. Deshalb kann

man mit ihrer Hilfe den D -Term und den \mathfrak{F} -Term von Superfeldern abspalten

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta f(\Phi(x, \theta)) + \int d^2\bar{\theta} f(\bar{\Phi}(x, \bar{\theta})) + 2 \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi \bar{\Phi}. \quad (2.144)$$

Der D -Term von $\Phi \bar{\Phi}$ ist äquivalent zu einem \mathfrak{F} -Term von $\Phi \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{\Phi}$ (siehe Anhang). Deswegen ist eine weitere mögliche Formulierung des Ergebnisses

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta f(\Phi(x, \theta)) + \int d^2\bar{\theta} f(\bar{\Phi}(x, \bar{\theta})) + 2 \int d^2\theta \Phi \bar{D}^2 \bar{\Phi}. \quad (2.145)$$

2.8 Supersymmetrische Modelle

In dieser Arbeit soll es um grundsätzliche Anwendbarkeit eines Näherungsverfahrens auf supersymmetrische Modelle gehen. Zunächst sollen einfache Modelle verwendet werden. Wir betrachten hier hauptsächlich Modelle in niedrigen Dimensionen. Die Resultate sollten sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern lassen. Es ist bekannt, daß die Molekularfeldnäherung genauere Resultate liefert, je höher die Dimension ist. Da im letzten Kapitel schon die explizite Konstruktion von invarianten Termen behandelt wurde, soll deren Invarianz nicht noch einmal im Detail nachgewiesen werden.

2.8.1 Das Wess-Zumino-Modell in 3+1 Dimensionen

Die LAGRANGE-Dichte aus Gleichung (2.143),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_{\mu} A \partial^{\mu} A + \frac{1}{2} \partial_{\mu} B \partial^{\mu} B + \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{1}{2} (F^2 + G^2) \\ &\quad + m(FA + GB - \frac{1}{2} \bar{\psi} \psi) \\ &\quad + g(F(A^2 - B^2) + 2GAB - \bar{\psi}(A - i\gamma_5 B)\psi) \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_g, \end{aligned} \quad (2.146)$$

geht unter den Transformationen

$$\delta_{\zeta} A = \bar{\zeta} \psi ; \quad \delta_{\zeta} B = i \bar{\zeta} \gamma_5 \psi \quad (2.147)$$

$$\delta_{\zeta} \psi = -i \not{\partial} (A + i\gamma_5 B) \zeta + (F + i\gamma_5 G) \zeta \quad (2.148)$$

$$\delta_{\zeta} F = -i \bar{\zeta} \not{\partial} \psi ; \quad \delta_{\zeta} G = \bar{\zeta} \gamma_5 \not{\partial} \psi \quad (2.149)$$

bis auf die totale Ableitung

$$\delta_{\zeta} \mathcal{L} = \partial_{\mu} \bar{\zeta} \gamma^{\mu} \left(\frac{1}{2} \not{\partial} (A + i\gamma_5 B) - \frac{i}{2} (F - i\gamma_5 G) - im(A - i\gamma_5 B) - ig(A - i\gamma_5 B)^2 \right) \psi \quad (2.150)$$

wieder in sich selbst über. Die zugehörige Wirkung ist also unter den Transformationen invariant. Bei A handelt es sich um ein Skalarfeld, bei B um ein Pseudoskalarfeld. Zusammen mit F und G sind dies die vier bosonischen Felder. Die ψ sind vierkomponentige Spinoren. Deswegen ist die Anzahl von fermionischen und bosonischen Freiheitsgraden gleich.

Die Bewegungsgleichungen von F und G sind rein algebraische Gleichungen. Deswegen kann man die Bewegungsgleichungen verwenden, um diese Felder zu ersetzen. Diese Ersetzung muß

2 Supersymmetrie

natürlich auch in den Transformationen gemacht werden, damit die Wirkung weiterhin invariant ist. Da die Felder F und G in allen drei Termen der LAGRANGE-Dichte (2.146) auftauchen, führt danach nicht mehr jeder Term für sich auf eine invariante Wirkung. Außerdem sind die Transformationen im allgemeinen nicht mehr linear. Da man sie auf diese Weise ersetzen kann, bezeichnet man die Felder F und G auch als Hilfsfelder. Nach der Ersetzung erhält man folgende LAGRANGE-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\partial_\mu A\partial^\mu A + \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B - \frac{1}{2}m^2(A^2 + B^2) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \frac{1}{2}m\bar{\psi}\psi \\ & - mgA(A^2 + B^2) - \frac{1}{2}g^2(A^2 + B^2)^2 - g\bar{\psi}(A - i\gamma_5 B)\psi. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Dieses Modell beinhaltet kinetische Terme für die Fermionen und Bosonen und die bekannten Massen-Terme. Dabei ist die Masse von Fermionen und Bosonen gleich. Außerdem gibt es noch kubische und quartische Kopplungen der Bosonen und die YUKAWA-Kopplung zwischen den Feldern der Fermionen und denen der Bosonen.

Die LAGRANGE-Dichte geht jetzt unter den Transformationen

$$\delta_\zeta A = \bar{\zeta}\psi ; \delta_\zeta B = i\bar{\zeta}\gamma_5\psi \quad (2.152)$$

$$\delta_\zeta\psi = -(i\not{\partial} + m + g(A + i\gamma_5 B))(A + i\gamma_5 B)\zeta \quad (2.153)$$

wieder in sich selbst über bis auf die totale Ableitung

$$\delta_\zeta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\zeta}\gamma^\mu\not{\partial}(A + i\gamma_5 B)\psi. \quad (2.154)$$

Die Wirkung ist also invariant unter den neuen Transformationen. (2.146) bezeichnet man als off-shell LAGRANGE-Dichte und (2.151) als on-shell LAGRANGE-Dichte.

2.8.2 Das Wess-Zumino-Modell in 1+1 Dimensionen

Zweidimensionale Modelle werden häufig als eine Art Spielzeugmodell benutzt, an dem die grundlegenden Eigenschaften eines Modells betrachtet werden können. In zwei Dimensionen lassen sich nicht nur manche Rechnungen einfacher durchführen, vielmehr haben zweidimensionale Modelle oft interessante Eigenschaften, die Modelle in vier Dimensionen nicht aufweisen [33]. Im Falle der Supersymmetrie ist es unter anderem die Eigenschaft, daß auch in EUKLIDischen Signaturen MAJORANA-Fermionen existieren, die diese Modelle interessant macht.

Bei der Konstruktion verfährt man hier ganz analog zu der Vorgehensweise in vier Dimensionen. Als Darstellung der Gammamatrizen in zwei Dimensionen wählen wir die MAJORANA-Darstellung:

$$\gamma^0 = \sigma_2 ; \gamma^1 = i\sigma_1 \text{ und damit } \gamma_* = \sigma_3 ; \mathcal{C} = -\gamma^0. \quad (2.155)$$

Auch hier kann man wieder einen Superraum konstruieren, dessen Koordinaten neben den zwei räumlichen auch einen zweikomponentigen MAJORANA-Spinor θ als Koordinate beinhalten. Auf den Feldern in diesem Superraum wird die Superladung dargestellt als

$$\mathcal{Q}_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\gamma^\mu\theta)_\alpha\partial_\mu, \text{ d.h. } \{\mathcal{Q}_\alpha, \bar{\mathcal{Q}}^\beta\} = 2(\gamma^\mu)_\alpha{}^\beta P_\mu. \quad (2.156)$$

2 Supersymmetrie

(Die Indizes α und β numerieren hier die Einträge der zweikomponentigen Spinoren. Es gilt $\delta_\zeta \Phi = i\bar{\zeta} \mathcal{Q} \Phi$ und $\bar{\theta}^\beta = \theta_\alpha (\gamma_0)^\alpha_\beta$.) Zur Konstruktion des WESS-ZUMINO-Modells in 1 + 1 Dimensionen verwendet man ein reelles Superfeld:

$$\Phi(x, \theta) = A(x) + \bar{\theta} \psi(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta F(x). \quad (2.157)$$

Eine weitere Zwangsbedingung muß man hier nicht fordern.

Die Transformationen eines solchen Feldes (in Komponenten) sind:

$$\delta_\zeta A = \bar{\zeta} \psi ; \delta_\zeta \psi = (F + i\bar{\zeta} \not{\theta} A) \zeta ; \delta_\zeta \bar{\psi} = (F - i\bar{\zeta} \not{\theta} A) \bar{\zeta} ; \delta_\zeta F = i\bar{\zeta} \not{\theta} \psi. \quad (2.158)$$

Auch hier lassen sich Superableitungen konstruieren, die man zur Konstruktion invarianter Terme verwenden kann:

$$D = \frac{\partial}{\partial \theta} + i\gamma^\mu \theta \partial_\mu ; \bar{D} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i\bar{\theta} \gamma^\mu \partial_\mu. \quad (2.159)$$

Der F -Term eines Superfeldes (2.157) transformiert in eine totale Ableitung. Deswegen verwendet man diesen Term, um invariante Wirkungen zu konstruieren. Außer dem F -Term einer Funktion von Superfeldern $W(\Phi)$, die keine Ableitungen enthält, kann man hier noch einen Term $\bar{D}\Phi D\Phi$ hinzufügen. In vier Dimensionen sind solche Terme schon in dem D -Term von $\Phi\bar{\Phi}$ enthalten. Hier erhält man daraus den kinetischen Anteil der LAGRANGE-Dichte. Also ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int d\theta d\bar{\theta} \left(\frac{1}{2} \bar{D}\Phi D\Phi + W(\Phi) \right) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu A \partial^\mu A - \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{\theta} \psi + \frac{1}{2} F^2 + F W'(A) - \frac{1}{2} W''(A) \bar{\psi} \psi \end{aligned} \quad (2.160)$$

eine invariante LAGRANGE-Dichte. On-shell ergibt sich daraus

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial A)^2 - \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{\theta} \psi - \frac{1}{2} W'^2(A) - \frac{1}{2} W''(A) \bar{\psi} \psi. \quad (2.161)$$

Auch ein Modell mit EUKLIDISCHER Signatur läßt sich in 1 + 1 Dimensionen konstruieren. Man muß dabei jedoch von der üblichen Konstruktionsweise etwas abweichen. Der DIRAC-konjugierte Spinor ist in EUKLIDISCHEN Dimensionen als $\bar{\psi} = \psi^\dagger$ definiert. Für die Darstellung der Gammamatrizen soll

$$\gamma_0 = \sigma_1 ; \gamma_1 = \sigma_3 ; \mathcal{C} = \mathbb{1} ; \gamma_* = i\gamma_0 \gamma_1 = \sigma_2 \quad (2.162)$$

verwendet werden. Superladungen und Superableitungen sind jetzt definiert als:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\alpha &= -i \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu ; & \bar{\mathcal{Q}}^\alpha &= -i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} - (\bar{\theta} \gamma^\mu)^\alpha \partial_\mu \\ D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i(\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu ; & \bar{D}^\alpha &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} - i(\bar{\theta} \gamma^\mu)^\alpha \partial_\mu. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Das Hermitesche Superfeld Φ kann entwickelt werden in

$$\Phi(x, \theta) = A(x) + \bar{\theta} \gamma_* \psi(x) + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \gamma_* \theta) F(x). \quad (2.164)$$

2 Supersymmetrie

Da $\bar{D}\Phi D\Phi = 0$, muß man in diesem Falle eine etwas andere Konstruktion des kinetischen Terms verwenden. Die LAGRANGE-Dichte ergibt sich (wieder aus dem F -Term) als

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{\partial}{\partial(\bar{\theta}\gamma_*\theta)} \left(\frac{1}{2}\bar{D}\Phi\gamma_*D\Phi + W(\Phi) \right) \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu A\partial^\mu A + \frac{i}{2}\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \frac{1}{2}F^2 + FW'(A) - \frac{1}{2}W''(A)\bar{\psi}\psi,\end{aligned}\quad (2.165)$$

was zu der on-shell LAGRANGE-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial A)^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{1}{2}W'^2(A) + \frac{1}{2}W''(A)\bar{\psi}\gamma_*\psi \quad (2.166)$$

führt. Verwendet man die Off-Shell-Version der Wirkung, so ist ein Integral $\int dF \exp(-\int d^2x \mathcal{L})$ divergent durch den Term $-\frac{1}{2}F^2$. Diese Eigenschaft führt insbesondere bei Pfadintegralen zu Problemen. In dieser Arbeit soll das EUKLIDISCHE Modell verwendet werden.

Die Transformationen, unter denen die jeweiligen LAGRANGE-Dichten invariant sind, werden in folgender Tabelle zusammengestellt: (Die Transformationen für $\bar{\psi}$ ergeben sich aus denen von ψ und die On-Shell-Transformationen ergeben sich durch $F = -W'$.)

off – shell Minkowski	on – shell Minkowski	off – shell EUKLIDisch	on – shell EUKLIDisch
$\delta A = \bar{\zeta}\psi$	$\delta A = \bar{\zeta}\psi$	$\delta A = \bar{\zeta}\gamma_*\psi$	$\delta A = \bar{\zeta}\gamma_*\psi$
$\delta\psi = (F + i\not{\partial}A)\zeta$	$\delta\psi = (-W' + i\not{\partial}A)\zeta$	$\delta\psi = (F + i\gamma_*\not{\partial}A)\zeta$	$\delta\psi = (-W' + i\gamma_*\not{\partial}A)\zeta$
$\delta\bar{\psi} = \bar{\zeta}(F - i\not{\partial}A)$	$\delta\bar{\psi} = \bar{\zeta}(-W' - i\not{\partial}A)$	$\delta\bar{\psi} = \bar{\zeta}(F - i\not{\partial}A\gamma_*)$	$\delta\bar{\psi} = \bar{\zeta}(-W' - i\not{\partial}A\gamma_*)$
$\delta F = i\bar{\zeta}\not{\partial}\psi$	–	$\delta F = i\bar{\zeta}\not{\partial}\psi$	–

2.8.3 Supersymmetrie in 0+1 Dimensionen (supersymmetrische Quantenmechanik)

Die Quantenmechanik entspricht einer Feldtheorie in 0 + 1 Dimensionen. Auch für die Quantenmechanik existiert eine supersymmetrische Formulierung. In der supersymmetrischen Quantenmechanik haben Fermionen und Bosonen bis auf den untersten Energieeigenwert das gleiche Energieeigenwertspektrum, obwohl sie ein unterschiedliches Potential besitzen. Mit Hilfe dieser Eigenschaft lassen sich Klassen von Potentialen finden, die die gleiche Anordnung der Energieeigenwerte haben (forminvariante Potentiale). Auf die supersymmetrische Formulierung der Quantenmechanik soll hier aber nicht näher eingegangen werden. Hier geht es nur darum, eine Feldtheorie in 0 + 1 Dimensionen zu formulieren, da diese ein gutes Spielzeugmodell für kompliziertere Modelle darstellt.

Dazu soll das zweidimensionale Modell (mit $N=1$) durch eine dimensionale Reduktion auf ein eindimensionales Modell mit DIRAC-Fermionen (d.h. $N=2$) gebracht werden. Die Felder sollen nur noch von einer Koordinate abhängen ($A(x, t) \rightarrow A(t)$, $F(x, t) \rightarrow F(t)$). Damit sich durch die Integration kein unendlicher Faktor $V = \int dx$ ergibt, müssen die Felder normiert werden ($A(t) \rightarrow \frac{x(t)}{\sqrt{V}}$, $F(t) \rightarrow \frac{F(t)}{\sqrt{V}}$). Dadurch ergibt sich auch die korrekte Dimension der

Felder. Die zwei reellen Komponenten des Spinors $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ werden zu einem einkomponentigen komplexen Spinor (DIRAC-Spinor) zusammengefaßt $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 + i\psi_1)$ ($\bar{\alpha} = \alpha^\dagger$). Die LAGRANGE-Dichte wird damit zu ($S = \int dx dt \mathcal{L} = \int dt \mathcal{L}_1$)

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - i\bar{\alpha}\dot{\alpha} + \frac{1}{2}F^2 + FW'(x) - W''(x)\bar{\alpha}\alpha. \quad (2.167)$$

2 Supersymmetrie

x ist hier ein bosonisches Feld und α ein DIRAC-Fermion ($\partial_t x = \dot{x}$). Da es sich bei F wieder um ein Hilfsfeld handelt, gelangt man on-shell zu der LAGRANGE-Dichte:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - i\bar{\alpha}\dot{\alpha} - \frac{1}{2}(W'(x))^2 - W''(x)\bar{\alpha}\alpha. \quad (2.168)$$

Die Transformationen gehen durch die dimensionale Reduktion über in $\left(\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_2 + i\zeta_1)$):

$$\begin{array}{ll} \text{off - shell} & \text{on - shell} \\ \delta_\zeta x = \bar{\zeta}\alpha + \bar{\alpha}\zeta & \delta_\zeta x = \bar{\zeta}\alpha + \bar{\alpha}\zeta \\ \delta_\zeta \alpha = (i\dot{x} + F)\zeta & \delta_\zeta \alpha = (i\dot{x} - W')\zeta \\ \delta_\zeta \bar{\alpha} = (-i\dot{x} + F)\bar{\zeta} & \delta_\zeta \bar{\alpha} = (-i\dot{x} - W')\bar{\zeta} \\ \delta_\zeta F = i(\bar{\zeta}\dot{\alpha} + \zeta\dot{\bar{\alpha}}) & -. \end{array} \quad (2.169)$$

Diese Transformationen lassen also die entsprechende Wirkung invariant.

Um eine EUKLIDISCHE Version dieses Modells zu erhalten, soll hier nicht die entsprechende zweidimensionale Wirkung dimensional reduziert werden. Die EUKLIDISCHE Wirkung soll vielmehr durch eine WICK-Rotation aus (2.167) hervorgehen. Es gibt zur Zeit noch kein allgemeines Verfahren, EUKLIDISCHE Modelle in der Supersymmetrie zu konstruieren, denn eine Reihe von Problemen können dabei auftreten. MAJORANA-Fermionen existieren zum Beispiel nicht in allen Dimensionen bei EUKLIDISCHER Signatur. Außerdem können off-shell Divergenzen in den Pfadintegralen entstehen. Wenn man bei der WICK-Rotation auch die Hilfsfelder neu definiert, kann man diese Divergenzen jedoch verhindern. Da später auch für EUKLIDISCHE Modelle Pfadintegrale verwendet werden sollen, wird dieses (z.B. in [17] verwendete) Verfahren auch hier erwähnt. Formal läßt sich der Übergang zu einer EUKLIDISCHEN Signatur durch die analytische Fortsetzung zu imaginären Zeiten beschreiben, gemäß:

$$S_E \equiv -iS = - \int d\tau \mathcal{L}(t \rightarrow -i\tau) \equiv \int dt \mathcal{L}_E. \quad (2.170)$$

Um die Divergenzen zu vermeiden, muß man die Hilfsfelder auf folgende Weise ersetzen

$$F \rightarrow iF. \quad (2.171)$$

Die EUKLIDISCHE LAGRANGE-Dichte ist damit:

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \bar{\alpha}\dot{\alpha} + \frac{1}{2}F^2 - iFW'(x) + W''(x)\bar{\alpha}\alpha. \quad (2.172)$$

Ersetzt man gemäß der Bewegungsgleichung $F = iW'$, so erhält man die on-shell LAGRANGE-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \bar{\alpha}\dot{\alpha} + \frac{1}{2}W'^2 + W'\bar{\alpha}\alpha. \quad (2.173)$$

Die Transformationen gehen unter der Rotation über in:

$$\begin{array}{ll} \text{off - shell} & \text{on - shell} \\ \delta_\zeta x = \bar{\zeta}\alpha + \bar{\alpha}\zeta & \delta_\zeta x = \bar{\zeta}\alpha + \bar{\alpha}\zeta \\ \delta_\zeta \alpha = (-\dot{x} + iF)\zeta & \delta_\zeta \alpha = (-\dot{x} - W')\zeta \\ \delta_\zeta \bar{\alpha} = (\dot{x} + iF)\bar{\zeta} & \delta_\zeta \bar{\alpha} = (\dot{x} - W')\bar{\zeta} \\ \delta_\zeta F = -(\bar{\zeta}\dot{\alpha} + \zeta\dot{\bar{\alpha}}) & -. \end{array} \quad (2.174)$$

2.8.4 Stromterme in supersymmetrischen Modellen und Ward-Identitäten

Man kann zu der invarianten Wirkung Stromterme hinzufügen. Am einfachsten geschieht dies dadurch, daß man einen Strom an jedes Feld koppelt. Diese Stromterme werden dann im allgemeinen die Symmetrie verletzen. Bei der Berechnung von N -Punkt-Funktionen erhält man WARD-Identitäten, die eine Bedingung an die N -Punkt-Funktionen für den Erhalt der Symmetrie darstellen. Als Beispiel verwenden wir das EUKLIDISCHE WESS-ZUMINO-Modell in zwei Dimensionen (on-shell). Durch Kopplung von einem Strom (j und $\bar{\vartheta}$) an jedes Feld (A und ψ) erhält man das Erzeugendenfunktional

$$Z(j, \vartheta) = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \exp\left(-\int dx dt \mathcal{L}\right) \exp\left(i \int dx dt (jA + \bar{\vartheta}\psi)\right). \quad (2.175)$$

Das Maß wird als invariant unter den Supersymmetrietransformationen angenommen. Damit auch das gesamte Erzeugendenfunktional invariant unter den Transformationen ist, muß gelten:

$$0 = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi e^{(-\int dx dt \mathcal{L})} e^{i \int dx dt (jA + \bar{\vartheta}\psi)} \left(1 - e^{i \int dx dt (j\delta A + \bar{\vartheta}\delta\psi)}\right) \quad (2.176)$$

$$= \left\langle e^{i \int dx dt (jA + \bar{\vartheta}\psi)} \left(1 - e^{i \int dx dt (j\delta A + \bar{\vartheta}\delta\psi)}\right) \right\rangle \quad (2.177)$$

Betrachtet man nur infinitesimale Transformationen, erhält man:

$$\left\langle e^{i \int dx dt (jA + \bar{\vartheta}\psi)} \int dx dt (j\delta A + \bar{\vartheta}\delta\psi) \right\rangle = 0. \quad (2.178)$$

Wendet man hierauf nun Funktionalableitungen nach den Strömen an und setzt die Ströme anschließend Null, so erhält man WARD-Identitäten:

$$\langle \delta A(x) \rangle = 0 ; \langle \delta\psi(x) \rangle = 0 ; \langle A(x)\delta A(y) + A(y)\delta A(x) \rangle = 0 \text{ usw..} \quad (2.179)$$

Auch off-shell kann man dieses Verfahren anwenden.

Eine andere Art die Ströme anzukoppeln ist, einen invarianten Stromterm hinzuzufügen. Dazu müssen dann auch die Ströme bestimmte Transformationen erfüllen. Dies ist nur off-shell möglich. Allerdings erhält man beim Übergang von on-shell zu off-shell andere Transformationen als vorher, da auch an die Hilfsfelder ein Strom gekoppelt ist. Invariante Stromterme für die on-shell Transformationen zu konstruieren, ist im allgemeinen nicht möglich, da die on-shell Transformationen nicht immer linear sind.

Für ein $N = 1$ Modell in $1 + 1$ Dimensionen kann man mit Hilfe des Superraumformalismus leicht einen invarianten Stromterm konstruieren. Man koppelt an das reelle Superfeld Φ einfach ein weiteres Superfeld J und verwendet den F -Term des Produktes $\int d\theta d\bar{\theta} J\Phi$. Nach diesem Prinzip kann man auch in anderen Fällen mit Hilfe des Superraumformalismus invariante Stromterme konstruieren. Das Superfeld des Stromes muß dabei immer von der gleichen Art sein, wie das Feld, an das es gekoppelt wird.

Auch für das hier verwendete eindimensionale Modell kann man einen solchen invarianten Stromterm konstruieren. Koppeln wir dazu zunächst einen Strom an jedes Feld:

$$Z[j, \vartheta, \bar{\vartheta}, K] = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} e^{-S} \exp\left\{\int dt (jx + \bar{\vartheta}\alpha + \bar{\alpha}\vartheta + KF)\right\}. \quad (2.180)$$

Da Maß und Wirkung invariant unter den Transformationen sind, muß gelten:

$$\begin{aligned}
 Z[j, \vartheta, \bar{\vartheta}, K] &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} e^{-S} \exp\left\{ \int dt (jx' + \bar{\vartheta}\alpha' + \bar{\alpha}'\vartheta + KF') \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} e^{-S} \exp\left\{ \int dt (j'x + \bar{\vartheta}'\alpha + \bar{\alpha}\vartheta' + K'F) \right\} \\
 &= Z[j', \vartheta', \bar{\vartheta}', K'].
 \end{aligned} \tag{2.181}$$

Dies bedeutet aber

$$\begin{aligned}
 &\int dt (j'x + \vartheta'\alpha + \alpha\bar{\vartheta}' + K'F) \\
 &= \int dt (j(x + \delta x) + \bar{\vartheta}(\alpha + \delta\alpha) + (\bar{\alpha} + \delta\bar{\alpha})\vartheta + K(F + \delta F)) \\
 &= \int dt (j(x + \zeta\alpha + \bar{\alpha}\zeta) + \bar{\vartheta}(\alpha + (i\dot{x} + F)\zeta) + (\bar{\alpha} + (-i\dot{x} + F)\bar{\zeta})\vartheta + K(F + i(\bar{\zeta}\dot{\alpha} + \zeta\dot{\bar{\alpha}}))) \\
 &= \int dt \left((j - i\dot{\bar{\zeta}}\zeta + i\zeta\dot{\bar{\vartheta}})x + (\bar{\vartheta} + j\bar{\zeta} - i\dot{K}\bar{\zeta})\alpha + \bar{\alpha}(\vartheta + j\zeta + i\dot{K}\zeta) + (K + \bar{\zeta}\vartheta + \bar{\vartheta}\zeta)F \right).
 \end{aligned}$$

Um die Invarianz zu erfüllen müssen die Transformationen der Ströme folgende Form haben:

$$\begin{aligned}
 \delta j &= i(\zeta\dot{\bar{\vartheta}} + \bar{\zeta}\dot{\vartheta}) \\
 \delta\bar{\vartheta} &= (-i\dot{K} + j)\zeta \\
 \delta\vartheta &= (i\dot{K} + j)\bar{\zeta} \\
 \delta K &= \bar{\zeta}\vartheta + \bar{\vartheta}\zeta.
 \end{aligned} \tag{2.182}$$

Also sind die Transformationen von j äquivalent zu denen von F , die von ϑ zu denen von α und die von K zu denen von x . Damit ergibt sich ein Multiplett $(j, \bar{\vartheta}, \vartheta, K)$ der gleichen Art wie das ursprüngliche Multiplett $(x, \bar{\alpha}, \alpha, F)$.

Ströme durch invariante Terme anzukoppeln spielt besonders dann eine Rolle, wenn man Zwangsbedingungen durch Stromterme in die Wirkung integrieren möchte. Dies geschieht durch die Relation $\delta(\phi - \phi_0) = \int dj e^{j(\phi - \phi_0)}$. Möchte man die Zwangsbedingungen in die Wirkung integrieren, ohne die Supersymmetrie zu verletzen, so benötigt man invariante Stromterme.

2.8.5 Spontan gebrochene Supersymmetrie in niedrigster Ordnung Störungstheorie („tree level“)

Eine Symmetrie gilt als spontan gebrochen, wenn die Wirkung zwar invariant unter den Symmetrietransformationen ist, der Grundzustand aber unter dieser Symmetrie nicht invariant ist. Es gibt mehrere Möglichkeiten für einen Symmetriebruch in einem supersymmetrischen Modell. Eine Symmetrie des Modells kann gebrochen sein, die Supersymmetrie kann gebrochen sein oder sowohl Supersymmetrie als auch andere Symmetrien des Modells können gebrochen sein. Im folgenden sollen diese Fälle kurz erläutert werden.

Wir konstruieren dazu eine invariante Wirkung aus mehreren chiralen Multipletts. Die Verallgemeinerung von Gleichung (2.141) für mehrere Multipletts lautet $f(\mathfrak{A}) = f(\{\mathfrak{A}_n\})$:

$$\mathcal{L} = f(\Phi)|_{\mathfrak{F}} + f(\bar{\Phi})|_{\mathfrak{F}^\dagger} - \sum_n \bar{\Phi}_n \Phi_n|_D \tag{2.183}$$

2 Supersymmetrie

$$\begin{aligned}
&= \sum_n \left(2\partial^\mu \mathfrak{A}_n \partial_\mu \mathfrak{A}_n^\dagger + 2\mathfrak{F}_n^\dagger \mathfrak{F}_n + 2iv_n \sigma^\mu \partial_\mu \bar{v}_n + 2i\bar{v}_n \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu v_n \right) \\
&+ \sum_n \left(2\mathfrak{F}_n \left(\frac{\partial f(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_n} \right) + 2\mathfrak{F}_n^\dagger \left(\frac{\partial f(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_n} \right)^\dagger \right) \\
&- \sum_{nm} \left(2v_n v_m \left(\frac{\partial^2 f(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_n \partial \mathfrak{A}_m} \right) + 2\bar{v}_n \bar{v}_m \left(\frac{\partial^2 f(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_n \partial \mathfrak{A}_m} \right)^\dagger \right). \tag{2.184}
\end{aligned}$$

Die Hilfsfelder \mathfrak{F}_n kann man durch die Bewegungsgleichung $\mathfrak{F}_n = - \left(\frac{\partial f(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_n} \right)^\dagger$ eliminieren. Die On-Shell-LAGRANGE-Dichte ist dann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_n \left(2\partial^\mu \mathfrak{A}_n \partial_\mu \mathfrak{A}_n^\dagger + 2iv_n \sigma^\mu \partial_\mu \bar{v}_n + 2i\bar{v}_n \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu v_n \right) \\
&- \sum_{nm} \left(2v_n v_m \left(\frac{\partial^2 f(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_n \partial \mathfrak{A}_m} \right) + 2\bar{v}_n \bar{v}_m \left(\frac{\partial^2 f(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_n \partial \mathfrak{A}_m} \right)^\dagger \right) - \sum_n \left| \frac{\partial f(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_n} \right|^2. \tag{2.185}
\end{aligned}$$

Da der letzte Term immer negativ oder Null ist, ist der Erwartungswert von \mathfrak{A} in erster Näherung bei \mathfrak{A}_0 mit

$$\left. \frac{\partial f(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}} \right|_{\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0} = 0, \tag{2.186}$$

vorausgesetzt, eine Lösung dieser Gleichung existiert. Diese Gleichung stellt zugleich eine Bedingung dafür dar, daß die Supersymmetrie in niedrigster Ordnung der Störungstheorie nicht gebrochen ist. Die Invarianz des Vakuums unter den Supersymmetrietransformationen setzt voraus, daß der Vakuumerwartungswert der Transformation eines Feldes verschwindet (vgl. WARD-Identitäten (2.179)). Der Vakuumerwartungswert eines fermionischen Feldes ist Null. Seine Transformation ist aber proportional zu dem Hilfsfeld. Ein Verschwinden des Vakuumerwartungswertes der Transformation des Fermionenfeldes bedeutet damit on-shell in erster Näherung, daß die Gleichung (2.186) erfüllt ist. Betrachten wir nun ein Modell mit jeweils mehreren links-chiralen Multipletts $\tilde{\Phi}_i$ und Φ_j . Das Superpotential habe die Form:

$$f(\tilde{\Phi}, \Phi) = \sum_i \tilde{\Phi}_i f_i(\Phi). \tag{2.187}$$

Das Maximum des letzten Terms von Gleichung (2.185) ist bei dem Minimum von

$$V(\tilde{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A}) = \sum_i |f_i(\mathfrak{A})|^2 + \sum_{ij} \left| \tilde{\mathfrak{A}}_i \frac{\partial f_i(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_j} \right|^2. \tag{2.188}$$

Die Besonderheit dieses Potentials besteht darin, Richtungen aufzuweisen, in denen es flach ist. Durch \mathfrak{A}_0 werde der erste Term des Potentials minimiert. Der zweite Term hat ein Minimum nicht nur bei $\tilde{\mathfrak{A}} = 0$, sondern auch für jeden Vektor $\tilde{\mathfrak{A}}_i$, der senkrecht zu $\left. \frac{\partial f_i(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}} \right|_{\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0}$ ist. Die Anzahl der flachen Richtungen ist durch die Anzahl der Felder $\tilde{\mathfrak{A}}$ ($N_{\tilde{\mathfrak{A}}}$) und \mathfrak{A} ($N_{\mathfrak{A}}$) bestimmt. Es gibt $N_{\tilde{\mathfrak{A}}} - N_{\mathfrak{A}}$ solcher flachen Richtungen, die zu GOLDSTONE-Bosonen führen können.

Der Bruch der Supersymmetrie führt zu einem masselosen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, dem Goldstino. In niedrigster Ordnung der Störungstheorie ist der Vakuumerwartungswert von \mathfrak{A} beim

2 Supersymmetrie

Maximum des letzten Terms in Gleichung (2.185). Das bedeutet

$$\sum_m \left(\frac{\partial^2 f(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_n \partial \mathfrak{A}_m} \right) \left(\frac{\partial f(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_m} \Big|_{\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0} \right) = 0. \quad (2.189)$$

Wenn diese Gleichung eine Lösung hat, gleichzeitig die Supersymmetrie gebrochen, und damit Gleichung (2.186) nicht erfüllt ist, so muß es wenigstens einen Eigenvektor der Matrix $\left(\frac{\partial^2 f(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_n \partial \mathfrak{A}_m} \right)$ geben, dessen Eigenwert Null ist. Die gleiche Matrix ist jedoch auch für die Masse der Fermionen verantwortlich. Anhand des zweiten Terms von Gleichung (2.185) sieht man, daß es wegen der Existenz eines solchen Eigenvektor mindestens eine Linearkombination von Fermionen v_n geben muß, die einem masselosen Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ entspricht. Schon anhand der Algebra kann man einige Aussagen darüber machen, unter welchen Bedingungen die Supersymmetrie spontan gebrochen ist. Supersymmetrie gilt als spontan gebrochen, wenn das Vakuum nicht invariant ist. Das bedeutet $Q_\alpha |0\rangle \neq 0$ und ist gleichbedeutend mit $\langle 0|E|0\rangle \neq 0$.

Ohne Korrekturen durch Quanteneffekte bedeutet dies, daß die Supersymmetrie genau dann spontan gebrochen ist, wenn das Minimum des Potentials (der letzte Term in (2.185)) größer als Null ist. Es ist bekannt, daß diese Aussage in vier Dimensionen ihre Gültigkeit nicht durch Hinzufügen von Quanteneffekten verliert. In zwei Dimensionen ist dies jedoch nicht immer der Fall.

3 Feldtheorie bei endlichen Temperaturen

Im Bezug auf Phasenübergänge spielt die Beschreibung der Feldtheorie bei endlichen Temperaturen eine große Rolle. Ist ein System im thermischen Gleichgewicht, so spielt seine Zeitentwicklung keine große Rolle. Statt ihrer ist es die thermische Mittelung über die Mikrozustände, die für endliche Temperatur entscheidend ist. Sie kann durch einen neuen Parameter τ beschrieben werden. Damit ist die Feldtheorie bei endlichen Temperaturen im gewissen Sinne äquivalent zu einer EUKLIDischen Feldtheorie.

Meistens werden zwei verschiedene Formalismen zur Beschreibung der Feldtheorie bei endlichen Temperaturen verwendet. Der imaginary-time Formalismus und der real-time Formalismus. Diese beiden Formalismen sollen hier nur kurz vorgestellt werden. Genauer findet man in [18] und [20].

3.1 „imaginary-time“ Formalismus

In der Thermodynamik lassen sich die zur Beschreibung des Systems notwendigen Größen aus der Zustandssumme berechnen. Die Zustandssumme ist die Spur des Dichteoperators ($\beta = \frac{1}{k_B T}$)

$$Z = \text{Tr } \rho = \int d\Phi_a \langle \Phi_a | \rho | \Phi_a \rangle \quad \text{mit } \rho = e^{-\beta H} \quad \text{und } H = \int d^n x \mathcal{H}(\hat{\Pi}, \hat{\Phi}). \quad (3.1)$$

Hierbei soll zunächst ein Modell mit bosonischen Feldern Φ_i (zugehörige Operatoren $\hat{\Phi}$ und Zustände $|\Phi\rangle = \hat{\Phi}|0\rangle$) und die konjugierten Impulse Π jeweils abhängig von x) verwendet werden. β kann man als eine imaginäre Zeit $\tau = it_f$ auffassen. Das Zeitintervall $[0, t_f]$ wird nun in eine Summe infinitesimaler Zeitintervalle zerlegt, $t_f = N\Delta t$ mit $N \rightarrow \infty$. Außerdem kann man die Identität $\mathbb{1} = \int d\Phi_i |\Phi_i\rangle \langle \Phi_i|$ beziehungsweise $\mathbb{1} = \int \frac{d\Pi_i}{2\pi} |\Pi_i\rangle \langle \Pi_i|$ einfügen. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \langle \Phi_a | e^{-iHt_f} | \Phi_a \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^N d\Phi_i \frac{d\Pi_i}{2\pi} \langle \Phi_a | \Pi_N \rangle \langle \Pi_N | e^{-iH\Delta t} | \Phi_N \rangle \\ &\quad \times \langle \Phi_N | \Pi_{N-1} \rangle \langle \Pi_{N-1} | e^{-iH\Delta t} | \Phi_{N-1} \rangle \langle \Phi_{N-1} | \Pi_{N-2} \rangle \times \dots \\ &\quad \times \langle \Phi_2 | \Pi_1 \rangle \langle \Pi_1 | e^{-iH\Delta t} | \Phi_1 \rangle \langle \Phi_1 | \Phi_a \rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Diese Vorgehensweise ist ganz analog zu der Einführung von Pfadintegralen zur Beschreibung der Übergangsamplitude in der Quantenfeldtheorie. Es gilt

$$\langle \Pi_i | \Pi_j \rangle = \delta(\Pi_i - \Pi_j) \quad (3.3)$$

$$\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = \delta(\Phi_i - \Phi_j) \quad (3.4)$$

$$\langle \Phi_i | \Pi_j \rangle = e^{i \int d^n x \Pi_i \Phi_j} \quad (3.5)$$

$$\langle \Pi_i | e^{-iH\Delta t} | \Phi_i \rangle = e^{-iH_i \Delta t} e^{i \int d^n x \Pi_i \Phi_i} \quad \text{mit } H_i = \int d^n x \mathcal{H}(\Pi_i(x), \Phi_i(x)). \quad (3.6)$$

3 Feldtheorie bei endlichen Temperaturen

(Bei der letzten Formel wurde Δt als klein angenommen, d.h. es gilt $e^{iH\Delta t} \approx 1 - iH\Delta t$.)
Mit Hilfe dieser Formeln erhält man

$$\langle \Phi_a | e^{-iHt_f} | \Phi_a \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^N d\Phi_i \frac{d\Pi_i}{2\pi} \delta(\Phi_1 - \Phi_a) e^{-i\Delta t \sum_{j=1}^N \int d^n x (\mathcal{H}(\Pi_j, \Phi_j) - \Pi_j \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{\Delta t})}. \quad (3.7)$$

Im „Kontinuumsmlimes“ wird aus dem diskreten Index i die kontinuierliche Variable t . Man erhält

$$\langle \Phi_a | e^{-iHt_f} | \Phi_a \rangle = \int \mathcal{D}\Pi \int_{\Phi(x,0)=\Phi_a(x)}^{\Phi(x,t_f)=\Phi_a(x)} \mathcal{D}\Phi e^{i \int_0^{t_f} dt \int d^n x (\Pi(x,t) \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} - \mathcal{H}(\Pi(x,t), \Phi(x,t)))}. \quad (3.8)$$

Setzt man dies in die Gleichung für die Zustandssumme ein, so erhält man

$$Z = \int d\Phi_a \int \mathcal{D}\Pi \int_{\Phi(x,0)=\Phi_a}^{\Phi(x,\tau_f)=-i\beta=\Phi_a} \mathcal{D}\Phi e^{\int_0^\beta d\tau \int d^n x (i\Pi \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\Pi(x,t), \Phi(x,t)))} \quad (3.9)$$

$$= \mathcal{N} \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}\Phi e^{-S_E}. \quad (3.10)$$

In der letzten Zeile wurde davon ausgegangen, daß es sich bei der Π -Integration um ein GAUSSSches Integral handelt (z. B. $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi^2 + U(\Phi)$). Die Integration führt dann nur zu einem konstanten Vorfaktor, der für die Betrachtungen der Thermodynamik irrelevant ist. Die Formel der Statistik in n Dimensionen ist dadurch in die einer Feldtheorie in $n+1$ Dimensionen (zusätzliche Variable τ) mit EUKLIDischer Wirkung übersetzt worden. Die zusätzliche Dimension weist jedoch periodische Randbedingungen auf, und die Periodizität ist abhängig von der Temperatur.

Es ist noch anzumerken, daß hier die Zustandssumme der kanonischen Gesamtheit verwendet wurde. Die gleiche Vorgehensweise kann man natürlich auch für andere Gesamtheiten verwenden. Da in der Quantenfeldtheorie häufig Teilchen vernichtet und erzeugt werden, die mittlere Anzahl aber durch Erhaltungssätze festgelegt wird, wird meist die großkanonische Gesamtheit benutzt. In den Formeln ist der Anzahloperator zum HAMILTON-Operator hinzuzufügen ($\mathcal{H}(\hat{\Pi}, \hat{\Phi}) \rightarrow \mathcal{H}(\hat{\Pi}, \hat{\Phi}) + \mu N(\hat{\Pi}, \hat{\Phi})$).

Auch ein Modell, das Fermionen enthält, kann man mit diesem Formalismus beschreiben. Dazu betrachten wir zunächst als einfaches („nulldimensionales“) Beispiel: den fermionischen harmonischen Oszillator. Für die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren (a und a^\dagger) gilt $\{a, a^\dagger\} = 1$. Die Zustände $|0\rangle$ ($a|0\rangle = 0$) und $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$ stellen eine Basis des zugehörigen HILBERT-Raumes dar. Mit Hilfe der Generatoren η und η^* einer zweidimensionalen GRASSMANN-Algebra, definiert man die kohärenten Zustände als

$$|\eta\rangle \equiv e^{-\eta a^\dagger} |0\rangle = |0\rangle + \eta |1\rangle \text{ und } \langle \eta| \equiv \langle 0| e^{-a\eta^*}. \quad (3.11)$$

(Man definiert also $(\eta a)^\dagger \equiv a^\dagger \eta^*$.) Mit diesen Definitionen gelten die folgenden Identitäten

$$\langle \eta|0\rangle = \langle 0|\eta\rangle = 1; \quad \langle 1|\eta\rangle = \langle \eta|1\rangle^* = -\eta \text{ und } \langle \eta'| \eta\rangle = e^{\eta'^* \eta}. \quad (3.12)$$

Die Integration von η und η^* ist genauso definiert wie das Integral über die fermionischen Koordinaten. Mit den hier verwendeten Definitionen gilt

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} |\eta\rangle \langle \eta| = |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| = \mathbb{1} \quad (3.13)$$

$$\int d\eta^* \eta e^{-\eta^* \eta} \langle -\eta| A |\eta\rangle = \langle 0| A |0\rangle + \langle 1| A |1\rangle = \text{tr}(A). \quad (3.14)$$

¹Es ist dabei auf die Ordnung der Operatoren zu achten. Das gleiche gilt auch bei der Herleitung für Fermionen

Der HAMILTON-Operator ist jetzt eine Funktion von a und a^\dagger ($H = \omega a^\dagger a$). Man erhält durch das Einfügen von Identitäten wieder

$$\begin{aligned}
 Z &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\eta^* d\eta \int \prod_{i=1}^N d\eta_i^* d\eta_i \langle -\eta | \eta_N \rangle e^{-\eta_N^* \eta_N} \langle \eta_N | e^{-iH\Delta t} | \eta_{N-1} \rangle \times \\
 &\quad \times e^{-\eta_{N-1}^* \eta_{N-1}} \langle \eta_{N-1} | e^{-iH\Delta t} | \eta_{N-2} \rangle \dots \langle \eta_1 | \eta \rangle \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\eta^* d\eta \int \prod_{i=1}^N d\eta_i^* d\eta_i \\
 &\quad \times \exp(-(\eta_a^*(\eta_a + \eta_N) + \eta_N^*(\eta_N - \eta_{N-1}) + \dots + \eta_1(\eta_1 - \eta) \\
 &\quad + i\Delta t H(-\eta^*, \eta_N) + i\Delta t H(\eta_N^*, \eta_{N-1}) + \dots + i\Delta t H(\eta_1^*, \eta)) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\eta^* d\eta \int \prod_{i=1}^N d\eta_i^* d\eta_i \exp \left[- \sum_{i=1}^{N+1} \eta_i^*(\eta_i - \eta_{i-1}) - \Delta t \sum_{i=1}^{N+1} H(\eta_i^*, \eta_i) \right]. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde $\eta_{N+1} = -\eta$ gesetzt. Im „Kontinuumslimit“ erhält man daraus

$$Z = \int_{\text{antiperiodisch}} \mathcal{D}(\eta^*, \eta) e^{-S_E} \quad \text{mit} \quad S_E = - \int_0^\beta d\tau \left(\eta^* \frac{\partial \eta(\tau)}{\partial \tau} + H(\eta^*, \eta) \right). \quad (3.16)$$

Diese Vorgehensweise läßt sich natürlich auch im n -dimensionalen Fall anwenden. Auch für Fermionen ist damit der Zusammenhang zwischen einer EUKLIDischen Feldtheorie in $n + 1$ -Dimensionen und der Thermodynamik in n Dimensionen hergestellt. Der entscheidende Unterschied zwischen Fermionen und Bosonen liegt in der Wahl der Randbedingungen. Während für Bosonen periodische Randbedingungen gelten, sind es für Fermionen antiperiodische. Die Periodizität ist in beiden Fällen abhängig von der Temperatur.

Am Beispiel eines bosonischen Modells werden nun einige zusätzliche Größen eingeführt. Wie in der Quantenfeldtheorie üblich definiert man das Erzeugendenfunktional und den Propagator. Auch die Entwicklung in eine Störungsreihe ist möglich. Dabei ist jedoch darauf zu achten, daß sich nun um eine imaginäre Zeitrichtung handelt und bestimmte Randbedingungen vorliegen. Die Zeitenwicklung in imaginäre Zeitrichtung ist im HEISENBERG-Bild gegeben durch $\hat{\Phi}(x, -i\tau) = e^{\hat{H}\tau} \hat{\Phi} e^{-\hat{H}\tau}$. Der thermische Mittelwert und der Zeitordnungsoperator für imaginäre Zeiten werden hier wie folgt eingeführt

$$\langle A \rangle_\beta \equiv \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} \left[A e^{-\beta \hat{H}} \right] \quad (3.17)$$

$$T(\hat{\Phi}(x, -i\tau_1) \hat{\Phi}(x, -i\tau_2)) \equiv \begin{cases} \hat{\Phi}(x, -i\tau_1) \hat{\Phi}(x, -i\tau_2) & \tau_1 > \tau_2 \\ \hat{\Phi}(x, -i\tau_2) \hat{\Phi}(x, -i\tau_1) & \tau_2 > \tau_1 \end{cases}. \quad (3.18)$$

Das Erzeugendenfunktional ist

$$\begin{aligned}
 Z(\beta, j) &= \int \mathcal{D}\Phi \exp \left(-S_E(\beta) + \int_0^\beta d^{n+1}x j(x) \Phi(x) \right) = \text{tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} T \left(e^{\int_0^\beta d^{n+1}x j(x) \hat{\Phi}(x)} \right) \right] \\
 \frac{1}{Z(\beta)} \frac{\delta Z(\beta, j)}{\delta j(x) \delta j(y)} \Big|_{j=0} &= \langle T(\hat{\Phi}(x) \hat{\Phi}(y)) \rangle_\beta. \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Das Integral $\int_0^\beta d^{n+1}x$ ist definiert als $\int_0^\beta dx^0 \int d^n x$ ($\Phi(x) = \Phi(x, x^0 = \tau)$). Das Erzeugendenfunktional für ein freies Modell ist

$$Z_F(\beta, j) = Z_F(\beta) \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^\beta d^{n+1}x d^{n+1}y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right). \quad (3.20)$$

Dabei gilt für den FEYNMAN-Propagator (Δ_F)

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - (\nabla)^2 + m^2\right) \Delta(x-y) = \delta(x-y) \quad (3.21)$$

oder im FOURIER-Raum

$$\Delta_F(i\omega_n, k) = \frac{1}{\omega_n^2 + k^2 + m^2}. \quad (3.22)$$

Durch die Randbedingungen gilt dabei $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$.

Mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators in imaginäre Zeitrichtung ($e^{-\beta\hat{H}}$) und der Invarianz der Spur unter zyklischen Vertauschungen zeigt man leicht die KUBO-MARTIN-SCHWINGER-Relation (KMS-Relation)

$$\langle \hat{\Phi}(t)\hat{\Phi}(t') \rangle_\beta = \langle \hat{\Phi}(t')\hat{\Phi}(t+i\beta) \rangle_\beta. \quad (3.23)$$

3.2 „real-time“ Formalismus

Die Zustände $|\Phi(x, t)\rangle = e^{it\hat{H}}|\Phi(x, 0)\rangle$ stellen wieder eine Basis des HILBERT-Raumes dar. Zur Spurbildung kann man deshalb auch diese Zustände verwenden

$$\langle A \rangle_\beta = \frac{1}{Z_C(\beta)} \int d\Phi \langle \Phi(x, t-i\beta) | \hat{A} | \Phi(x, t) \rangle. \quad (3.24)$$

Als Erzeugendenfunktional erhält man

$$Z_C(\beta, j) = \int d\Phi' \langle \Phi'(x, t-i\beta) | T_C \exp\left(i \int_C d^{n+1}x j(x)\hat{\Phi}(x)\right) | \Phi(x, t) \rangle \quad (3.25)$$

$$= \int \mathcal{D}\Phi \exp\left(i \int_C d^{n+1}x (\mathcal{L}(x) + j(x)\Phi(x))\right). \quad (3.26)$$

Die Zeitordnung ist dabei ersetzt worden durch die Ordnung entlang eines beliebigen Pfades $t = z(h)$, parametrisiert durch h , der von t_i nach $t_i - i\beta$ durch die komplexe t -Ebene führt. Die Integration über x^0 erfolgt entlang dieses Pfades. Selbstverständlich gilt jetzt die Randbedingung $\Phi(x, x^0) = \Phi(x, x^0 - i\beta)$. Diese Vorgehensweise ist bis jetzt nichts anderes als ein Basiswechsel in der Spur durch die unitäre Transformation $e^{-it\hat{H}}$ und ein Umdefinieren des Parameters t ($t_{neu} = z(t_{alt})$), wobei $t_{neu} \in \mathbb{C}$, der beim Übergang zum Kontinuumslimit eingeführt wurde.

Nun wird ein spezieller Pfad gewählt. Der erste Teilabschnitt C_1 führt von einem großem ($t_i \rightarrow -\infty$) negativen reellen t_i entlang der reellen t -Achse zu dem positiven Wert $-t_i$. Dann führt der Pfad C_2 zu dem Wert $-t_i - i\epsilon$ ($0 \leq \epsilon \leq \beta$). Von diesem Punkt geht er weiter nach $t_i - i\epsilon$ (C_3), um schließlich den Punkt $t_i - i\beta$ zu erreichen (C_4).

Das Erzeugendenfunktional kann nun faktorisiert werden, indem der Weg in seine einzelnen Abschnitte zerlegt wird. In den meisten Fällen kann man den Abschnitt C_2 und C_4 vernachlässigen. Das freie Erzeugendenfunktional ist dann (mit dem Propagator D_C^F)

$$\begin{aligned} Z_C^F(\beta, j) &= \mathcal{N} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_C d^{n+1}x \int_C d^{n+1}y j(x) D_C^F(x-y) j(y)\right\} \\ &\approx \mathcal{N}' \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_{C_1 \cup C_2} d^{n+1}x \int_{C_1 \cup C_2} d^{n+1}y j(x) D_C^F(x-y) j(y)\right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Der Strom j_1 sei der Strom, für den t in C_1 liegt. Für j_2 sei t in C_2 . Es gelte $j_1(x, t) = j(x, t)$ und $j_2(x, t) = j(t - i\epsilon)$ wobei t jetzt reell ist. Das Erzeugendenfunktional ist damit

$$Z_C^F = \mathcal{N}' \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{ab} \int_{-\infty}^{\infty} d^{n+1}x \int_{-\infty}^{\infty} d^{n+1}y j_a(x) D_{ab}^F(x-y) j_b(y) \right\}. \quad (3.28)$$

Durch die Störungsreihe, die sich natürlich auch für den hier verwendeten Integrationsweg anwenden läßt, kann man das Ergebnis auch auf eine LAGRANGE-Dichte mit Potentialterm $U(\Phi)$ übertragen. Als eine Art Störungsentwicklung ergibt sich: (Man beachte den Integrationsweg von t !)

$$\begin{aligned} Z_C(\beta, j) &= \exp \left\{ -i \int_C d^{n+1}x U \left(\frac{\delta}{i\delta j(x)} \right) \right\} Z_C^F(\beta, j) \\ &\approx \mathcal{N}_1 \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} d^{n+1}x \left(U \left(\frac{\delta}{i\delta j_1(x)} \right) - U \left(\frac{\delta}{i\delta j_2(x)} \right) \right) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{ab} \int_{-\infty}^{\infty} d^{n+1}x \int_{-\infty}^{\infty} d^{n+1}y j_a(x) D_{ab}^F(x-y) j_b(y) \right\} \\ Z_C(\beta, j) &= \int \mathcal{D}\Phi_1 \mathcal{D}\Phi_2 \exp \sum_{ab} \left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^{n+1}x d^{n+1}y \Phi_a(x) (D^F)_{ab}^{-1}(x-y) \Phi_b(y) \right. \\ &\quad \left. -i \int_{-\infty}^{\infty} d^{n+1}x (U(\Phi_1) - U(\Phi_2)) - i \int_{-\infty}^{\infty} d^{n+1}x j_a(x) \Phi_a(x) \right). \quad (3.29) \end{aligned}$$

Im Ergebnis wurde die Thermodynamik durch eine Feldtheorie mit doppelt so vielen Feldern dargestellt. Für die zusätzlichen Felder gilt mit einem anderen Vorzeichen das gleiche Potential.

3.3 Supersymmetrie bei endlichen Temperaturen

Die Beschreibung der Supersymmetrie bei endlichen Temperaturen erfordert ein paar grundsätzliche Überlegungen. Durch endliche Temperaturen wird die LAGRANGE-Dichte und das Energiespektrum nicht verändert. Es ist deshalb zu erwarten, daß sich einige grundlegende Eigenschaften, die durch die Symmetrie erzeugt wurden, auch auf den Fall endlicher Temperaturen übertragen. Etwas naiv kann man annehmen, daß sich eine spontan gebrochene Symmetrie bei endlichen Temperaturen zum Teil wieder herstellt, da nun die angeregten Zustände im Gegensatz zum unsymmetrischen Grundzustand eine stärkere Rolle spielen. Die Veränderung der Symmetrie bei endlichen Temperaturen macht sich in den WARD-Identitäten bemerkbar. Bei endlichen Temperaturen wird hier der Vakuumerwartungswert ($\langle \rangle$) durch den thermischen Mittelwert ersetzt ($\langle \rangle_\beta$). Natürlich kann man im allgemeinen nicht mehr erwarten, daß dann die gleichen Relationen gelten.

Zu einer genaueren Beschreibung wenden wir uns der zum Thema Supersymmetrie bei endlichen Temperaturen geführten Diskussion zu (siehe [8], [15], [44], [1],[22], [24], [23], [5] und [19]). Am Anfang ([8], [15]) wurde versucht, mit Hilfe des effektiven Potentials mit Ein-Loop-Korrekturen, den Nachweis dafür zu erbringen, daß Supersymmetrie bei endlichen Temperaturen spontan gebrochen ist. Zu der Annahme, daß Supersymmetrie bei endlichen Temperaturen gebrochen ist, gelangte man durch die unterschiedlichen Randbedingungen, die bei endlichen

Temperaturen für Fermionen und Bosonen gelten. Außerdem gibt es Modelle, in denen bei $T = 0$ entweder die Supersymmetrie oder eine andere Symmetrie spontan gebrochen ist. Es ist bekannt, daß bei endlichen Temperaturen diese Symmetrie wieder hergestellt wird. Dies nahm man als Indiz dafür, daß sich Supersymmetrie genau umgekehrt verhält. Weiterhin verlangt ungebrochene Supersymmetrie nach einer verschwindenden Grundzustandsenergie. Durch endliche Temperaturen, so nahm man an, würde sich die Energie des (thermischen) Grundzustandes erhöhen, und die Symmetrie wäre gebrochen. Unstimmigkeiten in diesen Überlegungen wurden in [44] aufgeführt. So gibt es zum Beispiel mehrere Möglichkeiten, die Spur, die in der Thermodynamik verwendet wird, im Falle der Supersymmetrie zu definieren. In dieser Arbeit wurde auch auf bestimmte Eigenschaften hingewiesen, die auch bei endlichen Temperaturen erhalten bleiben.

Eine grundlegende Analyse der Zustände der Supersymmetrie bei endlichen Temperaturen wird in [5] dargelegt. Allerdings werden die Fakten in einem sehr allgemeinen Fall und im Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie behandelt. Deswegen soll hier nur auf einige der Gedanken eingegangen werden. Man betrachtet im Falle endlicher Temperaturen ein System, das in einer bestimmten Phase vorliegt. Bestimmte makroskopische Ordnungsparameter werden entweder als fluktuierend oder als fest vorgegeben betrachtet. Eine bezüglich eines Ordnungsparameters reine Phase ist charakterisiert durch einen bestimmten Wert, den dieser Ordnungsparameter in dieser Phase annimmt. Eine gemischte Phase läßt statistische Fluktuationen des Parameters zu. Durch Anwendung von Polynomen in den Feldoperatoren läßt sich aus einem Zustand, der eine bestimmte Phase beschreibt, ein HILBERT-Raum konstruieren. Unter dem Begriff Zustand werden hier sowohl die reinen Zustände ($\langle \rangle$) als auch die thermischen Mittelungen ($\langle \rangle_\beta$) verstanden. Nun gibt es drei Möglichkeiten: 1) Die Symmetrieeoperatoren existieren in diesem HILBERT-Raum, dann liegt eine Phase mit ungebrochener Symmetrie vor. 2) Die Symmetrieeoperatoren existieren nicht in diesem HILBERT-Raum, aber durch einen Übergang zu einer gemischten Phase erhält man wieder einen HILBERT-Raum, der die Symmetrieeoperatoren enthält. 3) Auch in der gemischten Phase existieren die Symmetrieeoperatoren nicht. (Dies liegt dann an Zusatzbedingungen, die im Falle endlicher Temperaturen gelten müssen, wie zum Beispiel die KMS-Relation.) Die Autoren sprechen dann von einem spontanen Kollaps der Symmetrie. Im Falle der Supersymmetrie handelt es sich um einen solchen spontanen Kollaps. Die Begründung beruht darauf, daß nur, wenn die Phase aus dem reinen Vakuumzustand besteht, die Symmetrieeoperatoren auf dem zugehörigen HILBERT-Raum definiert sind. Dann ist aber die KMS-Bedingung nicht erfüllt. Etwas ähnliches liegt im Falle der LORENTZ-Symmetrie vor (siehe [4] und [30]), da die KMS-Bedingung das Ruhesystem festlegt. Aber man kann im Falle der LORENTZ-Symmetrie das ganze betrachtete thermodynamische System in ein anderes Bezugssystem transformieren.

Auch über das Auftreten eines GOLDSTONE-Teilchens wurde intensiv nachgedacht ([24], [1]). Da die Brechung der Supersymmetrie durch das Wärmebad zustande kommt, wird davon ausgegangen, daß es sich bei den „GOLDSTONE-Teilchen“ um Vielteilchenzustände handelt. Aus diesem Grund wurde sogar der Begriff „phonino“ und „supersymmetrischer Schall“ verwendet ([21], [16]).

In [19] findet man neuere Untersuchungen zu diesem Thema. Dort wurden störungstheoretische Untersuchungen zu diesem Effekt gemacht. Um die Supersymmetrie nicht durch die Randbedingungen zu verletzen, verwendete man den real-time Formalismus.

4 Die Molekularfeldnäherung

Im allgemeinen läßt sich das Pfadintegral, das sowohl in der Quantenfeldtheorie bei Temperatur Null als auch bei der (EUKLIDischen) Feldtheorie bei endlichen Temperaturen auftritt, nicht analytisch lösen. Es ist also wichtig, Näherungsverfahren zur Berechnung des Pfadintegrals zu finden. Eine sehr erfolgreiche Näherung ist die Mean-Field- oder Molekularfeldnäherung.

In den Pfadintegralen tauchen im allgemeinen Ableitungen auf, die auf dem Gitter zu sogenannten Hopping-Termen führen. Diese Terme beschreiben die Wechselwirkung zwischen zwei unterschiedlichen Gitterpunkten. In der Molekularfeldnäherung ersetzt man die Wechselwirkung der einzelnen Gitterpunkte durch die Wechselwirkung mit einem mittleren Feld. Dadurch entkoppelt man die Gitterpunkte und das Pfadintegral faktorisiert. Die entstehenden einfachen Integrale kann man entweder analytisch lösen, oder man wendet die gewohnten numerischen Verfahren zur Lösung von Integralen an.

Es gibt in der Literatur drei verschiedene Arten, die Molekularfeldnäherung einzuführen. Man kann direkt von der Gitterformulierung der Quantenfeldtheorie ausgehen ([13]). Das allgemeine Variationsprinzip der Quantenfeldtheorie kann als Grundlage dienen ([32]). Als dritte Möglichkeit gibt es noch die Herleitung durch Sattelpunktsnäherung der Zustandssumme ([49]). Um zu zeigen, daß alle Verfahren auf die gleichen Ergebnisse führen, sollen sie alle drei hier vorgestellt werden.

Die Molekularfeldnäherung wird meist für eine EUKLIDische Wirkung, in der nur Bosonen enthalten sind, hergeleitet. Deswegen wird im folgenden

$$S = \int dx \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi(x))^2 + V(\phi(x)) \right] \quad (4.1)$$

als Wirkung verwendet.

4.1 Herleitung durch Variation des Maßes

Die Aussagen der Quantentheorie lassen sich auch aus einem allgemeinen Variationsprinzip entwickeln. Dabei wird insbesondere die Verwandtschaft zwischen Statistik und Quantentheorie deutlich. Ein Problem dabei ist allerdings die genaue mathematische Definition einer Variation des Maßes, da der Raum aller möglichen Maße in der Quantenfeldtheorie schwer faßbar ist. Betrachtet man jedoch den kontinuierlichen Grenzfall als eine Gittertheorie mit sehr großer Anzahl der Gitterpunkte, so lassen sich die Größen korrekt definieren.

Betrachten wir das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$d\mu[\phi] \equiv p[\phi]\mathcal{D}\phi ; \langle f \rangle_\mu \equiv \int d\mu[\phi] f. \quad (4.2)$$

Die Entropie (S_B) für dieses Maß ist definiert als

$$S_{B\mu} \equiv - \int d\mu[\phi] \log p[\phi]. \quad (4.3)$$

4 Die Molekularfeldnäherung

Die Zustandssumme (Z) läßt sich aus dem Variationsprinzip (siehe C) bestimmen

$$\inf_{\mu} [\langle S \rangle_{\mu} - S_{B\mu}] = -\log Z. \quad (4.4)$$

Im klassischen Grenzfall steht kein S_B in dieser Formel (S_B entspricht $\hbar S_B$ und $\hbar \rightarrow 0$). Liegt keine Entartung vor, so wird das Infimum dann durch ein DIRAC-Maß mit dem Träger $\phi = \phi_0$ erreicht, wenn ϕ_0 die Wirkung minimiert. Nur im Falle der Entartung des Minimums muß man auch im klassischen Grenzfall die Prinzipien der Statistik berücksichtigen.

Auch das Erzeugendenfunktional ($Z[j]$) und das SCHWINGER-Funktional ($W[j]$) ergibt sich auf die gleiche Weise aus dem Variationsprinzip

$$\inf_{\mu} \left[\langle S \rangle_{\mu} - S_{B\mu} - \int dx j(x) \langle \phi(x) \rangle_{\mu} \right] = -\log Z[j] = -W[j]. \quad (4.5)$$

Es gilt

$$\frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} = \langle \phi(x) \rangle \quad \text{und} \quad \frac{\delta^2 W[j]}{\delta j(x) \delta j(y)} = \langle \phi(x) \phi(y) \rangle - \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle \geq 0. \quad (4.6)$$

Damit ist $W[j]$ konvex.

Die effektive Wirkung $\Gamma[\bar{\phi}]$ gibt auf ähnliche Weise Auskunft über den Vakuumerwartungswert, wie die klassische Wirkung den Zustand des Systems bestimmt. Das Minimum der effektiven Wirkung ist der Vakuumerwartungswert. Die effektive Wirkung ist definiert als

$$\Gamma[\bar{\phi}] \equiv \inf_{\mu} [\langle S \rangle_{\mu} - S_{B\mu} | \langle \phi \rangle_{\mu} = \bar{\phi}]. \quad (4.7)$$

$\Gamma[\bar{\phi}]$ ist die LEGENDRE-Transformierte von $W[j]$: ($\bar{\phi}$ und j sind konjugierte Variablen.)

$$\Gamma[\bar{\phi}] = \sup_j \left[\int dx j(x) \bar{\phi}(x) - W[j(x)] \right] ; \quad W[j] = \sup_{\bar{\phi}} \left[\int dx j(x) \bar{\phi}(x) - \Gamma[\bar{\phi}] \right]. \quad (4.8)$$

Umgekehrt kann man damit $W[j]$ durch LEGENDRE-Transformation aus $\Gamma[\bar{\phi}]$ erhalten, da $W[j]$ konvex ist. Diese Aussage beweist man leicht durch

$$\begin{aligned} \int dx j(x) \bar{\phi}(x) - W[j] &= \inf_{\mu} \left[\langle S \rangle_{\mu} - S_{B\mu} + \int dx j(x) (\bar{\phi}(x) - \langle \phi \rangle_{\mu}) \right] \\ &\leq \inf_{\mu} [\langle S \rangle_{\mu} - S_{B\mu} | \langle \phi \rangle_{\mu} = \bar{\phi}(x)] = \Gamma[\bar{\phi}]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann, wenn $\langle \phi \rangle_{\mu} = \bar{\phi}$. Eine andere Möglichkeit für einen Beweis ist, die Zwangsbedingung $\langle \phi \rangle_{\mu} = \bar{\phi}$ durch den LAGRANGE-Multiplikator $j(x)$ in das Variationsprinzip zu integrieren ($\Gamma[\bar{\phi}] = \inf_{\mu} [\sup_j \{ \langle S \rangle_{\mu} - S_{B\mu} + \int dx j(x) (\bar{\phi} - \langle \phi \rangle) \}]$).

Die Menge der zur Bestimmung der Infimums in (4.7) zur Verfügung stehenden Maße wird nun eingeschränkt. Das daraus resultierende Infimum ist damit größer oder gleich dem ursprünglichen Infimum. Man läßt in der Molekularfeldnäherung nur die Maße zu, die auf dem Gitter keine Kopplung unterschiedlicher Gitterpunkte (Ableitungen) enthalten. Die Menge dieser Maße sei \mathcal{P} . Auf diese Weise erhält man als Näherung der effektiven Wirkung

$$\Gamma_{MF}[\bar{\phi}] = \inf_{\mu \in \mathcal{P}} [\langle S \rangle_{\mu} - S_{B\mu} | \langle \phi \rangle_{\mu} = \bar{\phi}]. \quad (4.10)$$

Daraus ergibt sich

$$\langle S \rangle_\mu = \int dx \left[\frac{1}{2} (\nabla \langle \phi(x) \rangle_\mu)^2 + u(\phi(x)) \right] \text{ mit } u(\phi) = d(\langle \phi^2 \rangle_\mu - \langle \phi \rangle_\mu^2) + \langle V(\phi) \rangle_\mu. \quad (4.11)$$

Die effektive Wirkung in dieser Näherung ist damit

$$\Gamma_{MF}[\bar{\phi}] = \int dx \frac{1}{2} (\nabla \bar{\phi}(x))^2 + U_0[\bar{\phi}] \quad (4.12)$$

$$u_0(\bar{\phi}) = \inf_{\mu \in \mathcal{P}} [u(\phi) + \langle \log p(\phi) \rangle_\mu | \langle \phi \rangle_\mu = \bar{\phi}] ; U_0[\bar{\phi}] = \int dx u_0(\bar{\phi}(x)). \quad (4.13)$$

Analog zur bisherigen Vorgehensweise erhält man hier

$$w_0(j) = \log z_0(j) ; z_0(j) = \int d\phi e^{j\phi - V(\phi) - \phi^2} = \int d\phi e^{j\phi - s_0(\phi)}. \quad (4.14)$$

Da die Pfadintegrale faktorisieren, erhält man an jedem Punkt ein gewöhnliches Integral. u_0 ist aber nun nicht mehr die LEGENDRE-Transformierte von w_0 :

$$u_0(\bar{\phi}) = d\bar{\phi} + \sup_j [j\bar{\phi} - w_0(j)]. \quad (4.15)$$

Das Feld $\bar{\phi}$ wird als konstant angenommen ($\nabla \bar{\phi} = 0$), wodurch Γ_{MF} gleich U_0 ist. Dies ist eine Art Homogenitätsbedingung an das mittlere Feld, die man im Falle des thermischen Gleichgewichtes stellt. Die effektive Wirkung in der Molekularfeldnäherung soll allerdings wie die ursprüngliche effektive Wirkung konvex sein. Deswegen verwendet man als effektive Wirkung in der Molekularfeldnäherung eigentlich die konvexe Hülle von U_0 . Man erhält sie durch zweimaliges Anwenden einer LEGENDRE-Transformation ($\Gamma_{MF} = \mathcal{L}^2(U_0)$).

4.2 Herleitung aus der Gitterformulierung der Quantenfeldtheorie

In diesem Kapitel wird neben einer anderen Variante der Herleitung auch gezeigt, wie man das Verfahren im Falle endlicher Temperaturen anwenden kann. Die Modifikationen die man an dem Verfahren im Falle endlicher Temperaturen durchführen muß, ergeben sich am einfachsten aus der Gitterformulierung.

Man betrachtet ein endliches Volumen, dessen Größe sich proportional zur inversen Temperatur verhält ($\Omega = \beta V$). In diesem Falle ist das SCHWINGER-Funktional

$$W[j] = \frac{1}{\Omega} \log \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + j \int dx \phi(x)}. \quad (4.16)$$

Hierbei wird schon von Anfang an eine Unabhängigkeit der Quellen vom Ort vorausgesetzt. Dies impliziert automatisch eine Ortsunabhängigkeit der zu j konjugierten Felder $\bar{\phi}$ (Homogenitätsbedingung). Weiterhin führt man das effektive Potential unter Nebenbedingungen (constraint effective potential - CEP) ein

$$U(\bar{\phi}) = -\frac{1}{\Omega} \log \int \mathcal{D}\phi \delta \left(\frac{1}{\Omega} \int dx \phi(x) - \bar{\phi} \right) e^{-S[\phi]}. \quad (4.17)$$

Da aus diesem Potential das effektive Potential und die SCHWINGER-Funktion berechnet werden kann, kann man statt dieser Potentiale auch nur das CEP betrachten. Für sehr große

4 Die Molekularfeldnäherung

Volumina gleichen sich CEP und effektives Potential. Auf dem Gitter wird die Wirkung dargestellt als

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} (\phi_i - \phi_j)^2 + \sum_i V(\phi_i). \quad (4.18)$$

Dabei wurden die Kopplungskonstanten und die Felder reskaliert. Der Index i läuft über alle $\Lambda = N^d$ Gitterpositionen. In der Summe des ersten Terms zählt j alle nächsten Nachbarn. Auf diese Weise erhält man das SCHWINGER-Funktional und das CEP

$$W[j] = \frac{1}{\Lambda} \log \int \prod_i d\phi_i e^{j \sum \phi_i - S[\phi]} \quad \text{und} \quad U(\bar{\phi}) = -\frac{1}{\Lambda} \log \int \prod_i d\phi_i \delta \left(\frac{1}{\Lambda} \sum \phi_i - \bar{\phi} \right) e^{-S[\phi]}.$$

Ersetzen wir nun in der Wirkung die Wechselwirkung mit den nächsten Nachbarn durch die Wechselwirkung mit dem mittleren Feld, $M = \frac{\sum_i \phi_i}{\Lambda}$, so erhält man

$$S_0 = -d\Lambda M^2 + \sum_i (d\phi_i^2 + V(\phi_i)). \quad (4.19)$$

Unter dieser Voraussetzung ist das CEP

$$U_0(\bar{\phi}) = -d\bar{\phi} + \sup_j [j\bar{\phi} - W_0[j]] \quad (4.20)$$

mit

$$W_0[j] = \log \int \prod_i d\phi_i \exp \left[j \sum_i \phi_i - S_0[\phi] \right]. \quad (4.21)$$

Den Beweis dafür werden wir in einem etwas allgemeineren Falle erbringen. Die Molekularfeldnäherung ist in der bisher behandelten Form noch nicht für den Fall endlicher Temperaturen geeignet, da mit der Abhängigkeit von der (imaginären) Zeit auch die Temperaturabhängigkeit verloren geht. Die Dynamik und damit die Wechselwirkungen der nächsten Nachbarn müssen wenigstens in der imaginäre Zeitrichtung erhalten bleiben. Lassen wir also die Wechselwirkung in p Richtungen ($q = d - p$) bestehen und zerlegen das Gitter in $\Lambda = \Lambda_p \times \Lambda_q$. $p = 0$ ergibt damit den oben behandelten Fall. Man erhält

$$S_p = \frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} (\phi_i - \phi_j)^2 - (d - p)\Lambda M^2 + \sum_i ((d - p)\phi_i^2 + V(\phi_i)). \quad (4.22)$$

Das CEP ist in dieser Näherung

$$\begin{aligned} U_p(\bar{\phi}) &= -\frac{1}{\Lambda} \log \int \prod_i d\phi_i \int \prod_{j \in \Lambda_q} \tilde{\phi}_j \delta \left(\frac{1}{\Lambda_p} \sum_{k \in \Lambda_p} \phi_k - \tilde{\phi}_j \right) \delta \left(\frac{1}{\Lambda_q} \sum_{j \in \Lambda_q} \tilde{\phi}_j - \bar{\phi} \right) e^{-S_p[\phi]} \\ &= -(d - p)\bar{\phi}^2 - \frac{1}{\Lambda} \log \int \prod_{i \in \Lambda_q} d\tilde{\phi}_i \delta \left(\frac{1}{\Lambda_q} \sum_i \tilde{\phi}_i - \bar{\phi} \right) e^{-\Lambda_p \tilde{U}(\tilde{\phi}_i)} \\ &= -(d - p)\bar{\phi}^2 - \frac{1}{\Lambda} \log \int \prod_{i \in \Lambda_q} d\tilde{\phi}_i \Lambda \int dk e^{i\Lambda k \bar{\phi} - ik\Lambda_p \sum_i \tilde{\phi}_i - \Lambda_p \tilde{U}_p(\tilde{\phi}_i)} \\ &= -(d - p)\bar{\phi}^2 - \frac{1}{\Lambda} \log \left[\Lambda \int dk e^{\Lambda(ik\bar{\phi} + W_p[-ik])} \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dabei wurde die FOURIER-Darstellung von δ verwendet. $\tilde{U}_p(\tilde{\phi})$ ist das oben behandelte CEP (U_0) in p Dimensionen. Das zugehörige SCHWINGER-Funktional ist

$$W_p(j) = \frac{1}{\Lambda_p} \log \int \prod_{j \in \Lambda_p} d\phi_j e^{j \sum_i \phi_i - S_p[\phi]}. \quad (4.24)$$

Für ein sehr großes Volumen kann man den Exponenten in (4.23) durch den Wert am Sattelpunkt ersetzen

$$U_p(\bar{\phi}) = -(d-p)\bar{\phi}^2 + \sup_j [j\bar{\phi} - W_p(j)]. \quad (4.25)$$

4.3 Herleitung durch Sattelpunktsnäherung in der Zustandssumme

In diesem Kapitel gehen wir nach dem in [49] vorgestellten Verfahren vor, um die Molekularfeldnäherung einzuführen. Um jedoch den Anschluß an die bisherigen Überlegungen sicherzustellen, müssen zuvor noch einige Grundlagen des Verfahrens erarbeitet werden.

Hier gehen wir von der Zustandssumme $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$, also dem Erzeugendenfunktional bei $j = 0$, aus. Eine Art klassisches Analogon ist, wenn nicht durch Entartung von Zuständen auch im klassischen Fall statistische Betrachtungen nötig sind

$$Z = e^{W[j=0]} = \exp(-\min_{\phi} S[\phi]). \quad (4.26)$$

In der Quantentheorie gilt diese Formel nicht, da durch die Quanteneffekte immer „statische“ Betrachtungen notwendig sind. Aber man kann nach einer effektive Wirkung $\Gamma[\phi]$ suchen, die in der Quantentheorie diese Eigenschaft der klassischen Wirkung besitzt

$$Z = \exp(-\min_{\phi} \Gamma[\phi]) \text{ d.h. } W[j=0] = -\min_{\phi} \Gamma[\phi]. \quad (4.27)$$

Dies ist dann der Fall, wenn $\Gamma[\phi]$, wie oben erwähnt, die LEGENDRE-Transformierte von $W[j]$ ist. Wenn man eine Sattelpunktsnäherung von der Zustandssumme macht, sieht man leicht, daß in erster Näherung die effektive Wirkung gleich der (klassischen) Wirkung ist. Diesen Zusammenhang werden wir später genauer behandeln, wenn es um ein allgemeines Näherungsverfahren geht.

Wir gehen davon aus, daß sich die Wirkung in einen nicht-lokalen Anteil $A(\{\phi_i\}, \{\phi_i^2\}, \dots, \{\phi_i^k\})$ und einen lokalen Anteil aufspalten läßt. (Die Schreibweise soll andeuten, daß mit $\{\phi_i^k\}$ Potenzen von Feldern am gleichen Ort gemeint sind, da in A auch Produkte von Feldern an verschiedenen Orten auftreten.) Der lokale Anteil ergibt ein Maß $d\rho[\phi] = \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} = \prod_i d\rho[\phi_i]$ ($Z_0 = \int d\rho[\phi]$ und der Index i soll von 1 bis $N \rightarrow \infty$ gehen). Es gilt

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_i d\rho[\phi_i] \exp \left[-A(\{\phi_i\}, \dots, \{\phi_i^k\}) \right] \\ &= \int \prod_i d\rho[\phi_i] \int \prod_{j,l} d\bar{\phi}_j^{(l)} dj_j^{(l)} \exp \left[-A(\{\phi_i\}, \dots, \{\phi_i^k\}) + \sum_{n,m} j_m^{(n)} (\phi_m^n - \bar{\phi}_m^{(n)}) \right] \\ &= \int \prod_{j,l} d\bar{\phi}_j^{(l)} dj_j^{(l)} \exp \left[-A(\{\bar{\phi}_j\}, \dots, \{\bar{\phi}_j^{(k)}\}) - \sum_{n,m} j_m^{(n)} \bar{\phi}_m^{(n)} + \sum_j w_0[j_i^{(1)}, \dots, j^{(k)}] \right]. \end{aligned}$$

4 Die Molekularfeldnäherung

(Die Indizes j und m laufen von 1 bis N ; l und n von 1 bis k .) Ein Feld $\bar{\phi}_i^{(n)}$ wurde für jede Potenz von ϕ_i eingeführt, die im nicht-lokalen Anteil der Wirkung steht. Außerdem wurde $\delta(\bar{\phi} - \phi) = \int dj e^{j(\bar{\phi} - \phi)}$ verwendet. w_0 ist definiert als

$$e^{w_0[j_i^{(1)}, \dots, j_i^{(k)}]} = \int d\rho(\phi_i) e^{\sum_l \phi_i^l j_i^{(l)}} \quad (4.28)$$

In dieser Form verwendet man eine Sattelpunktsnäherung von Z :

$$Z \approx \exp \left\{ -A(\{\hat{\bar{\phi}}_i\}, \dots, \{\hat{\bar{\phi}}_i^{(k)}\}) - \sum_{i,l} \hat{j}_i^{(l)} \hat{\bar{\phi}}_i^{(l)} + \sum_i w_0(\hat{j}_i^{(1)}, \dots, \hat{j}_i^{(k)}) \right\}. \quad (4.29)$$

Dabei sind die $\hat{\bar{\phi}}_i^{(l)}$ und die $\hat{j}_i^{(l)}$ Lösungen des Gleichungssystems (Sattelpunktsbedingungen)

$$\frac{\partial A(\{\bar{\phi}_i\}, \dots, \{\bar{\phi}_i^{(k)}\})}{\partial \bar{\phi}_i^{(l)}} = -j_i^{(l)}; \quad \frac{\partial w_0(j_i, \dots, j_i^{(k)})}{\partial j_i^{(l)}} = \bar{\phi}_i^{(l)}. \quad (4.30)$$

Die Sattelpunktsbedingung kann man aber auch in anderer Form aufschreiben:

$$\begin{aligned} Z &= \exp \left\{ \sup_{\{\bar{\phi}\}} \left[-A(\{\bar{\phi}_i\}, \dots, \{\bar{\phi}_i^{(k)}\}) - \inf_j \left[\sum_{i,l} j_i^{(l)} \bar{\phi}_i^{(l)} - \sum_i w_0(j_i^{(1)}, \dots, j_i^{(k)}) \right] \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\min_{\{\bar{\phi}\}} \left[A(\{\bar{\phi}_i\}, \dots, \{\bar{\phi}_i^{(k)}\}) + \sum_i \gamma_0(\bar{\phi}_i, \dots, \bar{\phi}_i^{(k)}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

γ_0 ist wieder die LEGENDRE-Transformierte von w_0 ($\Gamma_0 = \sum_i \gamma_0(\bar{\phi}_i, \dots, \bar{\phi}_i^{(k)})$; $W_0 = \sum_i w_0(j_i, \dots, j_i^{(k)})$). Man erhält daraus eine effektive Wirkung von

$$\Gamma_{MF}(\{\bar{\phi}_i\}, \dots, \{\bar{\phi}_i^{(k)}\}) = A(\{\bar{\phi}_i\}, \dots, \{\bar{\phi}_i^{(k)}\}) + \Gamma_0(\bar{\phi}_i, \dots, \bar{\phi}_i^{(k)}). \quad (4.32)$$

Im Falle der in diesem Kapitel verwendeten skalaren Feldtheorie und bei einem homogenen mittleren Feld $\bar{\phi}$ ($\partial_\mu \bar{\phi} = 0$) ist

$$\begin{aligned} A(\{\bar{\phi}_i\}) &= \sum_{\langle ij \rangle} \bar{\phi}_i \bar{\phi}_j = \sum_i d \bar{\phi}_i^2 \\ \Gamma_{MF} &= \sum_i \gamma_{MF}(\bar{\phi}_i) \\ \text{mit } \gamma_{MF}(\bar{\phi}) &= -d\bar{\phi} + \gamma_0(\bar{\phi}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Zu dieser Herleitung folgen hier noch einige ergänzende Bemerkungen: Die Annahme $\bar{\phi}_i = \bar{\phi}_j$ wurde in allen drei Herleitungen der Molekularfeldnäherung verwendet. Ohne sie würden die Gleichungen (4.30) eine Verknüpfung unterschiedlicher Gitterpunkte beinhalten. Die einzelnen Potenzen des Feldes ϕ_i (am gleichen Ort) werden hier getrennt behandelt (ein Strom $j^{(l)}$ und ein Feld $\bar{\phi}^{(l)}$ für jede Potenz). Dies liegt daran, daß man zwar die Korrelationen zweier verschiedener Gitterpunkte als klein annehmen kann ($\langle \phi_i \phi_j \rangle \approx \langle \phi_i \rangle \langle \phi_j \rangle$), es jedoch im allgemeinen immer Autokorrelationen gibt ($\langle \phi_i^2 \rangle \neq \langle \phi_i \rangle \langle \phi_i \rangle$). Es besteht noch eine gewisse Uneindeutigkeit bei der Definition von A , da man durchaus noch lokale Anteile von S_0 zu A

hinzufügen kann. Man kann aber zeigen, daß dies auf zu (4.30) äquivalente Sattelpunktsbedingungen führt. Es sei

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\{\phi_i\}, \dots, \{\phi_i^m\}) &= A(\{\phi_i\}, \dots, \{\phi_i^k\}) + C \sum_i \phi_i^l \\ \text{und } \tilde{w}_0 &= \int \prod \rho[\phi_i] e^{-S_0[\phi] - C \sum_i \phi_i^l + \sum_i \sum_m^k j_i^{(m)} \phi_i^m}.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Ist l größer als k , so gilt nach den Sattelpunktsbedingungen $j_i^{(l)} = -C$, und man erhält wieder dieselben Gleichungen, da $\tilde{w}_0(j_i, \dots, j_i^{(k)}, j_i^{(l)} = -C) = w_0(j_i, \dots, j_i^{(k)})$. Wenn l kleiner oder gleich k ist, erhält man durch eine einfache Verschiebung der Ströme ($j \rightarrow j_i^{(l)} - C$) wieder die ursprünglichen Sattelpunktsbedingungen

$$\begin{aligned}\tilde{w}_0(j_i, \dots, j_i^{(l)} - C, \dots, j_i^{(k)}) &= w_0(j_i, \dots, j_i^{(k)}) \\ \frac{\partial \tilde{A}(\{\bar{\phi}_i\}, \dots, \{\bar{\phi}_i^k\})}{\partial \bar{\phi}_i^{(l)}} &= \frac{\partial A(\{\bar{\phi}_i\}, \dots, \{\bar{\phi}_i^k\})}{\partial \bar{\phi}_i^{(l)}} + C = -j_i^{(l)}.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Durch die Sattelpunktsnäherung erhält man zunächst nur $W = \log Z$, das von keinem Parameter mehr abhängt. Die Parameter werden durch das Gleichungssystem (4.30) eliminiert. Eliminiert man jedoch nur durch die erste Bedingung j , so erhält man das bekannte Resultat $\Gamma[\bar{\phi}]$. Die zweite Bedingung setzt den Vakuumerwartungswert auf das Minimum dieser Funktion. Zur Untersuchung von Symmetrien und (spontan) gebrochenen Symmetrien ist es oft hilfreich, die Funktion $\Gamma[\bar{\phi}]$ statt W zu untersuchen. Gebrochene Symmetrie läßt sich dann an der Form der Funktion erkennen. Dieses Verfahren wird auch in Kapitel 6.2.4 verwendet.

4.4 Zusammenfassende Bemerkungen und Aussagen über spontan gebrochene Symmetrie mit Hilfe der Molekularfeldnäherung

Im wesentlichen erhält man durch alle drei Verfahren das gleiche Ergebnis. Alle drei Verfahren verwenden mehr oder weniger explizit eine Gitterformulierung, um eine Unterscheidung zwischen dem lokalen und dem nicht-lokalen Anteil zu treffen. Man kann das Ergebnis jedoch auch den Grenzfall eines unendlich großen Volumens und unendlich vieler Gitterpunkte betrachten. Durch die in allen Verfahren verwendete Homogenitätsbedingung erhält man an jedem Gitterpunkt die gleiche nulldimensionale Feldtheorie. Aus Pfadintegralen werden also gewöhnliche Integrale.

Betrachtet man eine allgemeine effektive Wirkung der Form

$$\Gamma[\bar{\phi}] = \sum_x \left(\frac{1}{2} (\partial \bar{\phi})^2 + U(\bar{\phi}) \right).\quad (4.36)$$

Eigentlich ist dies schon eine Einschränkung, da durchaus auch noch andere Ableitungsterme auftreten können. $U(\bar{\phi})$ ist das effektive Potential. Wenn die Homogenitätsbedingung $\partial_\mu \bar{\phi} = 0$ gilt, so sind effektive Wirkung und effektives Potential gleich. Die Homogenitätsbedingung kann man als eine Art Minimierung des ersten Termes verstehen.

Betrachtet man ein Modell mit einer \mathbb{Z}_2 Symmetrie ($\phi \rightarrow -\phi$), so werden S , V , Γ und U dieser Symmetrie gehorchen. Klassisch betrachtet man die Symmetrie als spontan gebrochen, wenn es zwei Minima bei $\phi = c$ und $\phi = -c$ gibt. U gehorcht dann zwar noch der Symmetrie,

aber der Grundzustand des Systems liegt in einem der beiden Minima und verletzt damit die Symmetrie. Etwas anders ist dies in einer Quantentheorie. Auf einem endlichem Gitter ist $U(\phi)$ analytisch, konvex und symmetrisch. Deswegen ist $\langle \phi \rangle$ immer Null, und es kommt zu keiner spontan gebrochenen Symmetrie. Bei einem Gitter mit unendlich vielen Gitterpunkten ist $U(\phi)$ aber nicht mehr analytisch. Da das effektive Potential immer noch konvex sein muß, gibt es nun die zusätzliche Möglichkeit eines effektiven Potentials, das im Intervall $[-c, c]$ konstant ist. Bei einem solchen effektiven Potential gilt im Falle einer Quantentheorie die Symmetrie als spontan gebrochen. Die beiden Endpunkte $-c$ und c korrespondieren mit zwei Gleichgewichtszuständen. Die Zustände dazwischen resultieren aus Linearkombinationen dieser beiden Zustände.

Das Potential U_0 ist im allgemeinen nicht konvex. Man verwendet deswegen eigentlich immer die konvexe Hülle von U_0 als effektives Potential in der Molekularfeldnäherung. Aber auch aus U_0 läßt sich erkennen, wann die Symmetrie spontan gebrochen ist. Die Symmetrie gilt in dem hier behandelten Falle als spontan gebrochen, wenn es zwei gleiche Minima von U_0 gibt. Statt U_0 kann man auch u_0 verwenden, da das Potential an jedem Gitterpunkt gleich ist.

Die LEGENDRE-Transformation wird im allgemeinen wie folgt ausgeführt: Man löst die Gleichung $\bar{\phi} = \frac{\partial W_0[j]}{\partial j}$ nach $j[\bar{\phi}]$ auf und erhält

$$\Gamma_0[\bar{\phi}] = j[\bar{\phi}]\bar{\phi} - W[j[\bar{\phi}]]. \quad (4.37)$$

Wenn $u_0(\phi = v)$ ein Minimum ist, so gilt (da $u_0 = -2dv + \gamma_0$ und γ_0 die LEGENDRE-Transformierte von w_0)

$$0 = u_0'(v) \Rightarrow j(v) = 2dv. \quad (4.38)$$

Da aber aus der Minimierung von u_0 folgt, daß v gleich $\langle \phi \rangle$ ist, so gilt

$$v = w_0'(j = 2dv) = \frac{\int d\phi \phi e^{2dv - s_0(\phi)}}{\int d\phi e^{2dv - s_0(\phi)}}. \quad (4.39)$$

Dies ist die sogenannte Selbstkonsistenzgleichung. Sie hat immer die Lösung $v = 0$. Ob sie noch andere Lösungen hat und ob für diese $u_0(v) < u_0(0)$ gilt (also ob die Symmetrie gebrochen ist), hängt meist davon ab, ob u_0 am Ursprung konkav ist ($u_0''(0) < 0$). Dies bedeutet aber

$$-2d + \gamma_0''(\bar{\phi} = 0) = -2d + \frac{1}{w_0''(j(\bar{\phi} = 0))} < 0. \quad (4.40)$$

Man erhält als hinreichende aber nicht notwendige Bedingung für die Brechung der Symmetrie in der Molekularfeldnäherung

$$w_0''(0) = \frac{\int d\phi \phi^2 e^{-s_0(\phi)}}{\int d\phi e^{-s_0(\phi)}} = \langle \phi^2 \rangle > \frac{1}{2d}. \quad (4.41)$$

Es ist bekannt, daß die Molekularfeldnäherung besser wird je mehr nächste Nachbarn vorhanden sind, das bedeutet die Näherung wird besser, je größer die Dimension ist. In diesem Falle ist es nicht sinnvoll, die Näherung in ein- und zweidimensionalen Systemen zu verwenden. Da es hier aber um grundsätzliche Aussagen sowie um die generelle Verwendbarkeit der Molekularfeldnäherung und nicht um genaue Aussagen über den Punkt des Phasenübergangs gehen soll, ist die Anwendung der Molekularfeldnäherung in niedrigen Dimensionen legitim.

4 Die Molekularfeldnäherung

Die Molekularfeldnäherung ist dem Limes starker Kopplung verwandt, da man auch dort im Endeffekt ein nulldimensionales Modell betrachtet. Es gibt jedoch zwei wesentliche Unterschiede. Zum einen wird im Limes starker Kopplung die Autokorrelation nicht berücksichtigt, zum anderen gilt dort die Homogenitätsbedingung nicht mehr. Im Limes starker Kopplung hat man an jedem Gitterpunkt ein unabhängiges System. In der Molekularfeldnäherung ist die Kopplung der Systeme so stark, daß man an jedem Gitterpunkt das gleiche System erhält.

5 Zur Existenz einer supersymmetrischen Molekularfeldnäherung

Für ein Modell mit bosonischen Feldern ist die Molekularfeldnäherung bekannt. Nun soll sie möglichst so auf den fermionischen Anteil eines supersymmetrischen Modells ausgedehnt werden, daß die Supersymmetrie erhalten bleibt. Natürlich ist die volle Supersymmetrie nicht mit der Näherung vereinbar, da in den Transformationen Ableitungen auftauchen. In der Gitterformulierung bedeutet dies, daß die Supersymmetrie Felder an unterschiedlichen Punkten miteinander verbindet. Man kann also nur eine Symmetrie an jedem Gitterpunkt verlangen. Diese soll im nächsten Kapitel genauer definiert werden. Um zu überprüfen, unter welchen Umständen sich Molekularfeldnäherung und Supersymmetrie miteinander verbinden lassen, benötigen wir weiterhin eine genaue Definition dessen, was wir unter einer Molekularfeldnäherung verstehen. Wir müssen Eigenschaften der Näherung festlegen, um zu entscheiden, wann eine solche Näherung noch möglich ist. Diese Festlegungen sind gleichzeitig die Voraussetzungen für die späteren Aussagen bezüglich der Existenz der Molekularfeldnäherung.

Es gibt zwei verschiedene Wege zu einer supersymmetrischen Molekularfeldnäherung zu gelangen. Man kann versuchen, die bosonische Näherung mit fermionischen Termen so zu erweitern, daß ein supersymmetrisches Modell entsteht. Der andere Weg besteht darin, erst eine fermionische Variante der Molekularfeldnäherung zu konstruieren, sie durch die bosonische Näherung zu ergänzen, und sie dann auf die Vereinbarkeit mit der Supersymmetrie zu untersuchen.

5.1 Supersymmetrie an einem Gitterpunkt

Die Supersymmetrie an einem Gitterpunkt ergibt sich aus der vollen Symmetrie durch ein Verschwinden der Ableitungen. On-shell kann weiterhin das Superpotential in den Transformationen beim Übergang zur Supersymmetrie an jedem Gitterpunkt verändert werden. Eine solche Veränderung ist im Falle der Molekularfeldnäherung auch zu erwarten, da durch diese Näherung Teile der kinetischen Terme zum Potential hinzugefügt werden. In 1 + 1 Dimensionen erhält man (off-shell):

$$\begin{aligned}
 \delta A &= \bar{\beta} \gamma_* \psi & \delta A &= \bar{\beta} \gamma_* \psi \\
 \delta \psi &= (i \gamma_* \not{\partial} A + F) \beta & \delta \psi &= F \beta \\
 \delta \bar{\psi} &= \bar{\beta} (i \gamma_* \not{\partial} A + F) & \delta \bar{\psi} &= \bar{\beta} F \\
 \delta F &= i \bar{\beta} \not{\partial} \psi & \delta F &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

On-shell gelangt man durch die Ersetzung $F = -\widetilde{W}'$, wo hingegen in der vollen Supersymmetrie (1 + 1 Dimensionen) F durch $-W'$ ersetzt wird. Eine invariante Wirkung für diese Transformationen ist

$$\widetilde{S} = (\widetilde{W}'(A))^2 + \widetilde{W}''(A) \bar{\psi} \gamma_* \psi. \tag{5.2}$$

Das Ziel, das man mit Hilfe der Molekularfeldnäherung letztendlich erreichen möchte, ist, wie im Falle endlicher Temperaturen üblich, die Zeitrichtung von der Näherung auszunehmen. Damit man in diesem Falle ein eindimensionales supersymmetrisches Modell erhält, muß man die oben definierte Supersymmetrie an jedem Gitterpunkt fordern.

Diese Form der Supersymmetrie soll hier als nulldimensionale Supersymmetrie bezeichnet werden. In null Dimensionen existieren keine Spinoren, deshalb kann keine Supersymmetrie konstruiert werden. Hier soll also unter nulldimensionaler Supersymmetrie eine Symmetrie verstanden werden, die, wie oben beschrieben, aus der vollen Supersymmetrie hervorgeht. Dadurch wird bei Einschränkung der Näherung auf die räumliche Dimension (in $1 + 1$ Dimensionen), ähnlich der dimensional Reduktion, ein eindimensionales supersymmetrisches Modell aus einem zweidimensionalen erzeugt. Anders ausgedrückt: Die volle Supersymmetrie bleibt erhalten, wenn man nach der Näherung von konstanten Feldern ausgeht.

Es wird verlangt, daß diese Symmetrie für $S_0[\phi]$ gilt, so daß auch $W_0[j]$ die Symmetrie erfüllt. Dadurch gilt sie auch für die genäherten mittleren Felder, und die WARD-Identitäten sind auch nach der Näherung erfüllt.

5.2 Bedingungen an eine supersymmetrische Molekularfeldnäherung

Die hier aufgeführten Bedingungen sollen Kriterien dafür liefern, wann eine Näherung als supersymmetrische Molekularfeldnäherung bezeichnet werden kann, und wann eine solche Näherung nicht existiert.

Die Näherung soll die folgenden Bedingungen erfüllen (bezüglich der Wirkung S_0):

1. Durch die Näherung werden die kinetischen Terme (Ableitungen) in der LAGRANGE-Dichte durch lokale Terme (im Idealfall die lokalen Anteile der Ableitungen) ersetzt. Es treten damit keinerlei Wechselwirkungen unterschiedlicher Gitterpunkte mehr auf.
2. An jedem Gitterpunkt soll die nulldimensionale Supersymmetrie gelten.
3. Beim Verschwinden der fermionischen Felder soll man als Ergebnis die bekannte bosonische Näherung erhalten.
4. Die Terme, die statt der kinetischen Terme hinzukommen, sollen keine Kopplungen zwischen Fermionen und Bosonen enthalten.

Es wird sich jedoch zeigen, daß eine solche Näherung nicht existiert.

5.3 Supersymmetrische Erweiterung der bosonischen Näherung durch fermionische Terme

Hier wird nun eine Erweiterung der bosonischen Mean-Field-LAGRANGE-Dichte (und der Wirkung S_0) gesucht, so daß sich ein supersymmetrisches Modell an jedem Gitterpunkt ergibt. Die genäherte bosonische Wirkung (EUKLIDisch) ist gegeben als

$$S_0 = \sum_i \left[2A_i^2 + \frac{1}{2}(W'(A_i))^2 - K_i A_i \right] \quad (5.3)$$

oder als

$$S_0 = \sum_i 2A_i^2 - 2\Lambda M^2 + \sum_i \frac{1}{2}(W'(A_i))^2 \quad (5.4)$$

$$M = \frac{\sum_i A_i}{\Lambda}. \quad (5.5)$$

In (5.3) kann man den Stromterm und in (5.4) das mittlere Feld M zunächst vernachlässigen. Die Stromterme kann man später, wie in Kapitel 2.8.4 beschrieben, hinzufügen, und das mittlere Feld muß die WARD-Identitäten erfüllen. Also ergibt sich die Frage, wie man aus der verbleibenden bosonischen Wirkung durch Hinzufügen von fermionischen Termen eine supersymmetrische Wirkung (nulldimensional) konstruieren kann. ($\bar{\psi}\gamma_*\psi$ entspricht $2i\psi_1\psi_2$.) Für die Wirkung $\tilde{S}(A, \psi)$ dieser Näherung muß gelten

$$\tilde{S}_0(A, \psi) = 2A^2 + \frac{1}{2}(W'(A))^2 + (\text{Fermionenterme}) = \frac{1}{2}\widetilde{W}'(A) + \frac{1}{2}\widetilde{W}''(A)\bar{\psi}\gamma_*\psi. \quad (5.6)$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} \widetilde{W}'(A) &= \sqrt{4A^2 + (W'(A))^2} \\ \widetilde{W}''(A) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4A^2 + (W'(A))^2}} (2W'W'' + 8A). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Also ist die erweiterte Wirkung

$$\tilde{S}_0 = \sum_i \left[2A_i^2 + \frac{1}{2}(W'(A_i))^2 + \frac{(W'(A_i)W''(A_i) + 4A_i)}{\sqrt{4A_i^2 + (W'(A_i))^2}} \bar{\psi}\gamma_*\psi \right]. \quad (5.8)$$

Daß sich diese Näherung nach den bekannten Verfahren aus den kinetischen Termen der Fermionen ergibt, ist zu bezweifeln. (In Kapitel 5.4 wird dies näher untersucht.) Für ein freies Modell ergeben sich nur Korrekturen der Masse der Fermionen, aber bei anderen Modellen bleiben die Wurzelterme bestehen. Die entstehenden Korrekturen ($(W'' - \widetilde{W}'')\bar{\psi}\gamma_*\psi$) beinhalten im allgemeinen Kopplungen zwischen Fermionen und Bosonen. Deshalb ist dies keine supersymmetrische Molekularfeldnäherung im Sinne von Kapitel 5.2.

Um diese Tatsache zu verdeutlichen betrachten wir das Superpotential $W = \frac{m}{2}A^2 + \frac{g}{3}A^3$. Es ergibt sich die LAGRANGE-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial A)^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\not{\partial}\psi + m^2 A^2 + 2mgA^3 + g^2 A^4 + m\bar{\psi}\gamma_*\psi + gA\bar{\psi}\gamma_*\psi. \quad (5.9)$$

Die Korrekturen durch die Autokorrelation im Rahmen der Molekularfeldnäherung können in diesem Modell als Korrekturen der Masse m^2 aufgefaßt werden. Dies bewirkt jedoch nicht nur eine Veränderung der Masse von Fermionen und Bosonen, sondern auch eine Veränderung der Kopplungskonstante für A^3 . Diese kann aber nicht auf Näherungen des kinetischen Termes zurückgeführt werden.

Das gleiche Problem ergibt sich, wenn man die off-shell LAGRANGE-Dichte betrachtet. Eine LAGRANGE-Dichte, die zu einer bezüglich der Supersymmetrie an jedem Gitterpunkt invarianten Wirkung führt, ist hier

$$\tilde{\mathcal{L}} = \widetilde{W}'(\phi)F - \frac{1}{2}F^2 + \widetilde{W}''(\phi)\bar{\psi}\gamma_*\psi + (\text{beliebige Terme in F}). \quad (5.10)$$

Bei den „Termen in F“ kann es sich nur um maximal quadratische Terme in den Hilfsfeldern handeln ($KF + GF^2$ mit K und G Konstanten), da sonst die Hilfsfelder keine rein algebraischen Bewegungsgleichungen haben. Nach der Ersetzung der Hilfsfelder ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{(1-2G)} \left((\widetilde{W}'(\phi))^2 + K\widetilde{W}'(\phi) - \frac{1}{2} \left((\widetilde{W}'(\phi))^2 + 2K\widetilde{W}'(\phi) + K^2 \right) \right) + \widetilde{W}''\bar{\psi}\gamma_*\psi \\ &= \frac{1}{(1-2G)} \left(\frac{1}{2}(\widetilde{W}'(\phi))^2 - \frac{1}{2}K^2 \right) + \widetilde{W}''\bar{\psi}\gamma_*\psi.\end{aligned}\quad (5.11)$$

Die zwei Konstanten, die man durch die zusätzlichen Terme der Hilfsfelder hinzugewonnen hat, reichen jedoch im allgemeinen nicht aus, um trotz der oben beschriebenen Schwierigkeiten zu einer supersymmetrischen Molekularfeldnäherung zu gelangen.

Es gibt zwei Möglichkeiten das neue Superpotential \widetilde{W} aus W zu erzeugen. Entweder man verlangt, daß sich für die Bosonen nur eine Massenkorrektur und keine Veränderung von Kopplungen ergeben. Dann erhält man für die Fermionen das unbefriedigende Resultat (5.8). Oder aber man setzt voraus, daß sich für die Fermionen nur eine Massenkorrektur ergibt, da auch die Fermionen in den kinetischen Termen quadratisch auftauchen. In diesem Falle würde man $\widetilde{W}(\phi) = W(\phi) + C\phi$ (C Konstante) setzen. Dann ergibt sich jedoch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(W'(\phi))^2 + A\phi W'(\phi) + (W''(\phi) + A)\bar{\psi}\gamma_*\psi.\quad (5.12)$$

Dies bedeutet im allgemeinen eine Veränderung der Kopplungskonstanten des Feldes ϕ und nicht nur eine Korrektur der Masse. Wenn die Felder der Fermionen verschwinden, so erhält man dadurch nicht die bekannte bosonische Näherung.

Es gibt also keine Möglichkeit, die Autokorrelationen sinnvoll (das bedeutet nicht nur in einem freien massiven Modell) in das Superpotential einzubinden. Sie verletzen die Supersymmetrie.

5.4 Eine Molekularfeldnäherung für Fermionen

In Falle von fermionischen Feldern muß man sich natürlich ein paar Gedanken um die grundsätzliche Existenz und Bedeutung von einem effektiven Potential machen, da ein klassisches Analogon von fermionischen Feldern nicht existiert. Darauf werden wir später eingehen.

Unabhängig davon kann man zunächst versuchen, wie bei der bosonischen Molekularfeldnäherung vorzugehen. Setzt man den kinetischen Term der Fermionen auf das Gitter, so erhält man

$$\sum_i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i = \sum_\mu \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{i,j \in \Lambda_\mu} \left(\psi_i^\dagger \gamma_0 \gamma^\mu \psi_i - \psi_i^\dagger \gamma_0 \gamma^\mu \psi_j \right).\quad (5.13)$$

Die zweite Summe geht dabei über alle nächsten Nachbarn in der μ -Richtung ($j = i - 1$ für die Linksableitung). Mit Hilfe eines faktorisierenden Maßes erhält man daraus

$$\left\langle \sum_i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i \right\rangle = \sum_\mu \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{i,j \in \Lambda_\mu} \left(\langle \psi_i^\dagger \gamma_0 \gamma^\mu \psi_i \rangle - \langle \psi_i^\dagger \rangle \gamma_0 \gamma^\mu \langle \psi_j \rangle \right).\quad (5.14)$$

Der erste Term liefert wie im bosonischen Falle einen zusätzlichen Beitrag zur Wirkung. Für MAJORANA-Fermionen verschwindet dieser Term. In der Molekularfeldnäherung ist es üblich, nach der Näherung, die auf einer Gitterformulierung aufbaut, wieder den Limes eines unendlich großen Gitters zu betrachten. Dies ist bei Bosonen möglich, da jeder der beiden Terme, in

die die Ableitung aufgespalten wird (lokaler und nicht-lokaler Anteil), die LORENTZ-Invarianz im Kontinuumslikes nicht bricht. Für Fermionen ist dies jedoch anders. Nur der gesamte kinetische Term ist LORENTZinvariant aber im allgemeinen nicht sein lokaler und nicht-lokaler Anteil. Man erhält dadurch im Kontinuumslikes einen nicht LORENTZinvarianten Beitrag zur Wirkung.

Der zweite Term hat dieselbe Bedeutung wie $d\bar{\phi}^2$ im bosonischen Falle. Allerdings verschwindet das mittlere Feld der Fermionen auch, wenn man den nicht LORENTZinvarianten Beitrag des ersten Terms zur Wirkung berücksichtigt. Damit ist hier gemeint, daß der Vakuumerwartungswert (ohne Ströme) verschwindet. Man kann einen Stromterm in Form von $\bar{\vartheta}\psi + \bar{\psi}\vartheta$ (fermionischer Strom ϑ : MAJORANA-Fermion, wenn ψ MAJORANA-Fermion ist) zur Wirkung hinzufügen. Damit ergibt sich ein SCHWINGER-Funktional $W[\bar{\vartheta}, \vartheta] \sim \bar{\vartheta}M\vartheta$ (M Matrix). Analog zur LEGENDRE-Transformation bei den bosonischen Feldern setzt man $\langle\psi\rangle = \frac{\delta W[\bar{\vartheta}, \vartheta]}{\delta\vartheta} \sim \vartheta$ und $\langle\bar{\psi}\rangle = -\frac{\delta W[\bar{\vartheta}, \vartheta]}{\delta\bar{\vartheta}} \sim \bar{\vartheta}$. (Dies ist als eine Art „Minimierung“ von $\bar{\vartheta}\langle\psi\rangle + \langle\bar{\psi}\rangle\vartheta - W[\bar{\vartheta}, \vartheta]$ bezüglich $\bar{\vartheta}$ und ϑ zu verstehen, aus denen sich $\vartheta(\psi, \bar{\psi})$ und $\bar{\vartheta}(\psi, \bar{\psi})$ ergeben.) Damit ergibt sich für diese Art von effektivem Potential

$$\Gamma[\langle\bar{\psi}\rangle, \langle\psi\rangle] = \min_{\bar{\vartheta}, \vartheta} [\bar{\vartheta}\langle\psi\rangle + \langle\bar{\psi}\rangle\vartheta - W[\bar{\vartheta}, \vartheta]] \sim \langle\bar{\psi}\rangle M' \langle\psi\rangle. \quad (5.15)$$

Das Minimum von Γ bezüglich $\langle\psi\rangle$ und $\langle\bar{\psi}\rangle$ liegt immer bei $\langle\psi\rangle = 0$ und $\langle\bar{\psi}\rangle = 0$. Dies gilt auch, wenn man einen zusätzlichen Term $\langle\psi_i^\dagger\rangle\gamma_0 \sum_\mu \gamma^\mu \langle\psi_i\rangle$ zur Wirkung hinzufügt. In diesem Sinne kann man auch für die fermionischen Felder eine effektive Wirkung einführen. Als Resultat erhält man jedoch nur die Bedingung, daß der fermionische Erwartungswert verschwindet.

Man kann auch andere Diskretisierungen der Ableitung von Fermionen betrachten. Spaltet man eine solche Diskretisierung in einen lokalen und einen nicht-lokalen Anteil auf und verlangt die Homogenität des mittleren Feldes ($\langle\psi_j\rangle = \langle\psi_i\rangle$), so erhält man immer Beiträge zur Wirkung (S_0) der Form $\sum_i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i$ (lokaler Anteil) und statt $d\bar{\phi}^2$ im bosonischen Falle einen Beitrag $\sum_i \langle\bar{\psi}_i\rangle \gamma_\mu \langle\psi_i\rangle$ (verschwindet da die mittleren Felder null sind) für U_0 . Am besten ist es, wenn der nicht LORENTZinvariante Beitrag zur Wirkung auch für DIRAC-Fermionen verschwinden würde. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn man die symmetrische Ableitung $\partial = \sum_i \frac{1}{2} (\psi_{i+1} - \psi_{i-1})$ verwendet. In diesem Falle existiert kein lokaler Anteil. Da außerdem die mittleren Felder von Fermionen am Minimum der effektiven Wirkung vernachlässigt werden können, ergibt sich auch kein Beitrag aus dem nicht-lokalen Anteil des kinetischen Terms. Also kommt das Ergebnis einem Verschwinden der kinetischen Terme gleich. Vom Limes starker Kopplung unterscheidet es sich nur durch die Homogenitätsbedingung, die unterschiedliche Gitterpunkte miteinander verbindet.

Wesentlich aussagekräftiger als die oben beschriebene effektive Wirkung $\Gamma[\langle\bar{\psi}\rangle, \langle\psi\rangle]$ ist eine andere Form der effektiven Wirkung. Der Erwartungswert des Bilinears $\langle\bar{\psi}(x)\psi(x)\rangle$ verschwindet im allgemeinen nicht, und da man einen solchen Bilinear von fermionischen Feldern als bosonisches Feld auffassen kann, gibt es wieder eine gewisse Analogie zur klassischen Wirkung. Aus einer solchen effektiven Wirkung ließen sich Aussagen über Symmetrie und spontan gebrochene Symmetrie gewinnen. In der Herleitung von der Molekularfeldnäherung (Kapitel 4.3) werden die Ströme nur an die lokalen Potenzen (Produkte von Feldern an einem Ort) von Feldern gekoppelt, die im nicht-lokalen Anteil der Wirkung auftauchen. Die Kopplung von den Strömen an die Felder ψ und $\bar{\psi}$ sowie den Beitrag aus den kinetischen Termen kann man vernachlässigen, solange man beachtet, daß $\langle\bar{\psi}\rangle$ und $\langle\psi\rangle$ verschwinden. Eine Kopplung von einem Strom an das Feld $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ ist zwar in der Herleitung der Molekularfeldnäherung

(Kapitel 4.3) nicht verlangt, da solch ein Term nicht in den kinetischen Termen auftaucht, aber es lassen sich wesentlich mehr Aussagen aus einem solchen Term gewinnen.

Wenn es nur auf die Näherung eines Modells, in dem Fermionen und Bosonen auftauchen ankommt, und die Supersymmetrie nicht erhalten bleiben muß, so verwende man am besten folgende Form des effektiven Potentials, um eine gewisse Ähnlichkeit mit der Molekularfeldnäherung zu erhalten:

$$U_0(\bar{\phi}, \langle \bar{\psi}\psi \rangle) = -d\bar{\phi}^2 + \sup_{j,k} [j\bar{\phi} + k\langle \bar{\psi}\psi \rangle - W_0(j, k)] \quad (5.16)$$

$$W_0(j, k) = \log \int \prod_i d\phi_i d\psi_i d\bar{\psi}_i e^{j \sum_i \phi_i + k \sum_i \bar{\psi}_i \psi_i - S_0[\phi, \bar{\psi}, \psi]} \quad (5.17)$$

$$S_0[\phi, \bar{\psi}, \psi] = \sum_i (d\phi_i^2 + (W'(\phi_i))^2 + W''(\phi)\bar{\psi}\psi). \quad (5.18)$$

Aus der Minimierung dieses Potentials kann man dann Aussagen über die Symmetrien gewinnen. In dieser Arbeit geht es aber um die Eigenschaften supersymmetrische Modelle. Wenn eine Näherung die Supersymmetrie verletzt, ist sie somit nicht geeignet für diese Betrachtungen.

5.5 Schlußfolgerungen

Zusammenfassend sind also bei den beiden Verfahren zum Aufstellen einer supersymmetrischen Molekularfeldnäherung, das heißt einer Molekularfeldnäherung, die zu keiner gebrochenen Supersymmetrie führt, Probleme aufgetreten. (Hierbei handelt es sich nicht um spontan gebrochene Supersymmetrie, da die Wirkung die Symmetrie nicht mehr respektiert.) Die Ergänzung der genäherten bosonischen Wirkung zu einer supersymmetrischen Wirkung führt auf Wurzelterme im Superpotential. Eine einfache Verschiebung der Masse ist nicht möglich, da dies durch die Symmetrie zu einer Verschiebung von anderen Kopplungskonstanten führt. Ein wirkliches Analogon zu einer bosonischen Molekularfeldnäherung läßt sich für Fermionen nicht finden. Eine Näherung, die den Beitrag des kinetischen Terms vollständig vernachlässigt, ähnelt am meisten der bosonischen Molekularfeldnäherung. Wendet man dies jedoch zusammen mit der bosonischen Molekularfeldnäherung auf ein supersymmetrisches Modell an, so ist es verständlich, daß die Supersymmetrie gebrochen wird.

Die Schwierigkeiten bei der Herleitung einer Molekularfeldnäherung und die Brechung der Supersymmetrie im Zuge der Näherung haben im wesentlichen zwei Ursachen. Zum einen sind es die unterschiedlichen Eigenschaften von Fermionen und Bosonen im Bezug auf die Autokorrelationen. Für die Komponenten eines Spinors gilt immer $\psi_a(x)\psi_a(x) = 0$. Die Molekularfeldnäherung berücksichtigt nur den Anteil der Autokorrelationen des kinetischen Terms. Da für Fermionen ein gewisser Anteil der Autokorrelationen verschwindet, haben diese Anteile für Fermionen und Bosonen eine unterschiedlich große Bedeutung. Zum anderen ist das Transformationsverhalten von Fermionen unter der LORENTZ-Transformation. Während bei Bosonen der kinetische Term auch ohne den nicht lokalen Anteil LORENTZ-invariant ist, ist dies für Fermionen nicht der Fall. Ein lokaler Anteil des kinetischen Terms verletzt deswegen die LORENTZ-Symmetrie.

Bei diesem Resultat muß man natürlich fragen, ob nicht einige der Bedingungen in den Kapiteln 5.1 und 5.2 anders hätten gestellt werden können.

Die Bedingungen aus Kapitel 5.2 stellen eine Definition dessen dar, was hier unter einer Molekularfeldnäherung zu verstehen ist. Man könnte aber auch ein anderes Näherungsverfahren betrachten. Das Ziel war es hier, eine supersymmetrische faktorisierende Näherung (an jedem Gitterpunkt) zu finden:

$$\frac{1}{2}(\partial A)^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{1}{2}(W'(A))^2 + \frac{1}{2}W''(A)\bar{\psi}\gamma_*\psi \approx \frac{1}{2}(\widetilde{W}'(A))^2 + \frac{1}{2}\widetilde{W}''(A)\bar{\psi}\gamma_*\psi. \quad (5.19)$$

Einige Möglichkeiten sind dabei:

- 1) Ableitungen 0 setzen: dann $\widetilde{W} = W$ (keine gute Näherung, aber verträglich mit der Supersymmetrie an jedem Gitterpunkt)
- 2) GAUSSsche Näherung: Dann gilt $\widetilde{W} = \text{Konstante} \cdot A^2$. Die Konstante wird so angepaßt, daß die Näherung möglichst gut ist. (Eigentlich wird in der GAUSSschen Näherung nur der Potentialterm durch ein GAUSSsches Potential genähert. Kinetische Terme kommen in dieser Näherung auch vor. Sie wird im nächsten Kapitel behandelt.)
- 3) \widetilde{W} von Kapitel 5.3 wird mit den bekannten Problemen verwendet.

Keines dieser Verfahren erfüllt die Bedingungen, die an die Molekularfeldnäherung gestellt wurden. Die Verwendung anderer Näherungsverfahren sowie eine allgemeine Betrachtung über mögliche Näherungsverfahren soll erst im nächsten Kapitel erfolgen.

Auch die Bedingungen aus Kapitel 5.1 kann man in Frage stellen. Die Supersymmetrietransformationen könnten unter der Näherung auch in andere Transformationen übergehen. Ein Rest der Symmetrie könnte damit in irgendeiner Form bestehen bleiben. Bei der Näherung 1) in der vorangegangenen Aufzählung kann man leicht herausfinden, wie sich die Supersymmetrietransformationen bei der Näherung verändern. Dort ist es klar, daß die Ableitungen in den Transformationen verschwinden und man deswegen das erhält, was hier mit nulldimensionaler Supersymmetrie bezeichnet wurde. Die Molekularfeldnäherung ist aber nur für Quadrate der Ableitungen oder für Produkte der Form (Feld) \times (Ableitungen vom Feld) definiert. Dort wird der nicht-lokale Anteil durch eine Wechselwirkung mit dem mittleren Feld ersetzt. Deswegen ist nicht klar, was genau mit den Ableitungen in den Supersymmetrietransformationen unter Molekularfeldnäherung passiert.

Insgesamt ist die Molekularfeldnäherung nicht geeignet, im Falle von supersymmetrischen Modellen verwendet zu werden.

6 Allgemeine Betrachtungen zu weiteren möglichen Näherungsverfahren

Da es offensichtlich Schwierigkeiten mit der Molekularfeldnäherung für supersymmetrische Modelle gibt, werden hier noch weitere Näherungsverfahren aufgeführt. Dabei sollen gleichzeitig generelle Möglichkeiten, die man zum Aufstellen eines Näherungsverfahrens hat, dargestellt werden. Dieses Kapitel ist zugleich als ein Ausblick gedacht.

6.1 Das effektive Potential und die effektive Wirkung

Wie schon in Kapitel 4.1 erwähnt ergibt sich das effektive Potential aus einer LEGENDRE-Transformation des SCHWINGER-Funktional:

$$\Gamma[\Phi] = \sup_j \left[W[j] - \int d^n x j(x)\Phi(x) \right]. \quad (6.1)$$

Daraus folgt die Konvexität des effektiven Potentials und die Identifizierung seines Minimums mit dem Vakuumerwartungswert. Weiterhin ist

$$w(j) = - \frac{W[j]|_{j(x)=\text{const}}}{\int d^n x} \quad (6.2)$$

die Vakuumenergiedichte unter Anwesenheit von Wechselwirkungen mit einer konstanten Stromdichte j . Aus der LEGENDRE-Transformation folgt

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi} = -j(x). \quad (6.3)$$

Dies zeigt, daß der Vakuumerwartungswert bei verschwindenden Quellen ein stationärer Punkt in der effektiven Wirkung ist. Das Vakuum soll translationsinvariant sein. Deswegen ist der Vakuumerwartungswert ein stationärer Punkt des effektiven Potentials

$$V(\Phi) = - \frac{\Gamma[\Phi]|_{\Phi(x)=\text{const}}}{\int d^n x}. \quad (6.4)$$

Wie schon erwähnt gilt die Symmetrie als spontan gebrochen, wenn das effektive Potential ein von Null verschiedenes Minimum hat, die LAGRANGE-Dichte aber die Symmetrie respektiert. Auch das effektive Potential spiegelt diese Symmetrie wider, und es existieren zwei Minima, die im gleichen Abstand auf beiden Seiten des Koordinatenursprungs angeordnet sind. Analog zur MAXWELL-Konstruktion in der Thermodynamik ist das effektives Potential zwischen diesen beiden Minima die konvexe Hülle des ursprünglichen effektiven Potentials.

In der Quantenmechanik erkennt man dies alles sehr deutlich. Man kann dort das effektive Potential in folgender Weise einfach darstellen ([7])

$$\begin{aligned} V(\langle x \rangle) &= \min_{\{\phi\}} \left[\langle \phi | \hat{H} | \phi \rangle \mid \langle x \rangle = \langle \phi | \phi \rangle \right] \\ &= \min_{\{\phi(x)\}} \left[\int dx \left(\left| \frac{d\phi(x)}{dx} \right|^2 + U(x) |\phi(x)|^2 \right) \mid \langle x \rangle = \int dx |\phi(x)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Das klassische Potential habe zwei Minima ($U_{min} = U(x_1) = U(x_2)$). Zwei Wellenfunktionen ($\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$), die einen Erwartungswert $\langle x \rangle$ in jeweils einem dieser Minima ($\langle x \rangle = x_1$ und $\langle x \rangle = x_2$) haben, sollen zu einem Minimum des effektiven Potentials führen. Dann erhält man aber für jeden Wert $\langle x \rangle$ zwischen den beiden Minima den gleichen Wert für das effektive Potential, denn man kann immer eine Wellenfunktion aus einer Linearkombination von den beiden Wellenfunktionen ($\alpha\phi_1(x) + \beta\phi_2(x)$) konstruieren, die einen Erwartungswert zwischen x_1 und x_2 hat. Deswegen hat $V(\langle x \rangle)$ für $\langle x \rangle$ einen Wert, der kleiner oder gleich dem Wert bei $\langle x \rangle = x_1$ und $\langle x \rangle = x_2$ ist.

6.2 Näherungsverfahren

Das effektive Potential ist die LEGENDRE-Transformierte des SCHWINGER-Funktional (Erzeugendenfunktional). Aus dem Erzeugendenfunktional lassen sich alle N -Punkt-Funktionen berechnen. Umgekehrt kann man das Erzeugendenfunktional konstruieren, wenn alle N -Punkt-Funktionen bekannt sind. Natürlich kann man das Erzeugendenfunktional nur in einigen Fällen explizit bestimmen. Deswegen benötigt man Näherungsverfahren um wenigstens eine Approximation des effektiven Potentials zu erhalten. Hier werden zunächst Verfahren zur Näherung der Zustandssumme, des Erzeugendenfunktionals und des SCHWINGER-Funktional aufgeführt. Durch die Näherungen des SCHWINGER-Funktional erhält man auch eine Näherung des effektiven Potentials. Für einige Aussagen ist der Übergang zum effektiven Potential nicht notwendig. Selbst Aussagen über spontan gebrochene Symmetrien lassen sich in einigen Fällen direkt aus der genäherten Formel der Zustandssumme (Erzeugendenfunktional mit verschwindenden Strömen) ablesen. Dazu muß man allerdings oft noch einige Zusatzinformationen über bestimmte Eigenschaften der Symmetrie und die Art der Näherung besitzen.

Hier soll ein Modell mit einem bosonischen Feld ϕ betrachtet werden. Ausgangspunkt für Näherungen ist neben der Wirkung $S[\phi]$, deren Zustandssumme und Erzeugendenfunktional man im allgemeinen nicht berechnen kann, eine Hilfwirkung $S_0[\phi]$ deren Zustandssumme und Erzeugendenfunktional bekannt sind. Man kann nun formal folgende Entwicklung der Zustandssumme betrachten ($\lambda A[\phi] = (S[\phi] - S_0[\phi])$):

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} e^{-\lambda A[\phi]} = Z_0 + \sum_k \frac{(-\lambda)^k}{k!} \int \mathcal{D}\phi (A[\phi])^k e^{-S_0[\phi]} \\ &= \exp \left\{ -\lambda A \left[\frac{\delta}{\delta j} \right] \right\} e^{W_0[j]}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

wobei $Z_0 = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0}$ und $W_0[j] = \log \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0+j\phi}$. Dabei ist allerdings noch nichts darüber gesagt, ob die Reihe konvergiert, asymptotisch ist oder divergiert. Auf die gleiche Weise ergibt

sich eine Entwicklungsreihe für W ([17]):

$$W = W_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \langle A^k \rangle_{C,0}. \quad (6.7)$$

($\langle \rangle_{C,0}$ bezeichnet den zusammenhängenden Erwartungswert, der unter Verwendung von S_0 gebildet wurde.) Einer Näherung der Ordnung k entspricht eine Entwicklungsreihe, die nach dem Glied $k + 1$ abgebrochen wird. (W_0 ist also die Näherung nullter Ordnung.)

Eine weitere Möglichkeit der Entwicklung bietet eine Art Erweiterung der LAPLACESchen Methode (genaueres in [2]). Sie entspricht einer Sattelpunktsentwicklung, das heißt einer Entwicklung der Wirkung um den Punkt ($\phi(x) = \phi_0(x)$), an dem $e^{-S[\phi]}$ das Maximum annimmt. Man erhält ($\varphi = \phi - \phi_0$)

$$Z = e^{-S[\phi_0]} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int dx_1 dx_2 \frac{\delta^2 S[\phi_0]}{2\delta\phi_0(x_1)\delta\phi_0(x_2)} \varphi(x_1)\varphi(x_2) - \sum_{k=3}^{\infty} \int dx_1 \dots dx_k \frac{\delta^k S[\phi_0]}{k!\delta\phi_0(x_1)\dots\delta\phi_0(x_k)} \varphi(x_1)\dots\varphi(x_k) \right\}. \quad (6.8)$$

Das verbleibende Integral wird nach dem obigen Verfahren entwickelt. Dabei ist S_0 der quadratische Term der Entwicklung um ϕ_0 und λA der Rest dieser Entwicklung. Die entstehenden GAUSSschen Integrale kann man mit Hilfe der üblichen Verfahren lösen. Diese Art der Entwicklung ist dadurch gerechtfertigt, daß der wesentliche Beitrag zum Integral von dem Minimum der Wirkung kommt und die anderen Beiträge durch die Exponentialfunktion klein sind.

Wenn S_0 GAUSSsch ist, so kann man auch folgende Art der Entwicklung betrachten

$$Z = e^{-S[\phi_0]} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -S_0[\varphi] - \sum_{k=2}^{\infty} \int dx_1 \dots dx_k \frac{\delta^k (S[\phi_0] - S_0[\phi_0])}{k!\delta\phi_0(x_1)\dots\delta\phi_0(x_k)} \varphi(x_1)\dots\varphi(x_k) \right\}. \quad (6.9)$$

Wieder kann man hier das Integral wie oben angegeben entwickeln, wobei λA die Entwicklung von $(S - S_0)$ an der Stelle $\phi = \phi_0$ ist. Auch wenn die Hilfwirkung nicht von GAUSSscher Form ist, kann man sie zur Reihenentwicklung des verbleibenden Integrales verwenden:

$$Z = e^{-S[\phi_0]} \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\varphi]} e^{-(R_{\phi_0}[\varphi] - S_0)}. \quad (6.10)$$

Dabei ist $R_{\phi_0}[\varphi]$ die Entwicklung von $S[\phi]$ an der Stelle $\phi = \phi_0$ beginnend mit dem quadratischen Glied. Eine Entwicklung des Integrales erfolgt dann wieder analog Gleichung (6.6) (bzw. (6.7)) mit $\lambda A = R_{\phi_0}[\varphi] - S_0$.

Die Wirkung S_0 kann noch über freie Parameter verfügen. Diese Parameter sollen so festgelegt werden, daß man eine besonders gute Näherung erhält. Es ist natürlich schwer festzulegen, was eine „gute“ Näherung bedeutet. In einigen Fällen fordert man, daß bestimmte Relationen (zum Beispiel die SCHWINGER-DYSON-Gleichungen) auch für die genäherten Größen gelten sollen. Im allgemeinen sollen „gute“ genäherte Größen den ursprünglichen Größen möglichst nahe kommen. Da diese jedoch nur in wenigen Fällen bekannt sind, ist ein Vergleich meist nicht möglich. Die vollständige Reihe der Entwicklung (6.6) ist nicht abhängig von der Hilfwirkung und den darin enthaltenen Parametern. Geleitet von dem Prinzip der kleinsten Abhängigkeit, das STEVENSON in ([39]) eingeführt hat, kann man von den genäherten Größen verlangen, sie

sollen so wenig wie möglich von den Parametern der Hilfswirkung abhängen. Deswegen sollen in diesem Verfahren die genäherten Größen stationär in den Parametern der Hilfswirkung sein. (Dieses Verfahren wurde in [31] verwendet.) Allerdings fehlt eine mathematische Rechtfertigung für dieses Verfahren, auch wenn es in einigen Spezialfällen gute Resultate liefert. Es ist in der Tat fraglich, ob, wenn die genäherten Größen im Bezug auf ihre Abhängigkeit von den Parametern der Hilfswirkung den ursprünglichen Größen ähneln, sie ihnen auch im Bezug auf andere Eigenschaften entsprechen. Betrachtet man nur die erste Ordnung der Entwicklungsreihe (6.7), so gibt es eine mathematische Begründung für dieses Verfahren. Es entspricht dann dem Variationsprinzip ([10]):

$$\begin{aligned}
 e^W &= \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_0} e^{-(S-S_0)}}{Z_0} e^{W_0} \\
 &= \langle e^{-(S-S_0)} \rangle_0 e^{W_0} \geq e^{-\langle (S-S_0) \rangle_0} e^{W_0} \\
 \text{daraus folgt } W &\geq W_0 - \langle (S-S_0) \rangle_0.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Dabei wurde wieder die JENSEN-Ungleichung verwendet, und diese Form des Variationsprinzips entspricht Gleichung (4.4). Die Näherung für das SCHWINGER-Funktional in erster Ordnung ist also unabhängig von der Form von S_0 immer kleiner oder gleich dem exakten SCHWINGER-Funktional. Die beste Approximation erhält man, wenn man die rechte Seite bezüglich der freien Parameter in S_0 maximiert. Dazu muß die rechte Seite, also die Entwicklung des SCHWINGER-Funktional bis zum zweiten Glied, stationär in diesen Parametern sein. Auch wenn dies nur eine Aussage für die Näherung erster Ordnung ist, so kann man doch die aus dem Variationsprinzip abgeleiteten Relationen auch in höheren Ordnungen zur Bestimmung der freien Parameter verwenden. Da hier aber nur Näherungen der ersten Ordnung behandelt werden, liefert das Prinzip der kleinsten Abhängigkeit und das Variationsprinzip die gleichen Ergebnisse.

Um das effektive Potential berechnen zu können, benötigt man das Erzeugendenfunktional beziehungsweise das SCHWINGER-Funktional. Um dieses zu erhalten, muß man Stromterme zur Wirkung hinzufügen. Gleichgültig, ob man die Stromterme zu der Hilfswirkung S_0 hinzufügt oder den Term λA um die Stromterme erweitert, erhält man eine Entwicklung, in der jedes Glied von den Strömen abhängt. Dadurch hat $W_k(j)$, also eine abgebrochene Entwicklungsreihe, als Funktion von j (hier konstant) nicht mehr die Eigenschaften von $W[j]$. Eine solche Näherung ist damit insbesondere nicht immer konvex, und der Übergang zum effektiven Potential liefert damit in einigen Fällen keine guten Resultate. Für eine Näherung erster Ordnung kann man das effektive Potential wie in Kapitel 4.1 bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\bar{\phi}] &= \inf_{\mu} [\langle S \rangle_{\mu} - S_{B\mu} | \langle \phi \rangle_{\mu} = \bar{\phi}] \\
 &= \inf_{\mu} [-W_{\mu} + \langle (S - S_{\mu}) \rangle_{\mu} | \langle \phi \rangle = \bar{\phi}] \text{ mit } W_{\mu} = \log \int \mathcal{D}\phi e^{-S_{\mu}}.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Eine Näherung bedeutet hier, wenn $S_{\mu} = S_0$ gesetzt wird. Oft werden nur bestimmte Eigenschaften von S_0 festgelegt (zum Beispiel ein faktorisiertes Maß). Dann enthält S_0 noch freie Parameter, und man kann das Infimum auf der rechten Seite bezüglich dieser Parameter finden. Auf jeden Fall ist das auf diese Weise gefundene Infimum unter Nebenbedingungen größer oder gleich dem eigentlichen Infimum. Die Bedingung $\langle \phi \rangle = \bar{\phi}$ fordert man sowohl von W_{μ} als auch von $\langle (S - S_{\mu}) \rangle_{\mu}$ getrennt. Im Falle der Molekularfeldnäherung erhält man dadurch statt des Hopping-Terms $\langle (S - S_0) \rangle_{\mu} | \langle \phi \rangle = \bar{\phi} = d\bar{\phi}^2$.

Auf diese Weise erhält man eine Näherung erster Ordnung. Eine Entwicklung die auch Näherungen höherer Ordnung zuläßt, erhält man mit Hilfe von Gleichung (6.10) (statt S hier $S + \int d^d x j \phi$)

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\bar{\phi}] &= \inf_{\mu} \sup_j \left[-W_{\mu} + \langle (S - S_{\mu}) \rangle_{\mu} - \int d^d x j (\langle \phi \rangle_{\mu} + \bar{\phi}) \right] \\
 &= \sup_j \left[-W[j] + \int d^d x j \bar{\phi} \right] \\
 &= \sup_j \left[-\log(e^{-S[\phi_0] + \int d^d x j \phi_0} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0} e^{-(R_{\phi_0}[\varphi] - S_0[\varphi])}) - \int d^d x j \bar{\phi} \right] \\
 &= S(\bar{\phi}) - W_0 - \sum_{k=1} \frac{(-1)^k}{k!} \langle (R_{\bar{\phi}} - S_0)^k \rangle_{C,0}. \tag{6.13}
 \end{aligned}$$

Wie schon erwähnt erhält man durch eine solche Entwicklung noch keine Aussagen über Qualität der Approximation. Nicht einmal die Konvergenz oder die Asymptotik der entstandenen Reihe ist gesichert. Insbesondere ist es durchaus möglich, daß eine Näherung höherer Ordnung das exakte Resultat in einigen Punkten schlechter approximiert als eine Näherung niedriger Ordnung. Für die Näherung erster Ordnung weiß man immerhin, daß sie eine obere Grenze für die exakte effektive Wirkung darstellt. Ziel einer solchen Approximation ist es jedoch nicht, ein in allen Punkten gesichertes Ergebnis zu liefern. Es stellt vielmehr eine Abschätzung für die exakten Resultate dar, die Hinweise auf mögliche Eigenschaften der Modelle liefern kann.

Eine weitere Möglichkeit zur Näherung besteht darin, Hilfsfelder einzuführen. Eliminiert man diese Felder durch ihre rein algebraischen Bewegungsgleichungen, so erhält man wieder die ursprüngliche Wirkung. Die Hilfsfelder dürfen in maximal quadratischer Ordnung in der LAGRANGE-Dichte auftreten. So kann man diese Felder durch Integration aus dem Pfadintegral eliminieren. Ziel ist es dabei, das Pfadintegral durch die Hilfsfelder in eine Form zu bringen, in der man die ursprünglichen Felder ausintegrieren kann. Nach dieser Integration kann man die Hilfsfelder im allgemeinen nicht mehr eliminieren, aber man kann das entstandene Pfadintegral entwickeln und nähern. (Bei einer der Näherungsmethoden in [31] wird dies verwendet.)

6.2.1 Molekularfeldnäherung

Die in Kapitel 4 eingeführte Molekularfeldnäherung stellt eine Näherung erster Ordnung dar, wenn man für S_0 die Wirkung S ohne Hopping-Terme verwendet. Gleichung (6.13) liefert im Falle einer solchen Näherung für die Wirkung (4.18)

$$\Gamma = S(\bar{\phi}) - W_0 - \sum_{k=1} \frac{(-1)^k}{k!} \langle (\sum_{\langle ij \rangle} \phi_i \phi_j - S_0)^k \rangle_{C,0}. \tag{6.14}$$

Hier kann man wieder $\langle \phi_i \rangle = \langle \phi_j \rangle$ fordern. Dabei ist darauf zu achten, daß Terme wie $\langle \phi_i \phi_j \phi_l \phi_k \rangle_0$ nur faktorisieren, wenn keiner der Indizes übereinstimmt. In dieser Arbeit soll es aber nicht um eine systematische Erweiterung der Molekularfeldnäherung gehen, sondern darum, eine geeignete Näherung für supersymmetrische Modelle zu finden. Die Molekularfeldnäherung ist dazu nicht geeignet.

Zur Herleitung des effektiven Potentials in der Molekularfeldnäherung wird für gewöhnlich aber das Verfahren (6.12) verwendet. Das Verfahren (6.13) dient hingegen zur Herleitung der effektiven Wirkung in der Loopentwicklung und GAUSSschen Näherung.

6.2.2 Loopentwicklung

In Gleichung (6.8) wurde ein Verfahren beschrieben, das der Loopentwicklung sehr nahe kommt. Als Hilfswirkung wählt man dort den quadratischen Term einer Entwicklung von der Wirkung. Die entstehenden GAUSSSchen Integrale sind leicht lösbar. Diese Hilfswirkung kann man auch verwenden, um im Sinne von Gleichung (6.13) eine Näherung des effektiven Potentials zu erhalten. Der Term $(R_{\bar{\phi}} - S_0)$ stellt dann eine Entwicklung der Wirkung um $\bar{\phi}$ beginnend mit dem kubischen Glied dar. Die Loopentwicklung funktioniert jedoch nur dann, wenn die GAUSSSchen Integrale konvergieren, das heißt wenn

$$\frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \quad (6.15)$$

positiv definit ist. Dies ist dann der Fall, wenn das klassische Potential konvex ist. Die Loopentwicklung ist also im Falle einer gebrochenen Symmetrie nicht verwendbar. In diesem Falle gibt es die Möglichkeit, eine interpolierende Loopentwicklung zu verwenden ([12]).

6.2.3 Gaußsche Näherung

Eine sehr einfache Möglichkeit besteht natürlich darin, für S_0 ein GAUSSSches Potential zu wählen. Dadurch erhält man die GAUSSSche Approximation. Im Sinne von Gleichung (6.7) ist dieses Näherungsverfahren schon für supersymmetrische quantenmechanische Modelle verwendet worden (siehe [17]). Mit Hilfe der Näherung von $W[0]$ wurden dort Aussagen über die gebrochene oder ungebrochene Supersymmetrie abgeleitet. Um umfangreichere Aussagen zu erhalten, ist es jedoch sinnvoller, $W[j]$ und das effektive Potential zu untersuchen. Durch Gleichung (6.13) erhält man die GAUSSSche Approximation des effektiven Potentials. Die GAUSSSche Approximation wurde für skalare Modelle schon verwendet ([40], [41]). Zusammen mit anderen Approximationsverfahren wurde diese Näherung außerdem in [31] beschrieben. In Kapitel 6.3 soll mit Hilfe des Verfahrens eine Näherung für ein einfaches supersymmetrisches Modell gefunden werden.

Als Hilfswirkung verwendet man in diesem Falle:

$$S_0[\phi] = \int d^d x \frac{1}{2} \phi(-\partial^2 + \Omega^2)\phi. \quad (6.16)$$

Man erhält in erster Ordnung (S enthalte maximal Terme der vierten Potenz in ϕ)

$$\Gamma_1(\Omega, \bar{\phi}) = S(\bar{\phi}) - W_0 + \left(\frac{\delta^2 S[\phi]}{2\delta\phi^2} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} - \frac{\Omega^2}{2} \right) \langle \phi^2 \rangle_0 + \frac{\delta^4 S[\phi]}{24\delta\phi^4} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} \langle \phi^4 \rangle_0. \quad (6.17)$$

Die entsprechenden Größen können alle explizit berechnet werden, da S_0 eine GAUSSSche Wirkung ist. Das Minimum von $\Gamma_1(\Omega, \bar{\phi})$ bezüglich Ω (nach dem Variationsprinzip (6.11)) ergibt eine Näherung für die effektive Wirkung $\Gamma_1(\bar{\phi}) \approx \Gamma(\bar{\phi})$.

6.2.4 Näherung für große N

Eine ausführliche Einführung in die Näherung für große N findet man in [27]. Die wesentlichen Aussagen sollen hier kurz dargestellt werden. Ausgangspunkt ist eine $O(N)$ symmetrische (EUKLIDische) Wirkung

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + NU \left(\frac{\phi^2}{N} \right) \right]. \quad (6.18)$$

6 Allgemeine Betrachtungen zu weiteren möglichen Näherungsverfahren

ϕ besteht hier aus N Feldkomponenten ϕ_i ($\phi^2 = \sum_{i=1}^N \phi_i^2$) und $U(\rho)$ ist ein Polynom. Für $N \rightarrow \infty$ soll gelten

$$\langle \phi^2(x)\phi^2(y) \rangle \approx \langle \phi^2(x) \rangle \langle \phi^2(y) \rangle \text{ und } \langle U(\phi^2/N) \rangle \approx U(\langle \phi^2/N \rangle). \quad (6.19)$$

Anschaulich bedeutet dies, daß die $O(N)$ symmetrischen Größen schon durch die große Anzahl der enthaltenen Felder gemittelt sind, und deswegen nur kleine Fluktuationen dieser Größen auftreten. Als Hilfswirkung verwendet man die Wirkung eines freien Modells mit zunächst dem unbestimmten Parameter m

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^d x \left((\partial_\mu \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right). \quad (6.20)$$

Damit gilt

$$W_0 = \frac{N}{2(2\pi)^d} \int d^d k \log \left(\frac{k^2 + m^2}{k^2} \right). \quad (6.21)$$

In erster Näherung ist damit

$$W = \frac{N}{2(2\pi)^d} \int d^d k \log \left(\frac{k^2 + m^2}{k^2} \right) + N \langle U(\phi^2(x)/N) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x)/N \rangle \quad (6.22)$$

$$= \frac{N}{2(2\pi)^d} \int d^d k \log \left(\frac{k^2 + m^2}{k^2} \right) + U(\rho) - \frac{1}{2} m^2 \rho \quad (6.23)$$

mit

$$\rho = \langle \phi^2/N \rangle_0 = \frac{N}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{1}{k^2 + m^2} = \Omega_d(m). \quad (6.24)$$

Um die Phase mit gebrochener Symmetrie zu beschreiben, verwendet man eine andere Hilfswirkung

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^d x \left((\partial_\mu \phi)^2 + m^2 (\phi - \phi_0)^2 \right). \quad (6.25)$$

Auf diese Weise erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_0}{\partial m^2} &= \frac{1}{2} \langle (\phi - \phi_0)^2 \rangle_0 = \frac{1}{2} (N\rho - \sigma^2) \text{ mit } \sigma^2 = \phi_0^2 \\ \text{und } \rho &= \frac{1}{N} \langle \phi^2 \rangle_0 = \Omega_d(m) + \sigma^2/N. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Als Näherung ergibt sich

$$\frac{W}{N} = \frac{1}{2(2\pi)^d} \int d^d k \log \left(\frac{k^2 + m^2}{k^2} \right) + U(\rho) - \frac{1}{2} m^2 \left(\rho - \frac{\sigma^2}{N} \right). \quad (6.27)$$

Die Hilfswirkung enthält die freien Parameter m^2 und σ , die nach dem oben beschriebenen Verfahren angepaßt werden. Für m^2 bedeutet dies

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial m^2} &= \frac{1}{2} N \left(\rho - \frac{\sigma^2}{N} \right) + N \frac{\partial}{\partial m^2} \left(U(\rho) - \frac{1}{2} m^2 \left(\rho - \frac{\sigma^2}{N} \right) \right) \\ &= N \frac{\partial \rho}{\partial m^2} \left(U'(\rho) - \frac{1}{2} m^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.28)$$

$\frac{\partial \rho}{\partial m^2}$ ist eine strikt negative Größe (siehe Gleichung (6.26)). Zusammen mit der Gleichung aus der Ableitung bezüglich σ und der Definitionsgleichung von ρ ergibt sich das folgende Gleichungssystem (gap-equations)

$$U'(\rho) - \frac{1}{2}m^2 = 0 \quad (6.29)$$

$$m^2\sigma = 0 \quad (6.30)$$

$$\frac{\sigma^2}{N} - \rho + \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{k^2 + m^2} = 0. \quad (6.31)$$

Diese Gleichungen erhält man auch durch die Sattelpunktsnäherung in einem ähnlichen Verfahren wie in Kapitel 4.3.

Werden diese Gleichungen erfüllt, so erhält man eine Näherung für $W = \log Z$. Aus W allein läßt sich aber noch keine Aussage über (spontan) gebrochene oder nicht gebrochene Symmetrien gewinnen. Verwendet man nur Gleichung (6.29) und (6.31), um m^2 und ρ aus $W(\rho, m^2, \sigma)$ zu eliminieren, so erhält man W als Funktion eines Parameters σ . Das Minimum dieser Funktion ist durch die Bedingung (6.30) gegeben. Die $O(N)$ -Symmetrie ist spontan gebrochen, wenn das aus dieser Bedingung bestimmte σ , das also die Funktion $W(\sigma)$ minimiert, verschieden von null ist. (Nach Bedingung (6.30) erhält man dann $m^2 = 0$ und damit $(N - 1)$ GOLDSTONE-Teilchen.)

Diese Näherung wurde schon für supersymmetrische Modelle verwendet (siehe [26]). Da sie allerdings eine $O(N)$ -Symmetrie erlangt, gibt es nur wenige Modelle, für die man sie verwenden kann.

6.3 Gaußsche Approximation in der Supersymmetrie

In [31] wurde als einfaches Model für die GAUSSsche Näherung ein nulldimensionales skalares Model verwendet. An Stelle von Pfadintegralen ergeben sich Integrale, die numerische berechnet werden können. Auf diese Weise erhält man einen direkten Vergleich zwischen GAUSSscher Näherung und exaktem Resultat. Auch hier soll ein nulldimensionales Modell konstruiert werden. Dazu gehen wir von der EUKLIDischen Wirkung on-shell in zwei Dimensionen aus. Die Ableitungen der Felder sollen verschwinden ($\phi(x) = \phi$). Auf diese Weise erhält man eine faktorisierende Zustandssumme. An jedem Gitterpunkt ergibt dies ein supersymmetrisches Modell mit der Wirkung

$$\begin{aligned} S(\phi, \psi) &= \frac{1}{2}(W'(\phi))^2 + \frac{1}{2}W'(\phi)\bar{\psi}\gamma_*\psi \\ &= \frac{z^2}{2} + z\phi^2 + \frac{1}{2}\phi^4 + \phi\bar{\psi}\gamma_*\psi \text{ mit } W(\phi) = z\phi + \frac{1}{3}\phi^3. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Bei ψ handelt es sich um einen zweikomponentigen (reellen) MAJORANA-Spinor. Als GAUSSsche supersymmetrische Hilfswirkung wählt man hier

$$S_0 = \frac{\Omega^2}{2}\phi^2 + \frac{\Omega}{2}\bar{\psi}\gamma_*\psi \quad (6.33)$$

mit dem freien Parameter Ω . Das SCHWINGER-Funktional ist hier (mit einem zusätzlichen Faktor als Normierung)

$$W[j] = \log \int d\phi d\psi \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-S(\phi, \psi) + j\phi}. \quad (6.34)$$

Die fermionischen Ströme wurden hier vernachlässigt. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dies äquivalent zu der Bedingung $\langle \psi \rangle = \langle \bar{\psi} \rangle = 0$ ist. Bei der Integration der Fermionen entsteht ein Faktor $2i\phi$. Damit der verbleibende Anteil für die Bosonen bis auf Normierung die Eigenschaften eines Maßes hat (positiv und reell für alle ϕ), ersetzen wir $2i\phi$ durch $|\phi|$. Durch numerische Berechnung des Integrals und numerische LEGENDRE-Transformation erhält man aus $W[j]$ das (exakte) effektive Potential. In der GAUSSSchen Näherung ist das effektive Potential (nach Gleichung (6.17) mit $\langle \psi \rangle = 0$)

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\Omega, \bar{\phi}) &= S_b(\bar{\phi}) - W_0 + \left(\frac{\delta^2 S_b(\bar{\phi})}{2\delta\bar{\phi}^2} - \frac{\Omega^2}{2} \right) \langle \phi^2 \rangle_{0b} + \frac{\delta^4 S_b(\bar{\phi})}{24\delta\bar{\phi}^4} \langle \phi^4 \rangle_{0b} + \left| \frac{\delta S(\bar{\phi}, \psi)}{\delta\psi\gamma_*\psi} - \frac{\Omega}{2} \right| \\ &= \frac{z^2}{2} + z\bar{\phi}^2 + \frac{1}{2}\bar{\phi}^4 + \frac{1}{2}\log(2) + \frac{z + 3\bar{\phi}^2}{\Omega^2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2\Omega^4} + \left| \bar{\phi} - \frac{\Omega}{2} \right|. \end{aligned} \quad (6.35)$$

S_b ist dabei der Anteil der Wirkung ohne fermionische Felder. Das Minimum bezüglich Ω läßt sich auf dem numerischen Wege finden.

Bevor allerdings die Resultate dieser Rechnungen dargestellt werden, soll zunächst die Wirkung ohne fermionische Felder betrachtet werden. Die GAUSSSche Approximation liefert dann

$$\Gamma_1(\Omega, \bar{\phi}) = \frac{z^2}{2} + z\bar{\phi}^2 + \frac{1}{2}\bar{\phi}^4 + \log|\Omega| + \frac{z + 3\bar{\phi}^2}{\Omega^2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2\Omega^4}. \quad (6.36)$$

Für eine Näherung des effektiven Potentials muß man wieder das Minimum bezüglich Ω wählen. Im klassischen Potential zeigt sich bei $z = 0$ eine Art Phasenübergang. Für negative

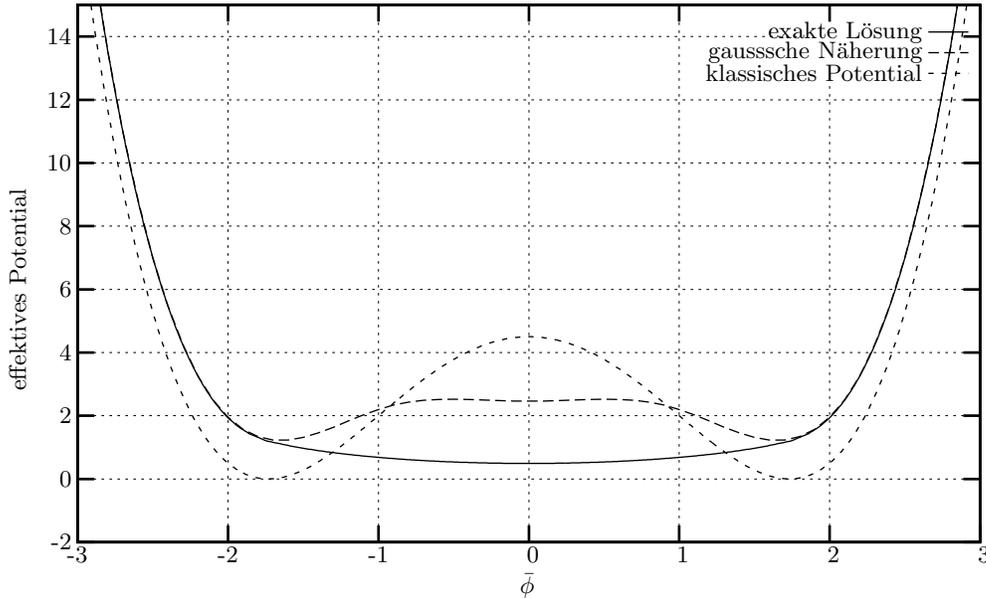


Abbildung 6.1: Dies ist die Näherung nur für den bosonischen Anteil der Wirkung ($z = -3$). Dargestellt sind die numerische (exakte) Lösung für das effektive Potential, das effektive Potential in der GAUSSSchen Näherung und das klassische Potential, also der Potentialterm der klassischen Wirkung.

Werte von z existieren zwei symmetrische Minima bei $\bar{\phi}_{min}$ und $-\bar{\phi}_{min}$. (Die Symmetrie ist spontan gebrochen.) Bei $z = 0$ gehen diese Minima in ein Minimum bei $\bar{\phi} = 0$ über. Wie zu erwarten war, ergibt sich in der exakten Lösung des effektiven Potentials kein solcher

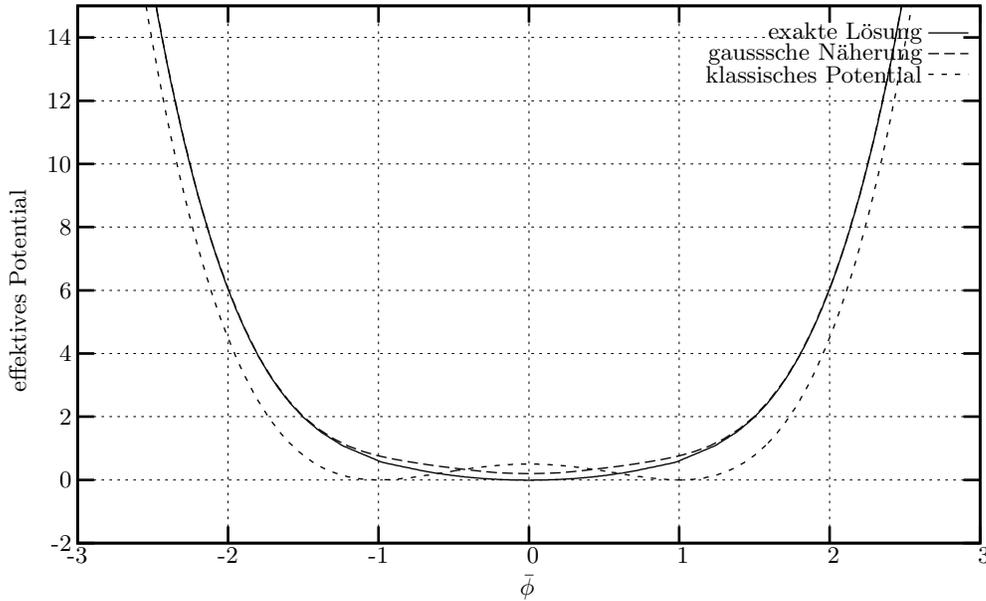


Abbildung 6.2: Dies ist der bosonische Anteil der Wirkung für $z = -1$. Es sind wieder die gleichen Potentiale wie in Abbildung 6.1 dargestellt.

Phasenübergang. Das Minimum der exakten Lösung ist immer bei $\bar{\phi} = 0$. Bei negativen z erhält man nur einen Bereich um $\bar{\phi} = 0$, der immer flacher wird, je größer der Betrag von z ist. Die GAUSSsche Näherung liegt zwischen der klassischen Lösung und dem exakten effektiven Potential. Auch in der GAUSSschen Näherung findet man einen Phasenübergang, der jedoch früher (also schon bei negativem z) stattfindet als bei dem klassischen Potential. Außerdem fällt auf, daß die GAUSSsche Näherung auch in der Phase mit gebrochener Symmetrie immer ein Minimum bei $\bar{\phi} = 0$ besitzt. Dies sind genau die gleichen Ergebnisse wie in [31]. Fügt man die fermionischen Felder wieder hinzu und betrachtet damit die ganze Wirkung (6.32), so ergibt sich ein etwas anderes Bild. Man kann Fermionen, wie oben, angegeben ausintegrieren. Den entstehenden Beitrag kann man dann durch Exponentieren zur Wirkung hinzufügen:

$$W[j] = \log \int \frac{d\phi}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} |\phi| e^{-S_b(\phi)+j\phi} = \log \int \frac{d\phi}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-S_l(\phi)+j\phi}$$

mit $S_l = \frac{z^2}{2} + z\phi^2 + \frac{1}{2}\phi^4 + \log|\phi|$. (6.37)

In den Abbildungen ist diese Wirkung ($S_l(\bar{\phi})$) zusätzlich zu der klassischen Wirkung bei verschwindenden fermionischen Feldern $S_b(\bar{\phi})$ dargestellt. Es fällt auf, daß $S_l(\bar{\phi})$ bei $\bar{\phi} = 0$ gegen unendlich strebt. Die exakte Lösung des effektiven Potentials zeigt jedoch keine wesentlichen Veränderungen, und das Minimum der exakten Lösung liegt auch hier bei $\bar{\phi} = 0$. Die GAUSSsche Näherung hingegen zeigt für $\bar{\phi} = 0$ ein Maximum in Form einer Unstetigkeitsstelle. Dies ist offenbar auf die oben beschriebene Singularität von S_l zurückzuführen. Für negatives z ergibt sich bis auf dieses Maximum, das das Minimum bei $\bar{\phi} = 0$ ersetzt, das gleiche Resultat wie bei der Näherung ohne die fermionischen Felder. Allerdings gibt es keinen Phasenübergang bei größerem z . Es existieren in der GAUSSschen Näherung des effektiven Potentials immer zwei Minima auf beiden Seiten des Maximums bei $\bar{\phi} = 0$. Die GAUSSsche Näherung für das effektive Potential erweist sich somit wieder als eine Art Mit-

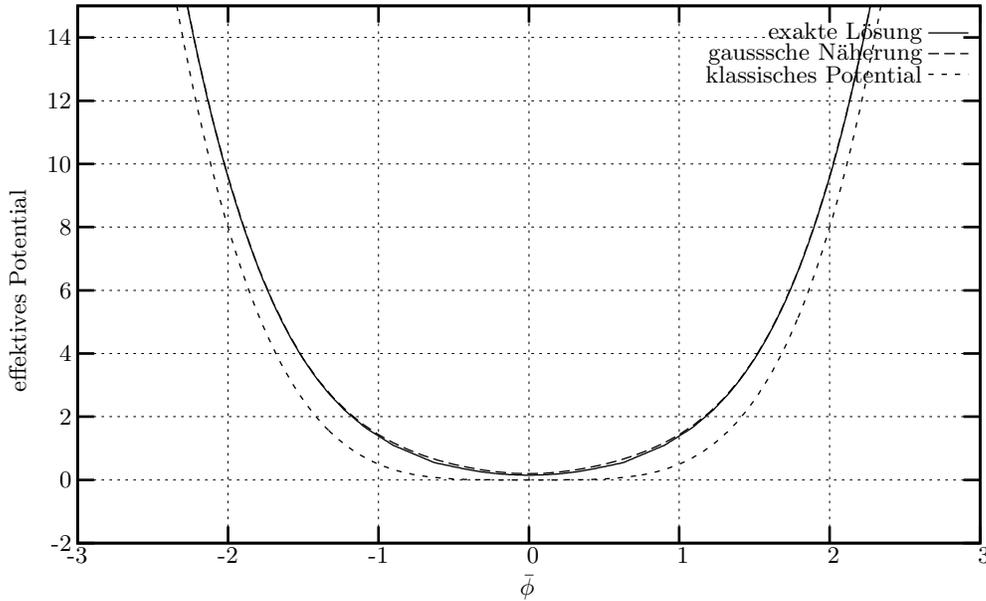


Abbildung 6.3: Hier sind die gleichen Potentiale wie in Abbildung 6.1 für $z = 0$ dargestellt.

telweg zwischen der exakten Lösung und dem Potential S_l . Durch die Singularität von S_l bei $\bar{\phi} = 0$ ergibt sich jedoch immer ein Maximum in der GAUSSSchen Näherung an dieser Stelle. Damit ist die GAUSSSche Näherung in dieser Form nicht geeignet für die Beschreibung von Phasenübergängen.

Als Randbemerkung untersuchen wir hier, inwiefern Supersymmetrie in diesem Modell spontan gebrochen ist. Die WARD-Identitäten verlangen

$$\langle \delta_\zeta \psi \rangle = \zeta(-\langle W'(\phi) \rangle) = -(z + \langle \phi^2 \rangle)\zeta = 0 \Rightarrow z = -\langle \phi^2 \rangle. \quad (6.38)$$

Numerisch findet man, daß die Supersymmetrie in diesem Modell für alle z spontan gebrochen ist.

Außerdem fällt bei den Ergebnissen für positives z auf, daß die GAUSSSche Näherung auch an einigen Stellen unter den exakten Resultaten liegt. Dies deutet darauf hin, daß die JENSEN-Ungleichung für fermionische Felder nicht gilt.

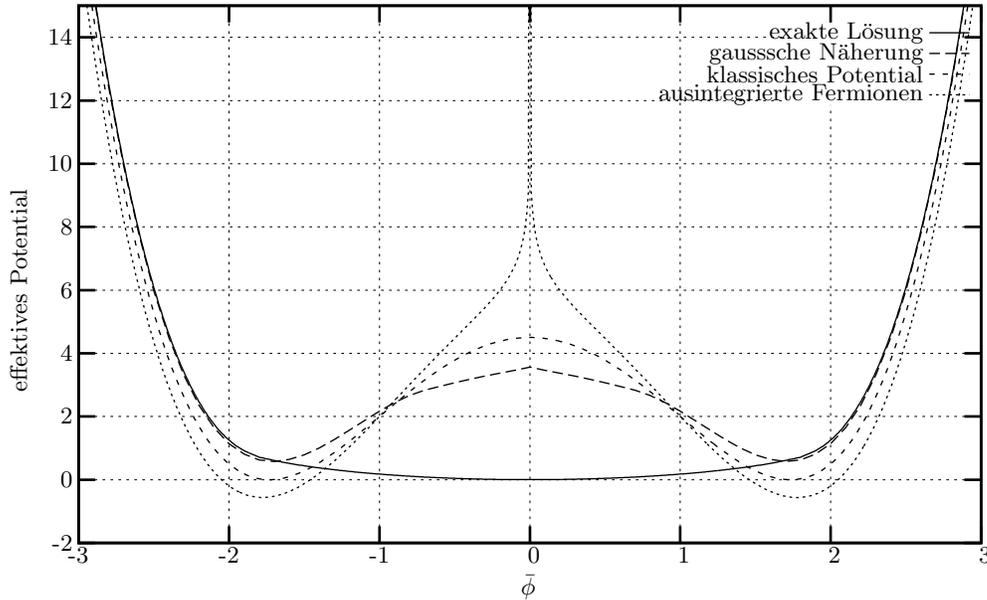


Abbildung 6.4: In dieser Abbildung ist der supersymmetrische Fall für $z = -3$ dargestellt. Wie in den vorangegangenen Abbildungen ist auch hier die numerische (exakte) Lösung und die GAUSSsche Näherung des effektiven Potentials dargestellt. Weiterhin sind zwei verschiedene „klassische“ bosonische Potentiale dargestellt. Das erste (klassische) Potential erhält man bei verschwindenden fermionischen Feldern. Es ist damit das gleiche klassische Potential wie in den vorherigen Abbildungen. Das zweite erhält man nach Integration (Ausintegration) über die fermionischen Felder. Die entstehende Determinante wurde als Logarithmus in den Exponenten geschrieben und gab so einen Beitrag zum Potential.

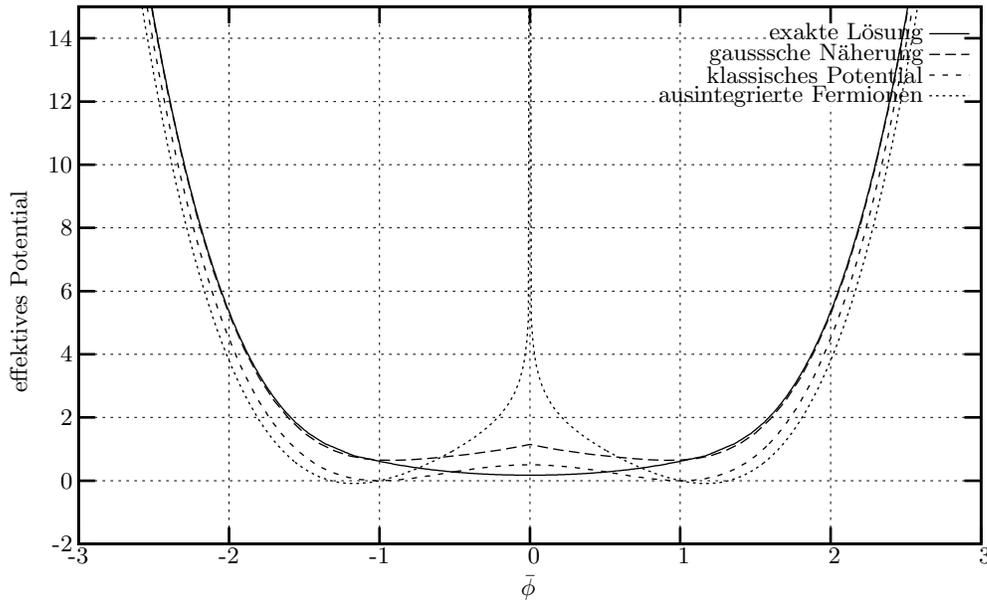


Abbildung 6.5: Hier ist das gleiche wie im vorherigen Bild für $z = -1$ dargestellt.

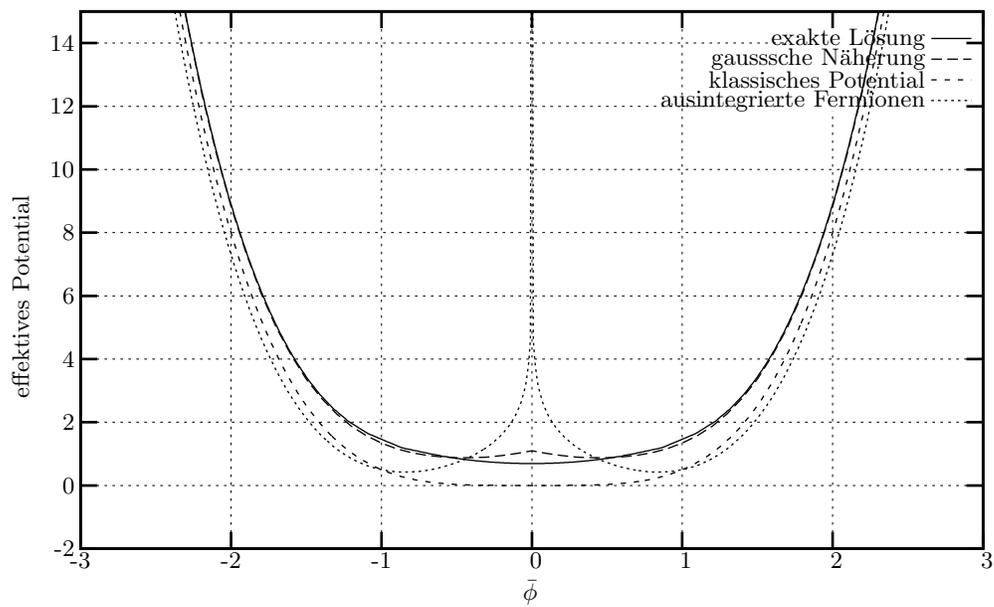


Abbildung 6.6: Dies ist der Fall $z = 0$. Es sind wieder die gleichen Graphen wie im vorherigen Bild dargestellt.

7 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

7.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden zunächst einige supersymmetrische Modelle konstruiert. Die verschiedenen Verfahren, auf denen die Molekularfeldnäherung in der Literatur eingeführt wird, wurden hier dargestellt, und die Äquivalenz dieser verschiedenen Verfahren wurde gezeigt.

Auf supersymmetrische Modelle kann man diese Näherung jedoch nicht übertragen, wenn gleichzeitig die Supersymmetrie nicht gebrochen werden soll. Dabei ist keine spontan gebrochene Symmetrie gemeint, da die Wirkung selbst nicht mehr symmetrisch ist. Dies konnten wir in dieser Arbeit zeigen. Außerdem stellten wir fest, daß es keine Möglichkeit gibt die Molekularfeldnäherung anzuwenden und gleichzeitig die in Kapitel 5.1 beschriebene Supersymmetrie zu erhalten. Wie schon dargestellt, beruht dies auf dem verschiedenen Charakter von Fermionen und Bosonen. Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, die Fermionen zu diskretisieren. Entweder man erhält einen lokalen Anteil, der die LORENTZ-Invarianz verletzt, oder man erhält nur nicht-lokale Anteile, die im Zuge der Molekularfeldnäherung aber verschwinden, da das mittlere Feld der Fermionen verschwindet. In jedem Falle führt dies auf Terme, die keine Supersymmetrie mehr zulassen.

Weiterhin wurden allgemeine Regeln für das Aufstellen von Näherungsverfahren beschrieben. Nach den dargestellten Schritten scheint es sogar, als könne man beliebig viele Näherungsverfahren finden. Aber bei diesen Schritten wurde noch keine Aussage über die Qualität der Approximation, also über ihre Abweichung von den exakten Ergebnissen, gemacht. Dafür sind zusätzliche Überlegungen notwendig. In der Regel ergibt sich eine gute Approximation, wenn $S - S_0$ klein gegenüber S_0 ist. Die Qualität einer bestimmten Näherung ist auch von der Art der Aussagen, die man mit ihrer Hilfe gewinnen möchte, abhängig. Die Loopentwicklung ist sicher für viele Aussagen eine geeignete Näherung, aber nicht im Bezug auf Phasenübergänge. Auch andere Näherungsverfahren als die Molekularfeldnäherung sind nicht ohne weiteres auf supersymmetrische Modelle anwendbar. Zum einen muß man natürlich darauf achten, daß die Näherung die Supersymmetrie nicht verletzt. Im allgemeinen ist es dazu ausreichend, ein supersymmetrisches S_0 zu verwenden. Zum anderen treten durch die Fermionen neue Effekte auf. Die hier vorgestellte GAUSSsche Näherung liefert im Bezug auf Phasenübergänge offenbar durch das Auftreten der Fermionen schlechtere Aussagen. In dem vorgestellten Fall erscheint es in der GAUSSschen Näherung sogar so, als wenn sich das Modell immer in der gebrochenen Phase befindet, obwohl die exakte Lösung immer in der ungebrochenen Phase ist. Die aus der GAUSSschen Näherung abgeleiteten Aussagen sind damit wertlos für die Beschreibung von Phasenübergängen in diesem Modell.

7.2 Ausblick

Die Phasenübergänge eines supersymmetrischen Modells zu finden ist also im allgemeinen ein kompliziertes Problem. Man ist auf ein verlässliches Näherungsverfahren angewiesen, das Aus-

kunft über Phasenübergänge geben kann. In skalaren Feldtheorien in vier Dimensionen (die Näherung wird besser je größer die Dimension ist) ist bekannt, daß die Molekularfeldnäherung sehr gute Resultate im Vergleich zu anderen Näherungsverfahren liefert. Leider führt jedoch, wie oben gezeigt, eine Anwendung der Molekularfeldnäherung dazu, daß die Supersymmetrie gebrochen wird. Man muß also zusätzlich darauf achten, daß die Näherung die Symmetrien des Modells respektiert. Als weiteres Problem erweist sich, wie im Falle der GAUSSSchen Näherung beobachtet, die Determinante, die bei der Integration über die fermionischen Freiheitsgrade entsteht. Es gibt eine ganze Reihe von Verfahren mit dieser Determinante umzugehen, beziehungsweise Näherungen für sie zu finden. Allerdings führt eine Näherung der fermionischen Determinante, die nicht auf gleiche Weise für die Bosonen angewendet wird, dazu, daß die Supersymmetrie im allgemeinen gebrochen wird. Die Determinante kann zu einem singulären Verhalten des klassischen Potentials nach der Integration über die fermionischen Freiheitsgrade führen. Dieses Verhalten erweist sich in einer Näherung als zusätzliche Schwierigkeit. Die exakte Lösung bleibt von der Singularität weitgehend unbeeinflusst, aber in einer Näherung zeigen sich im allgemeinen Rückstände dieser Singularitäten. Dies bedeutet, daß die Näherung an der Stelle der Singularität nicht verlässlich ist.

Unserer Meinung nach wird es in Zukunft möglich sein, mit Hilfe von Gitterrechnungen Auskunft über die Eigenschaften supersymmetrischer Modelle zu erhalten. Die Supersymmetrie auf dem Gitter zu simulieren, ist jedoch nicht einfach. Setzt man Fermionen auf ein Gitter, so ergeben sich im Gegensatz zu Bosonen einige Schwierigkeiten (siehe [28]; [42]). So kann es zum Beispiel zu einer Verdopplung der Moden kommen. Die Verdopplung der fermionischen Freiheitsgrade führt dabei natürlich auch zu einer Verletzung der Supersymmetrie. Es gibt jedoch schon einige Lösungsansätze für diese Probleme ([25]; [43]). Da sich dadurch die Verfahren von denen, die für bosonische Felder auf dem Gitter angewendet werden, unterscheiden können, ist aber nicht sichergestellt, daß die Supersymmetrie dadurch respektiert wird. Ein anderes grundsätzliches Problem besteht darin, daß durch ein Gitter die LORENTZ-Symmetrie zum Teil gebrochen wird. Da die Supersymmetrie die LORENTZ-Symmetrie mit einschließt, ist also auch die Supersymmetrie durch ein Gitter gebrochen. Es ist also nicht einfach, Supersymmetrie, oder wenigstens den Teil der Supersymmetrieralgebra, der den HAMILTON-Operator mit einschließt, in geeigneter Weise auf dem Gitter zu simulieren. In jüngster Zeit gab es jedoch einige neue Entwicklungen auf diesem Gebiet, und so kann man hoffen, daß schon bald eine Simulation der Supersymmetrie auf dem Gitter möglich sein wird.

Nicht in allen Fällen ist es in supersymmetrischen Modellen komplizierter, Lösungen zu finden als in vergleichbaren Modellen ohne Supersymmetrie. Allerdings muß man dazu andere Verfahren zur Berechnung der Größen verwenden als die, die man im allgemeinen für bosonische Modelle verwendet. Man kann sogar bestimmte Größen unter der Verwendung der Supersymmetrie berechnen, zu denen man ohne sie keinen Zugang hätte, indem man die speziellen Eigenschaften supersymmetrischer Modelle ausnutzt ([34],[35],[36],[37]). Häufig werden dabei Modelle mit supersymmetrischer Eichtheorie verwendet.

A Definitionen und Konventionen

A.1 Allgemeine Definitionen

Für die MINKOWSKI-Raum-Zeit in d Dimensionen soll hier folgende Metrik verwendet werden:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, \dots, -1). \quad (\text{A.1})$$

Indizes mit den griechischen Buchstaben μ, ν, ρ und σ bezeichnen hier immer die Komponenten der Raum-Zeit. Indizes i und j stehen für die räumlichen Komponenten.

Die hier verwendeten hermiteschen PAULI-Matrizen (σ^μ) haben die Gestalt:

$$\sigma_0 = \mathbb{1}_2 ; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Damit gilt:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \sigma_0 + i \epsilon_{ijk} \sigma_k. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Gammamatrizen in d Dimensionen

Für die Gammamatrizen in d Dimensionen gilt:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Damit sind sie Elemente einer CLIFFORD-Algebra. Die folgenden Matrizen sind eine Darstellung dieser Algebra in geraden Dimensionen:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sigma_1 \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_0 \otimes \dots & \gamma_2 &= i\sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_0 \otimes \dots & \gamma_4 &= i\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_0 \otimes \dots \\ \gamma_1 &= i\sigma_2 \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_0 \otimes \dots & \gamma_3 &= i\sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_0 \otimes \dots & \dots & \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Dabei muß man bei d gerade insgesamt immer $\frac{d}{2}$ PAULI-Matrizen zusammenfügen. Man erhält also eine $2^{\frac{d}{2}}$ dimensionale Darstellung der Algebra. In ungeraden Dimensionen verwendet man die Darstellung aus $d-1$ Dimensionen und fügt noch $\gamma_{d-1} = i\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \dots$ hinzu. Für d Dimensionen sind damit $\gamma^\mu \in \text{GL}(2^{\frac{d}{2}}, \mathbb{C})$. (Für ungerade Dimensionen ist statt $\frac{d}{2}$ immer $\frac{d-1}{2}$ zu verwenden.) Die Darstellung der Gammamatrizen ist nicht eindeutig, da $\gamma'_\mu = U \gamma_\mu U^{-1}$ mit U unitär auch die Relation (A.4) erfüllen. Auch $\gamma'_\mu = -\gamma_\mu$ erfüllt die obigen Relationen, aber in geraden Dimensionen entspricht dies einer unitären Transformation. Für ungerade Dimensionen ergeben sich zwei im Sinne der unitären Transformationen inäquivalente Darstellungen. Die Hermitizitätseigenschaften der Gammamatrizen sind:

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0 \text{ und } \gamma_i^\dagger = -\gamma_i, \quad (\text{A.6})$$

deswegen gilt:

$$\gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 = \gamma_\mu^\dagger \implies \gamma^{0T} \gamma_\mu^* \gamma^{0T} = \gamma_\mu^T. \quad (\text{A.7})$$

Für die weiteren Rechnungen werden die antisymmetrisierten Produkte von n Gammamatrizen benötigt:

$$\gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} \equiv \gamma^{[\mu_1 \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}]}; \quad \Sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i} \gamma^{\mu\nu}. \quad (\text{A.8})$$

(Dies ergibt insgesamt $\binom{d}{n} 2^{\frac{d}{2}} \times 2^{\frac{d}{2}}$ -Matrizen.) Dabei ist für gerade Dimensionen

$$\gamma_{\mu_1 \dots \mu_d} \sim \gamma_* = i^{1+\frac{d}{2}} \gamma_0 \dots \gamma_{d-1} = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3, \quad (\text{A.9})$$

und es gilt:

$$\gamma_{\mu_1 \dots \mu_n} = i^{1+\frac{d}{2}} \frac{1}{(d-n)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} \gamma_* \gamma^{\mu_d \dots \mu_n + 1} \quad (\text{A.10})$$

γ_* antikommutiert mit allen anderen Gammamatrizen und kann deshalb als γ_d in $d+1$ Dimensionen verwendet werden ($\gamma_* \gamma_* = \mathbb{1}$). In ungeraden Dimensionen existiert keine weitere Matrix, die mit allen anderen kommutiert, deshalb ist das Produkt aller Gammamatrizen proportional zur Einheitsmatrix.

In Räumen mit EUKLIDISCHER Metrik gelten andere Relationen für die Gammamatrizen. Aus (A.4) wird dann:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.11})$$

A.3 Ladungskonjugation

Um die Ladungskonjugation zu definieren geht man von der DIRAC-Gleichung aus.

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\psi &= 0 \\ i\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 (\partial_\mu - ieA_\mu)\gamma^0 \psi - m\gamma^0 \psi &= 0 \text{ da } \gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{1} \\ -i\gamma^{\mu T} (\partial_\mu + ieA_\mu)\bar{\psi}^T - m^* \bar{\psi}^T &= 0 \text{ durch komplexe konjugation.} \end{aligned}$$

Dabei wurde $\bar{\psi}^T = \gamma^{0T} \psi^* = \gamma^{0*} \psi^*$ verwendet. Also gilt für den ladungskonjugierten Spinor $\psi_C = \mathcal{C}\bar{\psi}^T = \mathcal{C}\gamma^{0T} \psi^*$ die DIRAC-Gleichung mit dem andern Vorzeichen vor der Ladung

$$i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi_C + \eta m^* \psi_C = 0, \quad (\text{A.12})$$

wenn \mathcal{C} eine Matrix ist, die

$$\mathcal{C}\gamma^{\mu T} \mathcal{C} = \eta\gamma^\mu \quad (\text{A.13})$$

mit $\eta = \pm 1$ erfüllt (für eine reelle Masse soll $\eta = -1$ sein). Aus (A.6) folgt $\gamma_0^T = \gamma_0^*$ und

$$\gamma_0^* = \eta \mathcal{C}^{-1} \gamma_0 \mathcal{C} \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma_i^* = -\eta \mathcal{C}^{-1} \gamma_i \mathcal{C}. \quad (\text{A.15})$$

Durch (A.7) gilt weiterhin:

$$\mathcal{C}\gamma^{0T} \gamma_\mu^* \gamma^{0T} \mathcal{C}^{-1} = \eta\gamma_\mu. \quad (\text{A.16})$$

In geraden Dimensionen sind die Ladungskonjugationsmatrizen \mathcal{C}_+ für $\eta = 1$ und \mathcal{C}_- für $\eta = -1$:

$$\mathcal{C}_+ = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \dots \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{C}_- = \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \dots. \quad (\text{A.18})$$

In dieser Darstellung sind sie hermitesch und unitär, quadrieren also zu 1. In ungeraden Dimensionen gibt es nur eine Ladungskonjugationsmatrix. Ob für diese $\eta = 1$ oder $\eta = -1$ gilt, hängt von der Dimension ab. Die Gammamatrizen in der ungeraden Dimension d ergeben sich aus denen in $d - 1$ Dimensionen und $\gamma_{d-1} = \alpha\gamma_0 \cdots \gamma_{d-2}$, wobei $\alpha^2 = -1$ gelten muß. Die Ladungskonjugationsmatrix muß deshalb zusätzlich die Bedingung

$$\alpha\mathcal{C}(\gamma_0 \cdots \gamma_{d-2})\mathcal{C}^{-1} = \alpha\gamma_0^T \cdots \gamma_{d-2}^T = \alpha(\gamma_{d-1} \cdots \gamma_0)^T = (-1)^{\frac{d}{2}}(\gamma_0 \cdots \gamma_{d-2})^T = \eta(\gamma_0 \cdots \gamma_{d-2})^T \quad (\text{A.19})$$

erfüllen (da $\eta^{(d-1)} = 1$ für d ungerade). Das bedeutet $\eta = (-1)^{\frac{d}{2}}$. Alle Resultate gelten für Dimension d modulo 8. Deswegen ergeben sich zum Beispiel in zehn Dimensionen die gleichen Relationen wie in zwei Dimensionen. Folgende Tabelle faßt die Ergebnisse für ein bis acht Dimensionen zusammen.

$d \bmod 8$	1	2	3	4	5	6	7	8
\mathcal{C}_+	S	S		A	A	A		S
\mathcal{C}_-		A	A	A		S	S	S

In dieser Tabelle steht S für symmetrisch und A für antisymmetrisch.

In einem Raum mit EUKLIDISCHER Metrik gilt auch für die Ladungskonjugation eine andere Relation. Dort ist sie definiert als:

$$\psi_C = \mathcal{C}\psi^*. \quad (\text{A.20})$$

A.4 Majorana-Spinoren in der Weyl-Darstellung in vier Dimensionen

Definieren wir die folgenden Objekte:

$$\sigma_\mu = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3) \quad ; \quad \tilde{\sigma}_\mu = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (\text{A.21})$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon^{-1}. \quad (\text{A.22})$$

Damit gilt:

$$\tilde{\sigma}_\mu = \tilde{\varepsilon}\tilde{\sigma}_\mu^T\tilde{\varepsilon}^T \quad \text{und} \quad \sigma_\mu = \varepsilon\tilde{\sigma}_\mu^T\varepsilon^T. \quad (\text{A.23})$$

Für die Gammamatrizen verwendet man folgende chirale Darstellung:

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \tilde{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Daraus folgt

$$\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Aus der Bedingung $\psi = \mathcal{C}\gamma_0\psi^*$ für einen MAJORANA-Spinor folgt sofort, daß in dieser Darstellung ein MAJORANA-Spinor die Form (ψ_1 und ψ_2 zweikomponentige Spinoren)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \psi_1 = \tilde{\varepsilon}\psi_2^* \quad ; \quad \psi_2 = \varepsilon\psi_1^* \quad (\text{A.26})$$

In Komponenten bedeutet dies (ψ_1 und ψ_2 jetzt einkomponentig)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \bar{\psi}^1 \\ \bar{\psi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \text{ mit } \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\beta} \bar{\psi}_\beta \text{ und } \psi_\alpha^* \equiv \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}. \quad (\text{A.27})$$

Ganz analog gilt $\psi_\alpha = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} \psi^\beta$ mit $\psi^{\beta*} = \bar{\psi}^{\dot{\beta}}$. Da man $\tilde{\varepsilon}$ und ε schon durch die Stellung der Indizes unterscheiden kann, wird im folgenden für beide das gleiche Symbol verwendet ($\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \varepsilon^{\alpha\beta} = (\varepsilon^{\alpha\beta})^{-1}$ für $\tilde{\varepsilon}$ und $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \varepsilon_{\alpha\beta}$ für ε).

Mit den so dargestellten Spinoren gilt:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 = (\psi^\alpha ; \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}) \quad (\text{A.28})$$

$$\bar{\psi}\chi = \psi^\alpha \chi_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \equiv \psi\chi + \bar{\psi}\bar{\chi} \quad (\text{A.29})$$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\chi = \psi^\alpha (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \chi_\beta \equiv \psi\sigma_\mu\bar{\chi} + \bar{\psi}\tilde{\sigma}_\mu\chi \quad (\text{A.30})$$

Dabei ist auf die Stellung der Indizes zu achten, denn da ε schiefsymmetrisch ist, gilt $\psi\chi = \psi^\alpha \chi_\alpha = -\chi_\alpha \psi^\alpha = \chi^\alpha \psi_\alpha = \chi\psi$ und $\bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\chi}\bar{\psi}$.

Für die vierkomponentigen Spinoren und ihre zwei Komponenten werden die gleichen Symbole verwendet. ψ_χ , $\bar{\psi}\bar{\chi}$, $\psi\sigma^\mu\bar{\psi}$ und $\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\chi$ sind als Produkte zweikomponentiger Spinoren zu verstehen, $\bar{\psi}\chi$ ist ein Produkt von vierkomponentigen Spinoren. Die Indizes **a** und **b** bezeichnen die Komponenten eines vierkomponentigen Spinors (1–4). α und β numerieren als Indizes die Komponenten eines zweikomponentigen Spinors in der $(\frac{1}{2}, 0)$ -Darstellung, $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$ die Komponenten eines zweikomponentigen Spinors in der $(0, \frac{1}{2})$ -Darstellung.

Für die MAJORANA-Spinoren ψ , θ und χ in der WEYL-Darstellung kann man folgende Relationen (FIERZ-Identitäten) zeigen:

$$\begin{aligned} (\theta\lambda)(\theta\chi) &= -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\lambda\chi) \\ (\bar{\theta}\bar{\lambda})(\bar{\theta}\bar{\chi}) &= -\frac{1}{2}(\bar{\lambda}\bar{\chi})(\bar{\theta}\bar{\theta}) \\ \lambda\sigma_\mu\bar{\chi} &= -\bar{\chi}\tilde{\sigma}_\mu\lambda \\ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) \\ (\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\theta_\alpha(\bar{\theta}\bar{\theta}) - i(\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha(\bar{\theta}\bar{\theta}) \\ (\theta\lambda)(\bar{\theta}\bar{\chi}) &= \frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\lambda\sigma_\mu\bar{\chi}) \\ (\bar{\theta}\bar{\chi})(\theta\lambda) &= \frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\lambda\sigma_\mu\bar{\chi}) \\ (\theta\lambda)(\chi\tilde{\sigma}^\mu\theta) &= -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\chi}\tilde{\sigma}^\mu\lambda) \\ (\bar{\theta}\bar{\lambda})(\chi\sigma^\mu\bar{\theta}) &= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\chi\sigma^\mu\bar{\lambda}) \\ (\theta\lambda)(\chi\sigma^\mu\bar{\theta}) &= -\frac{1}{2}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})(\lambda\sigma_\nu\tilde{\sigma}^\mu\chi) \\ (\bar{\theta}\bar{\lambda})(\bar{\chi}\tilde{\sigma}^\mu\theta) &= \frac{1}{2}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})(\bar{\lambda}\tilde{\sigma}_\nu\sigma^\mu\bar{\chi}) \\ (\bar{\lambda}\tilde{\sigma}^\mu\theta)(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) &= -\frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}(\tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu)\bar{\lambda} \\ (\lambda\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) &= \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\theta(\sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu)\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Eine weitere nützliche Relationen, die sich daraus ergibt, ist

$$\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\delta}}\bar{\theta}^{\dot{\delta}} = -\bar{\theta}_{\dot{\delta}}(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{\delta}\alpha}. \quad (\text{A.32})$$

B Ausführliche Rechnungen zu Kapitel 2.7

Zunächst soll hier noch einiges über fermionische Koordinaten, Ableitungen nach fermionischen Koordinaten und Integration über Funktionen von fermionischen Koordinaten ergänzt werden.

Die Ableitung nach fermionischen Koordinaten kann man auf folgende Weise einführen:

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta; \quad \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta_\beta = \delta_\beta^\alpha; \quad \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha}\bar{\theta}^\beta = \delta_\alpha^\beta; \quad \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha}\bar{\theta}_\beta = \delta_\beta^\alpha. \quad (\text{B.1})$$

Mit Hilfe der Kettenregel, die auch hier gelten soll, erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta_\beta} \frac{\partial\theta_\beta}{\partial\theta^\alpha} = -\varepsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\theta_\beta}; \quad \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \theta^2 = 4. \quad (\text{B.2})$$

Das entsprechende läßt sich für $\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha}$ zeigen.

Eine beliebige Funktion f , die von einer fermionischen Koordinate θ abhängt, kann man in $f(\theta) = f_0 + \theta f_1$ entwickeln, da θ zu Null quadriert. Ist f eine Funktion von mehreren fermionischen Koordinaten, so kommen entsprechend mehr Entwicklungskoeffizienten vor. Um die Entwicklung in Gleichung (2.110) zu verstehen, muß man nur wissen, daß die PAULI-Matrizen eine Basis für die komplexen hermiteschen spurfreien (2×2) -Matrizen darstellen, und daß der Term $\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ aufgrund der Eigenschaften von MAJORANA-Fermionen entfällt.

Die Integration über fermionische Felder spielt bei den Pfadintegralen eine Rolle. Ganz analog dazu definiert man die Integration über fermionische Koordinaten.

$$\int d\theta \theta = 1; \quad \int d\theta = 0; \quad \int d\theta f(\theta) = f_1 \text{ d.h. } \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) = \int d\theta f(\theta) \quad (\text{B.3})$$

Weiterhin definiert man

$$d^2\theta = -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\theta_\alpha; \quad d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}d\bar{\theta}_\alpha d\bar{\theta}^\alpha. \quad (\text{B.4})$$

Damit gilt

$$\int d^2\theta \theta^2 = 1; \quad \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}^2 = 1. \quad (\text{B.5})$$

Die Transformation der Komponenten eines allgemeinen Superfeldes kann man aus dem transformierten Superfeld $\delta S = -i\bar{\zeta}QS$ ablesen. Die Transformationen mit Hilfe der Relationen (A.31) ergeben sich damit als:

$$\bar{\zeta}QV = (\zeta^\alpha Q_\alpha + \bar{Q}_\alpha \bar{\zeta}^\alpha)V \quad (\text{B.6})$$

$$= (i\zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\bar{\zeta}^\alpha \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} + (\bar{\theta}\tilde{\sigma}^\mu\zeta)\partial_\mu + (\theta\sigma^\mu\bar{\zeta})\partial_\mu)V \quad (\text{B.7})$$

$$= \bar{\theta}\tilde{\sigma}^\mu\zeta\partial_\mu C + \theta\sigma^\mu\bar{\zeta}\partial_\mu C \\ + \zeta\chi - \frac{i}{2}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})(\partial_\mu\chi\sigma_\nu\tilde{\sigma}^\mu\zeta) - \frac{i}{2}\theta^2(\bar{\zeta}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi)$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{\zeta}\bar{\chi} + \frac{i}{2}\bar{\theta}^2(\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}) - \frac{i}{2}(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})(\partial_\mu\bar{\chi}\tilde{\sigma}_\nu\sigma^\mu\bar{\zeta}) \\
& +\theta\zeta(M-iN) - \frac{i}{2}\theta^2\bar{\theta}\tilde{\sigma}^\mu\zeta\partial_\mu(M-iN) \\
& -\bar{\theta}\bar{\zeta}(M+iN) + \frac{i}{2}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\bar{\zeta}\partial_\mu(M+iN) \\
& +i\bar{\theta}\tilde{\sigma}^\mu\zeta A_\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\zeta}A_\mu + \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu\zeta\partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}(\tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu)\bar{\zeta}\partial_\mu A_\nu \\
& +(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\bar{\zeta}\tilde{\sigma}_\mu(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\chi})) - \bar{\theta}^2\zeta(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}) + \frac{i}{2}\bar{\theta}^2\theta^2(\bar{\zeta}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\chi})) \\
& +(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\zeta\sigma_\mu(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\nu\partial_\nu\chi)) + \theta^2\bar{\zeta}(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi) - \frac{i}{2}\bar{\theta}^2\theta^2(\bar{\zeta}\sigma^\mu\partial_\mu(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\nu\partial_\nu\chi)) \\
& -i\bar{\theta}^2\theta\zeta(D + \frac{1}{2}\square C) - i\theta^2\bar{\theta}\bar{\zeta}(D + \frac{1}{2}\square C) \tag{B.8} \\
= & \zeta\chi - \bar{\zeta}\bar{\chi} \\
& -i\theta(i\sigma^\mu\bar{\zeta}\partial_\mu C + i\zeta(M-iN) + \sigma^\mu\bar{\zeta}A_\mu) \\
& +i\bar{\theta}(-i\tilde{\sigma}^\mu\zeta\partial_\mu C + i\bar{\zeta}(M+iN) + \tilde{\sigma}^\mu\zeta A_\mu) \\
& -\frac{i}{2}\theta^2\left(\bar{\zeta}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi + 2i\bar{\zeta}(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi)\right) \\
& +\frac{i}{2}\bar{\theta}^2\left(\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} + 2i\zeta(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi})\right) \\
& +i\bar{\theta}^2\theta\left(\frac{1}{2}\sigma^\mu\bar{\zeta}\partial_\mu(M+iN) - \frac{i}{2}\sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu\bar{\zeta}\partial_\mu A_\nu - \zeta(D + \frac{1}{2}\square C)\right) \\
& -i\theta^2\bar{\theta}\left(\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^\mu\zeta\partial_\mu(M-iN) - \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\zeta}\partial_\mu A_\nu + \bar{\zeta}(D + \frac{1}{2}\square C)\right) \\
& -(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\left(\frac{i}{2}\partial_\nu\bar{\chi}\tilde{\sigma}_\mu\sigma^\nu\bar{\zeta} + \frac{i}{2}\partial_\nu\chi\sigma_\mu\tilde{\sigma}^\nu\zeta - \bar{\zeta}\tilde{\sigma}_\mu(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\chi}) - \zeta\sigma_\mu(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\nu\partial_\nu\chi)\right) \\
& -\frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2\left(-i\bar{\zeta}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\chi}) + i(\zeta\sigma^\mu\partial_\mu(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\nu\partial_\nu\chi))\right) \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Die meisten Transformationen kann man daraus sofort ablesen. Der Rest ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
\delta M &= -\frac{i}{2}(\delta(M+iN) + \delta(M-iN)) = (\bar{\zeta}\bar{\lambda} + \zeta\lambda) - i(\bar{\zeta}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi + \zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}) \\
\delta N &= \frac{1}{2}(\delta(M-iN) - \delta(M+iN)) = -i(\zeta\lambda - \bar{\zeta}\bar{\lambda}) - (\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} - \bar{\zeta}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi) \\
\delta\lambda &= -i\delta(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}) + \frac{1}{2}\sigma^\mu\partial_\mu(\delta\bar{\chi}) \\
&= i\zeta(D + \frac{1}{2}\square C) - \frac{i}{2}\sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu\zeta\partial_\mu\partial_\nu C + \frac{1}{2}(\sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu)\zeta\partial_\mu A_\nu \\
\delta\bar{\lambda} &= -i\bar{\zeta}(D + \frac{1}{2}\square C) + \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\zeta}\partial_\mu\partial_\nu C + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu)\bar{\zeta}\partial_\mu A_\nu \\
\delta D &= -i\delta(D + \frac{1}{2}\square C) + \frac{i}{2}\square\delta C \\
&= -\bar{\zeta}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + \zeta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + i\frac{1}{2}\bar{\zeta}\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\mu\partial_\nu\bar{\chi} - \frac{i}{2}\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\tilde{\sigma}^\nu\partial_\nu\chi + i\frac{1}{2}\square(\zeta\chi - \bar{\zeta}\bar{\chi}).
\end{aligned}$$

In Viererschreibweise sind die Transformationen damit:

$$\delta C = i\bar{\zeta}\gamma_5\chi \quad (\text{B.10})$$

$$\delta\chi = (M + i\gamma_5 N)\zeta - i\gamma^\mu\zeta A_\mu - \gamma_5\gamma^\mu\zeta\partial_\mu C \quad (\text{B.11})$$

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2}(\partial_\nu\bar{\chi})\gamma_\mu\gamma^\nu\zeta + i\bar{\zeta}\gamma_\mu(\lambda - \frac{i}{2}\gamma_\nu\partial^\nu\chi) = -\bar{\zeta}\partial_\mu\bar{\chi} + i\bar{\zeta}\gamma_\mu\lambda \quad (\text{B.12})$$

$$\delta M = \bar{\zeta}\lambda - i\bar{\zeta}\gamma_\mu\partial^\mu\chi \quad (\text{B.13})$$

$$\delta N = i\bar{\zeta}\gamma_5\lambda + \bar{\zeta}\gamma_5\gamma_\mu\partial^\mu\chi \quad (\text{B.14})$$

$$\delta\lambda = -i\gamma_5\zeta D + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\zeta\partial_\mu A_\nu \quad (\text{B.15})$$

$$\delta D = -\bar{\zeta}\gamma_5\gamma_\mu\partial^\mu\lambda + i\frac{1}{2}\bar{\zeta}\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu\chi - i\frac{1}{2}\square\bar{\zeta}\gamma_5\chi = -\bar{\zeta}\gamma_5\gamma_\mu\partial^\mu\lambda. \quad (\text{B.16})$$

Das chirale Multipllett Ω ist dadurch ausgezeichnet, daß $\lambda = 0$ und $D = 0$ gilt. Dies wird durch die Bedingung $\Omega = \frac{1}{4}\bar{D}DV$, wobei V ein allgemeines Multipllett ist, ausgedrückt. Ω kann man in zwei Anteile ($\Phi = \frac{1}{4}\bar{D}_\alpha\bar{D}^\alpha V$ und $\bar{\Phi} = \frac{1}{4}D^\alpha D_\alpha V$) aufspalten. Für die Komponenten bedeutet dies:

$$D^\alpha D_\alpha V = \left(-\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + i(\bar{\theta}\tilde{\sigma}^\mu)^\alpha\partial_\mu\right) \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha\partial_\mu\right) V \quad (\text{B.17})$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\bar{\theta}_{\dot{\beta}}(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\partial_\mu + \bar{\theta}^2\square\right) V \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} &= 2i(M - iN) + 4i\bar{\theta}(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi) + 2\bar{\theta}^2(D + \frac{1}{2}\square C) \\ &\quad + 2\bar{\theta}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - 2\bar{\theta}\tilde{\sigma}^\mu\theta\partial_\mu(M - iN) - 2i\bar{\theta}\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\mu A_\nu + 4(\bar{\theta}\tilde{\sigma}^\mu\theta)\bar{\theta}(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\nu\partial_\nu\chi) \\ &\quad + \bar{\theta}^2\square C - i\bar{\theta}^2\theta\square\chi - \frac{i}{2}\bar{\theta}^2\theta^2\square(M - iN) \\ &= 2i(M - iN) \\ &\quad + i\bar{\theta}\left(4(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi) - 2i\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi\right) \\ &\quad + \frac{i}{2}\bar{\theta}^2\left(-4i(D + \frac{1}{2}\square C) - 4\partial^\mu A_\mu - 2i\square C\right) \\ &\quad - (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(2\partial_\mu(M - iN)) \\ &\quad + i\bar{\theta}^2\theta\left(-2i(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\square\chi) - \square\chi\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\theta^2(i\square(M - iN)). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Deswegen sind die Komponenten des neuen Superfeldes $\bar{\Phi}$:

$$\begin{aligned} C' &= \frac{1}{2}i(M - iN) = \mathfrak{A}^\dagger \\ \bar{\chi}' &= (\bar{\lambda} - i\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi) = -2i\bar{v} \\ (M' + iN') &= -i(D + \square C) - \partial^\mu A_\mu = 2i\mathfrak{F}^\dagger \\ A'_\mu &= \frac{1}{2}\partial_\mu(M - iN) = -i\partial_\mu C' = -i\partial_\mu\mathfrak{A}^\dagger \\ (\lambda' - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}') &= -\frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu(\bar{\lambda} - i\tilde{\sigma}^\nu\partial_\nu\chi) = -\frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}' = -\sigma^\mu\partial_\mu\bar{v} \\ (D' + \frac{1}{2}\square C') &= \frac{1}{4}i\square(M - iN) = \frac{i}{2}\square C' = \frac{1}{2}\square\mathfrak{A}^\dagger \\ &\rightarrow \lambda' = 0 ; D' = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Damit ist der Bezug zu der Entwicklung in (2.134) hergestellt. Analog ergibt sich

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}V = \left(-\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} + 2i\theta^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\beta}}}\partial_{\mu} + \theta^2\Box \right) V \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} &= -2i(M + iN) - 4i\theta(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}) + 2\theta^2(D + \frac{1}{2}\Box C) - 2\theta\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi} \\ &\quad - 2\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}(M + iN) + 2i\theta\sigma^{\mu}\tilde{\sigma}^{\nu}\theta\partial_{\mu}A_{\nu} - 4(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\theta(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}) \\ &\quad + \theta^2\Box C + i\theta^2\bar{\theta}\Box\bar{\chi} + \frac{i}{2}\theta^2\bar{\theta}^2\Box(M + iN) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} &= -2i(M + iN) \\ &\quad - i\theta \left(4(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}) - 2i\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi} \right) \\ &\quad - \frac{i}{2}\theta^2 \left(4i(D + \frac{1}{2}\Box C) - 4\partial^{\mu}A_{\mu} + 2i\Box C \right) \\ &\quad - \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} (2\partial_{\mu}(M + iN)) \\ &\quad - i\theta^2\bar{\theta} \left(-2i\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^{\nu}\partial_{\nu}\bar{\chi}) - \Box\bar{\chi} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 (-i\Box(M + iN)). \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Die Komponenten von Φ sind also:

$$\begin{aligned} C' &= -\frac{i}{2}(M + iN) = \mathfrak{A} \\ \chi' &= (\lambda - i\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}) = 2i\nu \\ (M' - iN') &= i(D + \Box C) - \partial^{\mu}A_{\mu} = -2i\mathfrak{F} \\ A'_{\mu} &= \frac{1}{2}\partial_{\mu}(M + iN) = i\partial_{\mu}C' = i\partial_{\mu}\mathfrak{A} \\ (\bar{\chi}' - \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi') &= -\frac{i}{2}\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}(\lambda - i\sigma^{\nu}\partial_{\nu}\bar{\chi}) = -\frac{i}{2}\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi' = \tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\nu \\ (D' + \frac{1}{2}\Box C') &= -i\Box(M + iN) = \frac{1}{2}\Box C' = \frac{1}{2}\Box\mathfrak{A} \\ &\rightarrow D' = 0 ; \bar{\lambda}' = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Die Superladungen in den chiralen Koordinaten lassen sich durch die folgenden Relationen berechnen:

$$\mathcal{Q}_{\alpha}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \left(i\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - (\sigma^{\mu}\bar{\theta})_{\alpha}\partial_{\mu} \right) e^{-i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}}\Phi(x, \theta) = e^{-i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}}\mathcal{Q}_{\Phi\alpha}\Phi(x, \theta) \quad (\text{B.25})$$

$$\mathcal{Q}_{\Phi\alpha} = \mathcal{Q}_{\alpha} + \left[\mathcal{Q}_{\alpha}, e^{-i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}} \right] \quad (\text{B.26})$$

$$\mathcal{Q}_{\alpha}\bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) = \left(i\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - (\sigma^{\mu}\bar{\theta})_{\alpha}\partial_{\mu} \right) e^{i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}}\bar{\Phi}(x, \theta) = e^{i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}}\mathcal{Q}_{\Phi\alpha}\bar{\Phi}(x, \theta) \quad (\text{B.27})$$

$$\mathcal{Q}_{\Phi\alpha} = \mathcal{Q}_{\alpha} + \left[\mathcal{Q}_{\alpha}, e^{i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}} \right] \quad (\text{B.28})$$

und ganz analog für $\bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}}$ und die Superableitungen. Es ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\Phi\alpha} &= i\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} & \mathcal{Q}_{\bar{\Phi}\dot{\alpha}} &= i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - 2(\sigma^{\mu}\bar{\theta})_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu} \\ \bar{\mathcal{Q}}_{\Phi\dot{\alpha}} &= -i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + 2(\theta\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu} & \mathcal{Q}_{\bar{\Phi}\dot{\alpha}} &= -i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \\ D_{\Phi\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - 2i(\sigma^{\mu}\bar{\theta})_{\alpha}\partial_{\mu} & D_{\bar{\Phi}\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \\ \bar{D}_{\Phi\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} & \bar{D}_{\bar{\Phi}\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + 2i(\theta\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}, \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

woran man erkennt, daß $\delta\Phi$ wieder ein links-chirales und $\delta\bar{\Phi}$ wieder ein rechts-chirales Superfeld ist. $D_\alpha\Phi$ ist allerdings nicht mehr links-chiral, und $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{\Phi}$ nicht mehr rechts-chiral, aber beide Felder sind immer noch chiral. Mit Hilfe dieser Größen kann man leicht die Transformationen der Felder berechnen.

Aus der Multiplikation von zwei Feldern $\Phi_1\Phi_2$ bzw. $\bar{\Phi}_1\bar{\Phi}_2$ erhält man wieder ein links- bzw. rechts-chirales Superfeld Φ_3 bzw. $\bar{\Phi}_3$ mit den Komponenten

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_3 &= \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}'_3 &= \mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}'_2 \\ v_3 &= \mathfrak{A}_1v_2 + \mathfrak{A}_2v_1 & \bar{v}_3 &= \mathfrak{A}'_1\bar{v}_2 + \mathfrak{A}'_2\bar{v}_1 \\ \mathfrak{F} &= \mathfrak{A}_1\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{F}_1 + 4v_1v_2 & \mathfrak{F}' &= \mathfrak{A}'_1\mathfrak{F}'_2 + \mathfrak{A}'_2\mathfrak{F}'_1 + 4\bar{v}_1\bar{v}_2\end{aligned}\tag{B.30}$$

Den \mathfrak{F} -Term von dem links-chiralen Superfeld $f(\Phi)$ erhält man, indem man die Funktion $f(\Phi(x, \theta))$ nach θ entwickelt (um $\theta = 0$). Wie bekannt bricht die Entwicklung ab. Aus den Entwicklungskoeffizienten kann man leicht den gewünschten Term ablesen:

$$f(\Phi(x, \theta))|_{\mathfrak{F}} = 2\mathfrak{F}\frac{\partial f(\mathfrak{A})}{\partial\mathfrak{A}} - 2\psi\psi\frac{\partial^2 f(\mathfrak{A})}{\partial\mathfrak{A}^2}.\tag{B.31}$$

Auf die gleiche Weise findet man leicht den D -Term von $\Phi\bar{\Phi}$.

Auf ein rechts-chirales Multipllett kann man den Operator $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}$ wirken lassen. Damit erhält man das links-chirale Multipllett $\Phi' = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{\Phi} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}D^\beta D_\beta V$. Die Komponenten lassen sich leicht ablesen, wenn man die Komponenten von $\bar{\Phi}$ (siehe (B.20)) wieder in die Relationen für $\bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}V$ (B.24) einsetzt. Die Komponenten von Φ' sind:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}' &= \mathfrak{F}' \\ v' &= \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{v} \\ \mathfrak{F}' &= -\square A^\dagger.\end{aligned}\tag{B.32}$$

Das bedeutet

$$\Phi\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{\Phi}|_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}'\mathfrak{F} - \mathfrak{A}\square\mathfrak{A}^\dagger + 2iv\sigma^\mu\partial_\mu\bar{v}\tag{B.33}$$

Dies ist bis auf eine totale Ableitung gleich

$$\mathfrak{F}'\mathfrak{F} + \partial^\mu\mathfrak{A}\partial_\mu\mathfrak{A}^\dagger + iv\sigma^\mu\partial_\mu\bar{v} + i\bar{v}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu v = \frac{1}{2}\Phi\bar{\Phi}|_D + \text{totale Ableitung}.\tag{B.34}$$

C Herleitung des Variationsprinzips

Ausgangspunkt ist zunächst ein diskreter Konfigurationsraum (n Konfigurationen). Auf diesen Raum sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ($p = (p_1, \dots, p_n)$, $\sum_i p_i = 1$, $0 \leq p_i \leq 1$) und damit ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ definiert. Die Entropie ist

$$S_B(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (\text{C.1})$$

Die relative Entropie ($S(p|\alpha)$ zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen (p und α) ist definiert als

$$S_B(p|\alpha) = - \sum_i p_i \log\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right) \quad (\text{C.2})$$

Es gilt

$$S_B(p|\alpha) \leq 0 \text{ und } S_B(p|\alpha) = 0 \text{ nur wenn } p = \alpha \quad (\text{C.3})$$

Aus der JENSEN-Ungleichung folgt für eine konvexe Funktion $f(u)$

$$f\left(\sum_i \alpha_i u_i\right) \leq \sum_i \alpha_i f(u_i). \quad (\text{C.4})$$

(Der Beweis der JENSEN-Ungleichung ist unter aufgeführt.) Mit $u_i = \frac{p_i}{\alpha_i}$ folgt daraus $0 \leq \sum p_i \log\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)$. Da $f''(u) > 0$ existiert maximal ein Punkt mit $0 = \sum p_i \log\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)$. An diesem Punkt gilt $u_i = q$ und damit auch $1 = \sum_i p_i = q \sum_i \alpha_i = q$. Also impliziert $0 = \sum p_i \log\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)$, daß $\alpha_i = p_i$ gilt.

Setzt man $\alpha_i = Z^{-1} e^{-s_i}$ mit $Z = \sum_i e^{s_i}$ so erhält man das Variationsprinzip für einen diskreten Konfigurationsraum

$$\inf_p \left[\sum_i s_i p_i - S_B(p) \right] = - \log Z. \quad (\text{C.5})$$

Das Variationsprinzip im kontinuierlichen Falle ist auf gleiche Weise zu verstehen. Das Maß ist dann definiert als $d\mu[\phi] = p[\phi] \mathcal{D}\phi$. Die Entropie und die relative Entropie sind jetzt

$$S_{B\mu} = - \int \mathcal{D}\phi p[\phi] \log p[\phi] \text{ und } S_{B(\mu|\nu)} = - \int d\mu[\phi] \log g[\phi] \quad (\text{C.6})$$

mit $d\mu[\phi] = g[\phi] d\nu[\phi]$. Zwei Maße sollen im kontinuierlichen Falle als äquivalent gelten, wenn sie sich nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden. Auf diese Weise ergibt sich das Variationsprinzip, wie es hier verwendet wurde.

Der Beweis der JENSEN-Ungleichung beruht auf der Konvexität der Funktion $f(u)$ im Intervall I . Aus der Konvexität folgt ($u_i \in I$)

$$f(\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) \leq \alpha f(u_1) + (1 - \alpha) f(u_2) \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (\text{C.7})$$

Daraus ergibt sich

$$f\left(\sum_i \alpha_i u_i\right) \leq \sum_i \alpha_i f(u_i) \text{ mit } 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ und } \sum_i \alpha_i = 1. \quad (\text{C.8})$$

Dieses Ergebnis läßt sich auf den kontinuierlichen Fall übertragen. Ω sei der Wahrscheinlichkeitsraum (ω ein Elementarereignis), auf dem das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu(\omega)$ definiert sei. Man zerlegt zunächst den Wahrscheinlichkeitsraum in eine endliche Anzahl disjunkter Teilmengen Ω_i . Dann gilt mit $\omega_i \in \Omega_i$

$$f\left(\sum_i \mu(\Omega_i) g(\omega_i)\right) \leq \sum_i \mu(\Omega_i) f(g(\omega_i)), \quad (\text{C.9})$$

wobei g eine Funktion mit $g : \Omega \mapsto \mathbb{I}$ ist. Für den Grenzfall kleiner Teilbereiche Ω_i erhält man

$$f\left(\int d\mu(\omega) g(\omega)\right) \leq \int d\mu(\omega) f(g(\omega)). \quad (\text{C.10})$$

D Supersymmetrische Eichtheorie

Es existiert auch eine supersymmetrische Version der Eichtheorie für chirale Felder. Die Superladungen Q_α kommutieren mit den Generatoren der Eichtransformationen. Alle Felder eines Multipletts transformieren deswegen auf die gleiche Weise unter den Eichtransformationen. Daher erwartet man

$$\mathfrak{A}_n \rightarrow \left(e^{it_A \Lambda^A(x)} \right)_{nm} \mathfrak{A}_m \quad (\text{D.1})$$

$$v_n \rightarrow \left(e^{it_A \Lambda^A(x)} \right)_{nm} v_m \quad (\text{D.2})$$

$$\mathfrak{F}_n \rightarrow \left(e^{it_A \Lambda^A(x)} \right)_{nm} \mathfrak{F}_m, \quad (\text{D.3})$$

wobei t_A die Generatoren der Eichsymmetrie und $\Lambda^A(x)$ reelle Funktionen sind. Die Formel (2.134) für das links-chirale Superfeld enthält Ableitungen der Komponenten. In chiralen Koordinaten tauchen diese Ableitungen aber nicht mehr auf (2.132). Deswegen kann man die Eichtransformation eines chiralen Superfeldes wie folgt aufschreiben

$$\Phi_n(x, \theta) \rightarrow \left(e^{it_A \Lambda^A(y_2)} \right)_{nm} \Phi_m(x, \theta) \quad (\text{D.4})$$

$$\Rightarrow \Phi_n^\dagger(x, \theta) \rightarrow \Phi_m^\dagger(x, \theta) \left(e^{-it_A \Lambda^A(y_2)^*} \right)_{mn}. \quad (\text{D.5})$$

Wenn $\Lambda^A(y_2)^* = \Lambda^A(y_1)$ gleich $\Lambda^A(y_2)$, so wäre ein Produkt $\bar{\Phi}\Phi$ invariant unter den Eichtransformationen. Da dies aber nicht der Fall ist, benötigen wir ein $\Gamma(x, \theta)$ mit folgendem Transformationsverhalten

$$\Gamma(x, \theta) \rightarrow \left(e^{it_A \Lambda^A(y_2)^*} \right) \Gamma(x, \theta) \left(e^{-it_A \Lambda^A(y_2)} \right), \quad (\text{D.6})$$

um $\bar{\Phi}\Gamma\Phi$ zu einem invarianten Ausdruck zu machen. Eine Veränderung in diesem Ausdruck erwartet man schon deshalb, weil er den kinetischen Anteil der LAGRANGE-Dichte darstellt. Dort wird in der nicht supersymmetrischen Eichtheorie die Ableitung durch die kovariante Ableitung ersetzt.

Γ ist damit noch nicht eindeutig festgelegt. Wir wählen ein Hermitesches

$$\Gamma(x, \theta) = \exp(-2t_A V^A(x, \theta)), \quad (\text{D.7})$$

wobei V^A ein reelles Superfeld ist. Wir erweitern die oben beschriebenen Transformationen dadurch, daß wir statt der Felder $\Lambda^A(y_2)$ beliebige links-chirale Superfelder $\Omega^A(x, \theta)$ verwenden. Der oben beschriebene Term ist auch unter diesen Transformationen invariant.

Mit Hilfe der BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-Formel ergeben sich die Transformationen des Feldes V^A ,

$$V^A \rightarrow V^A + \frac{i}{2} [\Omega^A - \Omega^{A*}] + \dots, \quad (\text{D.8})$$

und damit auch die Transformationen der Komponenten.

Mit Hilfe dieser Transformationen können bestimmte Komponenten der Feldes V^A auf null gebracht werden

$$C = \chi = \bar{\chi} = M = N = 0. \quad (\text{D.9})$$

Dies ist die so genannte WESS-ZUMINO-Eichung. Eine Supersymmetrietransformation führt zu einer Verletzung dieser Bedingungen. Deswegen muß nach einer Supersymmetrietransformation immer eine Eichtransformation wieder in die WESS-ZUMINO-Eichung führen. Das links-chirale Superfeld Ω^A (drei komplexe Komponenten) hat in der WESS-ZUMINO-Eichung noch eine freie Komponente Λ^A . Die Transformationen der Komponenten von V^A sind damit (C_{BC}^A Strukturkonstanten)

$$A_\mu^A(x) \rightarrow C_{BC}^A A_\mu^B(x) \Lambda^C(x) - \partial_\mu \Lambda^A(x) \quad (\text{D.10})$$

$$\lambda^A(x) \rightarrow C_{BC}^A \lambda^B(x) \Lambda^C(x) \quad (\text{D.11})$$

$$D^A(x) \rightarrow C_{BC}^A D(x) \Lambda^C(x). \quad (\text{D.12})$$

(D.10) sind die bekannten Eichtransformationen. Die Gaugino-Felder λ^A und die Hilfsfelder D^A gehören also zur adjungierten Darstellung der Eichgruppe.

Jetzt benötigen wir nur noch eine supersymmetrische Wirkung der Eichfelder. Die Felder $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, λ und D stellen ein Supermultiplett dar, denn durch die Supersymmetrietransformationen werden diese Felder nur ineinander transformiert. Ein (Spinor-) Multiplett (W_α^A) mit diesen Komponenten ergibt sich aus dem Vektormultiplett in der WESS-ZUMINO-Eichung (V_{WZ}^A)

$$W_\alpha^A(x) = \frac{1}{8} \bar{D} \bar{D} D_\alpha V_{WZ}^A. \quad (\text{D.13})$$

Insgesamt ergibt sich folgende LAGRANGE-Dichte (Index A hier weggelassen)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d\theta^2 d\bar{\theta}^2 \bar{\Phi} \Gamma \Phi + \left[\int d\theta^2 W_\alpha W^\alpha + \text{h.c.} \right] + f(\Phi)|_{\mathfrak{F}} + f(\bar{\Phi})|_{\mathfrak{F}^\dagger}. \quad (\text{D.14})$$

Diese Wirkung enthält neben den bekannten Termen des Superpotentials Terme mit eichinvarianten Ableitungen für Bosonen und Fermionen, YUKAWA-Kopplung der Gaugino-Felder an die Skalaren Felder und die Fermionenfelder des chiralen Multipletts sowie Terme der Hilfsfelder \mathfrak{F}_n und D . Die invariante Wirkung der Eichfelder ist

$$\left[\int d\theta^2 W_\alpha W^\alpha + \text{h.c.} \right] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} i \bar{\lambda} \not{\partial} \lambda + \frac{1}{2} D^2. \quad (\text{D.15})$$

Literaturverzeichnis

- [1] H. Aoyama and D. Boyanovsky. Goldstone fermions in supersymmetric theories at finite temperature. *Phys. Rev.*, D30:1356, 1984.
- [2] C. M. Bender, F. Cooper, and G. S. Guralnik. Path integral formulation of mean field perturbation theory. *Ann. Phys.*, 109:165, 1977.
- [3] A. Bilal. Introduction to supersymmetry. 2001, hep-th/0101055.
- [4] J. Bros and D. Buchholz. Towards a relativistic KMS condition. *Nucl. Phys.*, B429:291–318, 1994, hep-th/9807099.
- [5] D. Buchholz and I. Ojima. Spontaneous collapse of supersymmetry. *Nucl. Phys.*, B498:228–242, 1997, hep-th/9701005.
- [6] S. R. Coleman and J. Mandula. All possible symmetries of the S matrix. *Phys. Rev.*, 159:1251–1256, 1967.
- [7] T. L. Curtright and C. B. Thorn. The effective potential in quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 25:541, 1984.
- [8] A. Das and M. Kaku. Supersymmetry at high temperatures. *Phys. Rev.*, D18:4540, 1978.
- [9] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal. *Conformal field theory*. Springer, New York, USA, 1997.
- [10] R. P. Feynman. *Statistical mechanics : a set of lectures*. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1998.
- [11] P. G. O. Freund. *Introduction to Supersymmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1986.
- [12] Y. Fujimoto, L. O’Raifeartaigh, and G. Parravicini. Effective potential for nonconvex potentials. *Nucl. Phys.*, B212:268, 1983.
- [13] Y. Fujimoto, A. Wipf, and H. Yoneyama. Symmetry restoration of scalar models at finite temperature. *Phys. Rev.*, D38:2625, 1988.
- [14] F. Gieres. About symmetries in physics. 1997, hep-th/9712154.
- [15] L. Girardello, M. T. Grisaru, and P. Salomonson. Temperature and supersymmetry. *Nucl. Phys.*, B178:331, 1981.
- [16] R. Gudmundsdottir and P. Salomonson. Supersymmetric sound in condensed matter. *Phys. Lett.*, B182:174, 1986.

- [17] D. Kabat and G. Lifschytz. Approximations for strongly-coupled supersymmetric quantum mechanics. *Nucl. Phys.*, B571:419–456, 2000, hep-th/9910001.
- [18] J. I. Kapusta. *Finite Temperature Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989.
- [19] K. Kratzert. Finite-temperature supersymmetry: The Wess-Zumino model. *Ann. Phys.*, 308:285–310, 2003, hep-th/0303260.
- [20] M. Le Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.
- [21] V. V. Lebedev and A. V. Smilga. Supersymmetric sound. *Nucl. Phys.*, B318:669–704, 1989.
- [22] H. Matsumoto, M. Nakahara, Y. Nakano, and H. Umezawa. Supersymmetry at finite temperature. *Phys. Rev.*, D29:2838, 1984.
- [23] H. Matsumoto, M. Nakahara, H. Umezawa, and N. Yamamoto. A consistent picture of supersymmetry breaking at finite temperature: Selfconsistent loop expansion method. *Phys. Rev.*, D33:2851, 1986.
- [24] H. Matsumoto, H. Umezawa, N. Yamamoto, and N. J. Papastamatiou. Nonparticle like goldstone modes in the spontaneous breakdown of symmetry. *Phys. Rev.*, D34:3217–3222, 1986.
- [25] I. Montvay. Majorana fermions on the lattice. 2001, hep-lat/0108011.
- [26] M. Moshe and J. Zinn-Justin. Phase structure of supersymmetric models at finite temperature. *Nucl. Phys.*, B648:131–160, 2003, hep-th/0209045.
- [27] M. Moshe and J. Zinn-Justin. Quantum field theory in the large N limit: A review. *Phys. Rept.*, 385:69–228, 2003, hep-th/0306133.
- [28] H. B. Nielsen and M. Ninomiya. No go theorem for regularizing chiral fermions. *Phys. Lett.*, B105:219, 1981.
- [29] E. Noether. Invariante Variationsprobleme. *Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, Seite 235-157*, 1918, www.physics.ucla.edu/~cwp/articles/noether.trans/german/emmy235.html.
- [30] I. Ojima. Lorentz invariance versus temperature in QFT. *Lett. Math. Phys.*, 11:73, 1986.
- [31] A. Okopinska. Nonstandard perturbative methods for the effective potential in lambda phi**4 QFT. *Phys. Rev.*, D36:2415, 1987.
- [32] G. Roepstorff. *Path Integral Approach to Quantum Physics*. Springer, Heidelberg, Germany, 1994.
- [33] Bert Schroer. Two-dimensional models. 2005, hep-th/0502125v2.
- [34] N. Seiberg. The power of holomorphy: Exact results in 4-d susy field theories. 1994, hep-th/9408013.

- [35] N. Seiberg. The power of duality: Exact results in 4d susy field theory. *Int. J. Mod. Phys.*, A16:4365–4376, 2001, hep-th/9506077.
- [36] N. Seiberg and E. Witten. Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory. *Nucl. Phys.*, B426:19–52, 1994, hep-th/9407087.
- [37] M. A. Shifman. Nonperturbative dynamics in supersymmetric gauge theories. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 39:1–116, 1997, hep-th/9704114.
- [38] M. F. Sohnius. Introducing supersymmetry. *Phys. Rept.*, 128:39–204, 1985.
- [39] P. M. Stevenson. Optimized perturbation theory. *Phys. Rev.*, D23:2916, 1981.
- [40] P. M. Stevenson. The gaussian effective potential. 1. quantum mechanics. *Phys. Rev.*, D30:1712, 1984.
- [41] P. M. Stevenson. The gaussian effective potential. 2. lambda phi**4 field theory. *Phys. Rev.*, D32:1389–1408, 1985.
- [42] H. Suzuki. A no-go theorem for the Majorana fermion on the lattice. *Prog. Theor. Phys.*, 112:855–861, 2004, hep-lat/0407010.
- [43] Y. Taniguchi. One loop calculation of susy Ward-Takahashi identity on lattice with wilson fermion. *Phys. Rev.*, D63:014502, 2001, hep-lat/9906026.
- [44] L. Van Hove. Supersymmetry and positive temperature for simple systems. *Nucl. Phys.*, B207:15, 1982.
- [45] S. Weinberg. *The Quantum theory of fields*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.
- [46] S. Weinberg. *The Quantum theory of the fields*, volume 3. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- [47] J. Wess and J. Bagger. *Supersymmetry and supergravity*. 1992.
- [48] A. Wipf. Introduction to supersymmetry, 2001, <http://www.personal.uni-jena.de/~p5anwi/lecturenotes.html>.
- [49] J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Clarendon Press, Oxford, UK, 1996.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich in erster Linie Prof. Dr. Andreas Wipf herzlich für die gute Betreuung danken. Er hat mir besonders bei der Einarbeitung in die Themengebiete der Supersymmetrie und der Molekularfeldnäherung sehr geholfen und konnte mir Hinweise geben, die wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Weiterhin gilt Dr. habil. Tom Heinzl sowie Dr. Ulrich Theis und Dr. Jean Dominique Länge mein besonderer Dank, denn sie haben Zeit gefunden, viele meiner Fragen zu beantworten.

Für hilfreiche Hinweise und anregende Diskussionen möchte ich mich auch bei der ganzen Arbeitsgruppe der Quantenfeldtheorie bedanken.

Besonderer Dank gebührt außerdem meiner Frau, die mir bei der Arbeit eine große Hilfe und Unterstützung gewesen ist.

Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Jena,

Georg Bergner

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Diplomarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena,

Georg Bergner