9. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Mechanik

Abgabe am Dienstag der 10. Semesterwoche zu Vorlesungsbeginn.

Aufgabe 26: (8 Punkte)

Ein Satellit bewege sich auf einem Kepler-Orbit mit großer Halbachse a and Exzentrizität $0 < \epsilon < 1$ um die Erde. Für einen Umlauf benötigt er die Zeit T. Benutzen Sie die Eigenschaft $\dot{r} = \frac{\omega a}{r}\sqrt{a^2\epsilon^2 - (r-a)^2}$ der Kepler-Orbits, um zu zeigen, dass die maximale Radialgeschwindigkeit durch $\frac{2\pi a\epsilon}{T\sqrt{1-\epsilon^2}}$ gegeben ist. Hierbei bezeichnet ω die mittlere Kreisfrequenz, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Verifizieren Sie, dass die radiale Position, bei der das Maximum der radialen Geschwindigkeit angenommen wird, erwartungsgemäß zwischen dem Perihel $r_{\min} = a(1-\epsilon)$ und dem Aphel $r_{\max} = a(1+\epsilon)$ liegt.

Aufgabe 27: (12 Punkte)

Für das Keplerproblem $V(r) = -k/r$ ist neben Energie und Drehimpuls der Lenz'sche Vektor $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} \; - \; k\mathbf{e}_r$ eine Erhaltungsgröße (Drehimpuls $\mathbf{L} = m\,\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$).

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Bewegungsgleichung, dass $\dot{\mathbf{M}} = 0$. In welcher Ebene liegt $\mathbf{M}$?

(b) Wählen Sie die Anfangsbedingungen $\mathbf{r} = (s, 0, 0)$ und $\dot{\mathbf{r}} = (0, v_0, 0)$. Verwenden Sie die Drehimpulserhaltung und die Erhaltung des Lenz'schen Vektors, und leiten Sie daraus die Gleichung

$$y^2 = \lambda(\lambda-2)x^2 - 2\lambda(\lambda-1)sx + \lambda^2 s^2, \qquad \lambda = \frac{msv_0^2}{k},$$

für die Bahnkurven ab. Für welche Parameter ergeben sich Parabel, Kreis, Gerade, Hyperbel und Ellipse?

Aufgabe 28: (10 Punkte)

Eine kleine Störung des Gravitationspotentials $V(r) = -G\,\frac{m\,M}{r} + \delta V(r)$ (Einfluss der anderen Planeten, relativistische Effekte) hat zur Folge, daß die Bahn nicht mehr geschlossen ist und das Perihel der Bahn (Punkt mit minimalem r) sich bei jedem Umlauf um den kleinen Winkel $\delta\theta$ verschiebt.

(a) Laut Vorlesung lässt sich der Energiesatz (+ Drehimpulssatz) für ein Teilchen mit Masse μ in einem sphärischen Potential schreiben als:

$$d\theta = \pm \frac{\ell\, dr}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)}}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass der während eines Umlaufs (von Perihel zu Perihel) überstrichene Winkel θ als

$$\theta = -2\frac{\partial}{\partial \ell}\int_{r_{\min}(\ell)}^{r_{\max}(\ell)} \sqrt{2\mu\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)}\, dr,$$

geschrieben werden kann, wobei $\mu = \frac{m\,M}{m+M}$ der reduzierten Masse des Zwei-Körper-Problems entspricht.

(b) Überzeugen Sie sich, daß der Term nullter Ordnung in δV gerade 2π liefert. Zeigen Sie, dass sich aus dem Term 1. Ordnung in δV die Periheldrehung $\theta = 2\pi + \delta\theta$ mit Gleichung (1) zu

$$\delta\theta = 2\mu\,\frac{d}{d\ell}\,\frac{1}{\ell}\int_0^{\pi} r^2 \delta V(r)\, d\theta$$

ergibt.

(c) Berechnen Sie $\delta\theta$ für die Störungen $\delta V = \frac{\gamma_2}{r^2}$ und $\delta V = \frac{\gamma_3}{r^3}$ (Im 2. Fall können Sie die Ellipsengleichung $\frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon\cos\theta$ verwenden).