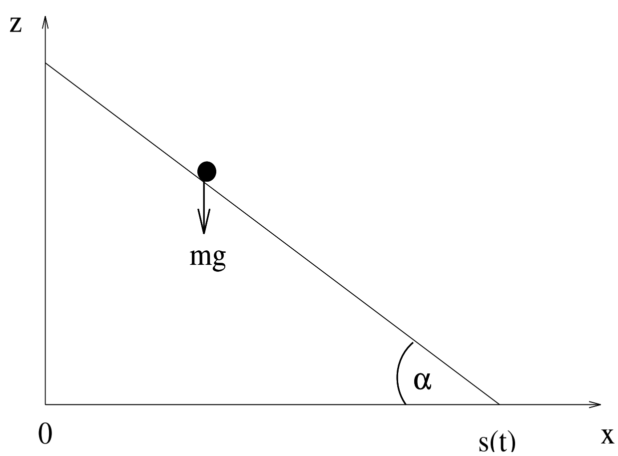
8. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Mechanik

Abgabe am Dienstag der 9. Semesterwoche zu Vorlesungsbeginn.

Aufgabe 23: (6 Punkte)

Auf einen Massepunkt, der sich entsprechend nebenstehender Skizze auf einer schiefen Ebene (α=const.) bewegen kann, wirke die Schwerkraft. Stellen Sie für den Fall, daß die Ebene konstant in x Richtung mit $s(t) = \frac{1}{2}bt^2$ beschleunigt wird, die Zwangsbedingung und die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf.
(Hinweis: Zwangsbedingung zweimal nach der Zeit differenzieren, Lagrange-Gleichungen einsetzen, Lagrange'schen Multiplikator λ und Bewegungsgleichungen für $\ddot{x}$ und $\ddot{z}$ bestimmen.)
Geben Sie die Zwangskräfte an. Wann verschwinden diese?



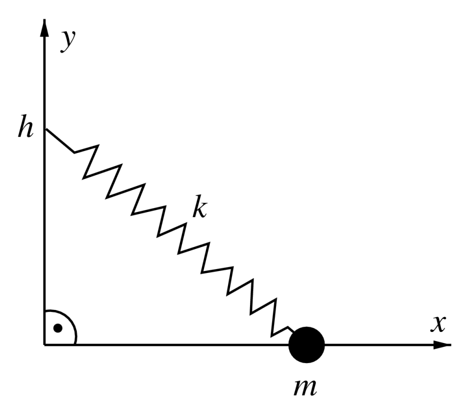
Aufgabe 24: (10 Punkte)

Das eine Ende einer masselosen Feder der Federkonstanten k und Ruhelänge ℓ_0 ist an einem festen Aufhängepunkt auf der y-Achse im Abstand h vom Koordinatenursprung gebunden. Am anderen Ende der Feder ist der Massepunkt m befestigt. Der Massepunkt gleite reibungsfrei horizontal auf einem Draht längst der x Achse, $x \in \mathbb{R}$. Die momentane Länge der Feder für ein gegebenes x ist somit $\ell = \sqrt{h^2 + x^2}$.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und stellen Sie die Lagrange-Gleichung zweiter Art auf, wobei Sie x als "generalisierte" Koordinate betrachten können.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen der Masse unter der Annahme, daß $h < \ell_0$ ist, und prüfen Sie, welche stabil bzw. instabil sind.

(c) Berechnen Sie die Frequenz kleiner harmonischer Schwingungen um eine der stabilen Ruhelagen.



Aufgabe 25: (12 Punkte)

Untersuchen Sie die Bewegung eines Teilchens im Gravitations- oder Coulomb-Feld

$$V(r) = -\frac{k}{r}.$$

(a) Berechnen Sie die Energie E und den Drehimpuls $\vec{L}$ eines Teilchens im angegebenen Feld in Zylinderkoordinaten (r, θ, z). Die Bewegung soll dabei ausschließlich in der $x - y$ Ebene $(z = 0)$ stattfinden. Zeigen Sie, dass wegen der Erhaltung von Energie und Drehimpuls die Gleichung gilt:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r), \quad \ell^2 = |\vec{L}^2|.$$

(b) Führen Sie als neue Variable $s = 1/r$ ein und zeigen Sie durch Ableiten obiger Gleichung nach θ, dass gilt (hier wird die Zeit t implizit als Funktion von θ aufgefasst):

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = \frac{mk}{\ell^2}.$$

(c) Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung? Überlagern Sie dazu die Lösung der homogenen Gleichung mit einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Bestimmen Sie die Konstanten so, dass $s(\theta = 0) = s_{max}$ ist.

(d) Wie ist die Konstante α und die Exzentrizität ϵ zu wählen, dass sich aus $s(\theta)$ die Gleichung für Kegelschnitte ergibt:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha}\big\{1 + \epsilon\cos\theta\big\}.$$

Drücken Sie alle Integrationskonstanten aus (c) als Funktion der Energie E und des Drehimpulses ℓ aus.