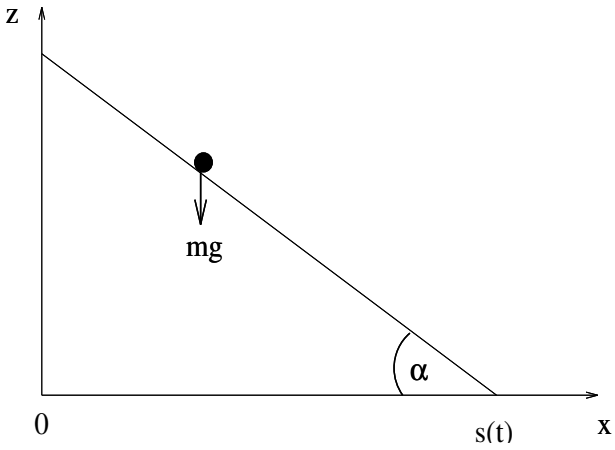
# 8. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Mechanik

Moodle-Abgabe der Wertungsaufgaben bis Mittwoch der 9. Semesterwoche um 19:00 Uhr

**Aufgabe 15:** (6 Punkte)

Auf einen Massepunkt, der sich entsprechend nebenstehender Skizze auf einer schiefen Ebene ($\alpha$=const.) bewegen kann, wirke die Schwerkraft. Stellen Sie für den Fall, daß die Ebene konstant in $x$ Richtung mit $s(t) = \frac{1}{2}bt^2$ beschleunigt wird, die Zwangsbedingung und die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf.
(Hinweis: Zwangsbedingung zweimal nach der Zeit differenzieren, Lagrange-Gleichungen einsetzen, Lagrange'schen Multiplikator $\lambda$ und Bewegungsgleichungen für $\ddot{x}$ und $\ddot{z}$ bestimmen.)
Geben Sie die Zwangskräfte an. Wann verschwinden diese?



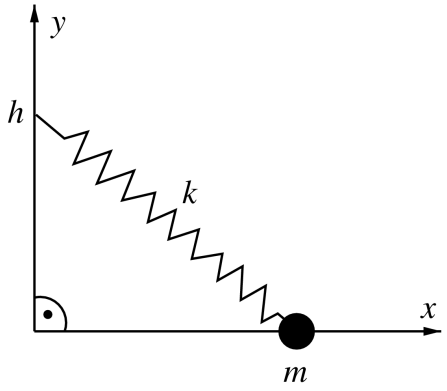

**Aufgabe 16:** (10 Punkte)

Das eine Ende einer masselosen Feder der Federkonstanten $k$ und Ruhelänge $\ell_0$ ist an einem festen Aufhängepunkt auf der $y$-Achse im Abstand $h$ vom Koordinatenursprung gebunden. Am anderen Ende der Feder ist der Massepunkt $m$ befestigt. Der Massepunkt gleite reibungsfrei horizontal auf einem Draht längst der $x$ Achse, $x \in \mathbb{R}$. Die momentane Länge der Feder für ein gegebenes $x$ ist somit $\ell = \sqrt{h^2 + x^2}$.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und stellen Sie die Lagrange-Gleichung zweiter Art auf, wobei Sie $x$ als "generalisierte" Koordinate betrachten können.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen der Masse unter der Annahme, daß $h < \ell_0$ ist, und prüfen Sie, welche stabil bzw. instabil sind.

(c) Berechnen Sie die Frequenz kleiner harmonischer Schwingungen um eine der stabilen Ruhelagen.



**Präsenzaufgabe P8:**

Untersuchen Sie die Bewegung eines Teilchens im Gravitations- oder Coulomb-Feld

$$V(r) = -\frac{k}{r}.$$

(a) Berechnen Sie die Energie $E$ und den Drehimpuls $\vec{L}$ eines Teilchens im angegebenen Feld in Zylinderkoordinaten $(r, \theta, z)$. Die Bewegung soll dabei ausschließlich in der $x - y$ Ebene ($z = 0$) stattfinden. Zeigen Sie, dass wegen der Erhaltung von Energie und Drehimpuls die Gleichung gilt:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r), \quad \ell^2 = |\vec{L}^2|.$$

(b) Führen Sie als neue Variable $s = 1/r$ ein und zeigen Sie durch Ableiten obiger Gleichung nach $\theta$, dass gilt (hier wird die Zeit $t$ implizit als Funktion von $\theta$ aufgefasst):

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = \frac{mk}{\ell^2}.$$

(c) Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung? Überlagern Sie dazu die Lösung der homogenen Gleichung mit einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Bestimmen Sie die Konstanten so, dass $s(\theta = 0) = s_{max}$ ist.

(d) Wie ist die Konstante $\alpha$ und die Exzentrizität $\epsilon$ zu wählen, dass sich aus $s(\theta)$ die Gleichung für Kegelschnitte ergibt:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha}\big\{1 + \epsilon \cos\theta\big\}.$$

Drücken Sie alle Integrationskonstanten aus (c) als Funktion der Energie $E$ und des Drehimpulses $\ell$ aus.