10. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag der 12. Semesterwoche in der Vorlesung.

Aufgabe 28: (6 Punkte)
Verwenden Sie die Eigenschaften der Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators, $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$, $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, sowie die Ortsraumdarstellung, um folgende Differentialgleichungen für die Hermite-Polynome H_n abzuleiten:

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{d}{d\zeta} + 2n\right] H_n(\zeta) = 0, \quad \frac{d}{d\zeta}H_n(\zeta) = 2nH_{n-1}(\zeta), \quad \left[2\zeta - \frac{d}{d\zeta}\right] H_n(\zeta) = H_{n+1}(\zeta).$$

Aufgabe 29: (7 Punkte)

Sei x der Ortsoperator und $k \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass für den 1-dimensionalen harmonischen Oszillator gilt:

$$\langle 0|e^{ikx}|0\rangle = \exp\left[-\frac{k^2}{2}\langle 0|x^2|0\rangle\right].$$

Aufgabe 30: (7 Punkte)
Durch $V(x+a) = V(x)$ sei ein periodisches Potential in einer Dimension definiert. Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens mit der Masse m in diesem Potential:

(a) Zeigen Sie, dass der Translationsoperator $T(a) = e^{-\frac{i}{\hbar}pa}$ mit dem Hamilton-Operator kommutiert.

(b) Zeigen Sie, dass sich eine um a räumlich verschobene Energieeigenfunktion höchstens um eine Phase von der nichtverschobenen Energieeigenfunktion unterscheidet.

(c) Wenn der Phasenfaktor über die Wellenfunktion $\psi_E(x)$ definiert ist gemäß $\psi_E(x'+a) = \langle x'|T^{-1}(a)|\psi_E\rangle \equiv e^{ika}\langle x'|\psi_E\rangle = e^{ika}\psi_E(x')$, so zeigen Sie, dass die simultane Eigenfunktion von T und H als *Blochwelle* geschrieben werden kann: $\psi_E(x') = e^{ikx'}u_k(x')$, wobei $u_k(x')$ periodisch ist, $u_k(x'+a) = u_k(x')$.

(d) Zeigen Sie, dass die periodische Amplitude $u_k(x')$ folgende Gleichung erfüllt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u_k}{dx'^2} - \frac{i\hbar^2 k}{m}\frac{du_k}{dx'} + V(x')u_k = \left(E - \frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)u_k.$$