9. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag der 11. Semesterwoche in der Vorlesung.

Aufgabe 25: (7 Punkte)

Beweisen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel für zwei Operatoren A und B unter der Voraussetzung, dass der Kommutator $[A,B] \sim \mathbb{1}$ ist, so dass $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(a) Man benutze die Taylorentwicklung für $e^{-\lambda B} A e^{\lambda B}$, um zu zeigen, dass

$$e^{-B} A e^{B} = A + [A,B] + \frac{1}{2!}[[A,B],B] + \dots$$

(b) Beweisen Sie nun $e^{A+B} = e^{A}e^{B}e^{-\frac{1}{2}[A,B]} = e^{B}e^{A}e^{\frac{1}{2}[A,B]}$, indem Sie die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda(A+B)} = (A+B)e^{\lambda(A+B)}$$

betrachten und als Lösungsansatz $e^{\lambda(A+B)} = e^{\lambda B}\, X(\lambda)$ mit zu bestimmender Funktion $X(\lambda)$ verwenden. Dabei kann Teilaufgabe (a) nützlich sein.

Aufgabe 26: (6 Punkte)

Die Korrelationsfunktion $C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle$ ist ein Maß für die Autokorrelation der Orte eines quantenmechanischen Teilchens zu verschiedenen Zeiten in einem gegebenen Zustand. Bestimmen Sie die Korrelationsfunktion des harmonischen Oszillators bezüglich des Grundzustands:

(a) Lösen Sie die Heisenberg-Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $p(t)$ mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x$ und $p(0) = p$.

(b) Drücken Sie das Operatorprodukt $x(t)x(0)$ mit Hilfe der Leiteroperatordarstellung von x und p durch a und $a^\dagger$ aus, und berechnen Sie schließlich $C(t) = \langle 0|x(t)x(0)|0\rangle$.

Aufgabe 27(fakultativ): (7 Weihnachts-(Bonus)-Punkte)

Gegeben seien zwei antikommutierende Leiteroperatoren, die die Algebra $\{a, a^\dagger\} = 1$, $\{a,a\} = 0 = \{a^\dagger, a^\dagger\}$ erfüllen. Weiterhin gebe es einen Grundzustand $|0\rangle$, der von a annihiliert werde, $a|0\rangle = 0$. Welche weiteren Zustände folgen daraus? Zeigen Sie, dass es den Zustand $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$ gibt, jedoch weiter $(a^\dagger)^2|0\rangle = 0$ gilt. Folgern Sie anschließend, dass das Zwei-Zustandssystem, das aus $|0\rangle$ und $|1\rangle$ besteht, geschlossen ist (also keine weiteren Zustände existieren), indem Sie alle aus a und $a^\dagger$ zusammensetzbaren Operatoren betrachten.
Was könnte eine physikalische Anwendung dieses Systems sein?