8. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag der 10. Semesterwoche in der Vorlesung.

Aufgabe 22: (6 Punkte)

Wenn ein schwerer Kern durch Abstrahlung eines α-Teilchens zerfällt, muss das α-Teilchen durch die Potenzialbarierre des Kerns getunnelt sein. Nehmen Sie an, dass diese Potenzialbarierre nur durch das Coulombpotenzial zwischen Kern (Ladung $Z\,e$) und α-Teilchen (Ladung $2e$) beschrieben werden kann. Das Potenzial sei also gegeben durch

$$V(x) = \tfrac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\tfrac{1}{x}.$$

Weiterhin sei R der 'klassische Kernradius'; d.h. das α-Teilchen mit einer Energie $0 < E < V(R)$ soll von R nach außen tunneln. Für ein ortsabhängiges Potenzial ist die Tunnelwahrscheinlichkeit (von x_i nach x_a) folgendermaßen gegeben:

$$T(E) \sim e^{-\frac{2}{\hbar}\int_{x_i}^{x_a}\sqrt{2m(V(x)-E)}},$$

wobei in diesem Fall $x_i = R$. Berechnen Sie diese Tunnelwahrscheinlichkeit für den α-Zerfall.

Aufgabe 23: (6 Punkte)

Betrachten Sie ein konstantes imaginäres Potenzial $-iV$.

(a) Lösen Sie die Schrödingergleichung für dieses Potenzial (Hinweis: Sie können ein-und auslaufende ebene Wellen $e^{\pm ikx - i\frac{E}{\hbar}t}$ ansetzen, wobei k zu bestimmen ist.)

(b) Berechnen Sie den Wahrscheinlichkeitsstrom j zu führender Ordnung in $V \ll E$, wobei E der (reelle) Energieeigenwert ist (vgl. Aufgabe 20, Blatt 7).

(c) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis: Welchen physikalischen Prozess könnte der obige Hamiltonoperator beschreiben? Wie passt Ihr Ergebnis zu der Tatsache, dass der Hamiltonoperator des Systems nicht hermitesch ist?

Aufgabe 24: (8 Punkte)

Betrachten Sie das quantenmechanische Analogon des Virialsatzes: Gegeben sei der Hamilton-Operator $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$.

(a) Verifizieren Sie im Heisenberg-Bild mit Hilfe der Heisenberg-Bewegungsgleichungen folgende Identität:

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}) \right\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right\rangle - \langle \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\nabla} V\rangle.$$

(b) Der quantenmechanische Virialsatz gilt für Zustände, bei denen die linke Seite verschwindet. Zeigen Sie, dass dies für stationäre Zustände $|n\rangle$ (mit $H|n\rangle = E_n|n\rangle$) der Fall ist.

(c) Zeigen Sie, dass für stationäre Zustände und für Potentiale der Form $V(r) = A\,r^\alpha$ mit $r = |\mathbf{x}|$ gilt:

$$\langle n|\frac{\mathbf{p}^2}{2m}|n\rangle = \frac{\alpha}{2+\alpha}\,E_n.$$