6. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag der 8. Semesterwoche in der Vorlesung.

Aufgabe 16: (7 Punkte)

Betrachten Sie ein zweidimensionales System, dessen Hamiltonoperator in Matrixdarstellung (bzgl. der S_z Eigenbasis) durch

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.
(a) Stellen Sie den Zeitentwicklungsoperator in der S_z-Eigenbasis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ dar und berechnen Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$, wenn

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

ist. Zu welchen Zeitpunkten ist $|\psi(t)\rangle$ identisch mit dem ursprünglichen Zustand $|\psi(0)\rangle$?
(b) Betrachten Sie den Operator

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kann es sich um eine Konstante der Bewegung handeln? Geben Sie den Erwartungswert von A im Zustand $|\psi(t)\rangle$ (also zu beliebigen Zeitpunkten) an.
(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird im Zustand $|\psi(t)\rangle$ der Eigenwert $\lambda = +3$ gemessen?

Aufgabe 17: (7 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im unendlich hohen eindimensionalen Potentialtopf mit $V = 0$ für $0 \le x \le a$ und $V = \infty$ für $x < 0$ oder $x > a$.

(a) Man bestimme die normierten Wellenfunktionen im Ortsraum und das Energiespektrum.

(b) Betrachten Sie nun die beiden untersten Energiezustände als Zweiniveausystem und nehmen Sie an, dass im Zustand $|\psi, t = 0\rangle$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den $n = 2$ Energiezustand um den Faktor $\sqrt{3}$ größer ist als für den Grundzustand. Wie lautet die Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$ bzw. $t > 0$?

(c) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(x,t)|^2 = |\langle x|\psi, t\rangle|^2$.

Aufgabe 18: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die eindimensionale Schrödingergleichung mit dem Potential $V(x) = V_0\, a\delta(x)$, $V_0 < 0$, genau einen gebundenen Zustand mit Energie $E < 0$ besitzt und berechnen Sie dessen Energie und Wellenfunktion.