5. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag der 7. Semesterwoche in der Vorlesung.

Aufgabe 13: (5 Punkte)

Verifizieren Sie für Operatoren A und B und $\epsilon > 0$ die Baker-Campbell-Hausdorff-Relation bis zur 3. Ordnung in ϵ:
$e^{\epsilon A} e^{\epsilon B} = e^{\epsilon A + \epsilon B + \frac{\epsilon^2}{2}[A,B] + \frac{\epsilon^3}{12}[A,[A,B]] + \frac{\epsilon^3}{12}[B,[B,A]] + \cdots}$.

Aufgabe 14: (8 Punkte)

Betrachten Sie ein Gaußsches Wellenpaket der Breite d im Ortsraum,

$$\psi(x') = \langle x'|\psi\rangle = N \exp\left(ikx' - \frac{x'^2}{2d^2}\right).$$

(a) Bestimmen Sie die Normierung N, so dass $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$, und $\langle p^2\rangle$.

(c) Bestimmen Sie die Varianzen $\langle(\Delta x)^2\rangle$ und $\langle(\Delta p)^2\rangle$ und zeigen Sie, dass das Gaußsche Wellenpaket die Unschärferelation minimal erfüllt.

(d) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\psi(p') = \langle p'|\psi\rangle$ im Impulsraum.

(e) Diskutieren Sie die Limites $d \to 0$ und $d \to \infty$ in Orts- und Impulsraum.

Aufgabe 15: (7 Punkte)

Der Translationsoperator für eine endliche räumliche Verschiebung ist gegeben durch

$$T(\mathbf{a}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}\right)$$

(a) Berechnen Sie $[\mathbf{x}, T(\mathbf{a})]$.

(b) Betrachten Sie den Erwartungswert $\langle|\mathbf{x}|\rangle$ des Betrages des Ortsoperators $|\mathbf{x}|$ bezüglich eines beliebigen Zustands $|\psi\rangle$ und zeigen Sie, wie sich der Erwartungswert bei einer Translation des Zustands $|\psi\rangle \to T(\mathbf{a})|\psi\rangle$ ändert.