

### 3. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG QUANTENMECHANIK I

Abgabe am Dienstag der 5. Semesterwoche in der Vorlesung.

#### Aufgabe 7:

(6 Punkte)

Betrachten Sie einen Ket-Vektorraum mit der orthonormalen Basis  $\{|a'\rangle\}$  von Eigenkets eines hermiteschen Operators  $A$ . Das Eigenwertspektrum sei nicht entartet, d.h. keine zwei Eigenwerte sind gleich.

- (a) Zeigen Sie, dass  $\prod_{a'}(A - a')$  der Nulloperator ist.  
 (b) Welche Bedeutung und Eigenschaften hat der folgende Operator:

$$P_{a'} = \prod_{a'' \neq a'} \frac{(A - a'')}{(a' - a'')}$$

- (c) Verdeutlichen Sie (a) und (b) anhand von  $A = S_z$  für ein Spin- $\frac{1}{2}$  System.

#### Aufgabe 8:

(6 Punkte)

Sei  $X$  ein linearer Operator und  $\{|a'\rangle\}$  eine orthonormale Basis eines Ket-Vektorraums. Die Spur eines Operators ist definiert durch

$$\text{tr}X := \sum_{a'} \langle a'|X|a'\rangle.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

- (a)  $\text{tr}X$  ist unabhängig von der Wahl der Basis, d.h.  
 $\text{tr}X = \sum_{b'} \langle b'|X|b'\rangle$ , für eine alternative orthonormale Basis  $\{|b'\rangle\}$   
 (b)  $\text{tr}X^\dagger = (\text{tr}X)^*$   
 (c)  $\text{tr}(\lambda X) = \lambda \text{tr}X$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$   
 (d)  $\text{tr}(X + Y) = \text{tr}(Y + X)$   
 (e)  $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$   
 (f)  $\text{tr}(|a'\rangle\langle a''|) = \delta_{a'a''}$

#### Aufgabe 9:

(8 Punkte)

Betrachten Sie die Unschärferelation für die Drehimpulsoperatoren  $S_x$  und  $S_y$  im Stern-Gerlach-Experiment:  $\langle (\Delta S_x)^2 \rangle \langle (\Delta S_y)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [S_x, S_y] \rangle|^2$ . Ist die Unschärferelation immer erfüllt? Bestimmen Sie diejenigen Zustände, für die das Gleichheitszeichen gilt. (Hinweis: arbeiten Sie in der  $|\pm\rangle = |S_z; \pm\rangle$  Basis und überzeugen Sie sich zunächst, dass ein allgemeiner normierter Stern-Gerlach-Zustand ohne Beschränkung der Allgemeinheit als  $|\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |-\rangle$  geschrieben werden kann.)