# 1. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag der 3. Semesterwoche in der Vorlesung.

**Aufgabe 1:** (5 Punkte)

Einige klassische Betrachtungen zum Stern-Gerlach-Apparat: Die Silberatome werden bei $T = 2227°\mathrm{C}$ verdampft.

(a) Wie groß ist ihre Geschwindigkeit im Quadratmittel? Zur Erinnerung: $\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle_T = \frac{1}{2}k_\mathrm{B}T$, wobei $k_\mathrm{B}$ die Boltzmann-Konstante ist.

Nehmen Sie klassisch an, dass das magnetische Moment $\boldsymbol{\mu}$ der Atome durch eine Eigendrehung der Ladungsverteilung mit Drehimpuls $\mathbf{J}$ zustandekäme, $\boldsymbol{\mu} = \gamma\mathbf{J}$. Die zeitliche Änderung des atomaren Drehimpulses in einem Magnetfeld $\mathbf{B}$ ist gegeben durch

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}.$$

(b) Wenn $\mathbf{B}$ in $z$ Richtung liegt, und anfänglich für ein Atom $J_z = 0$ ist, nach welcher Zeit kehrt $\mathbf{J}$ seine Richtung um?

(c) Welche Strecke $d$ hat das Atom dann mit der obigen Geschwindigkeit im Quadratmittel zurückgelegt. Wählen Sie als Zahlenbeispiel $\gamma|\mathbf{B}| = 1.76 \times 10^5 \frac{1}{\mathrm{s}}$.

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)

Welche Eigenwerte besitzt $e^A$, wenn der Operator $A$ der Gleichung $A^2 = A$ genügt und diagonalisierbar ist? Besitzen die Operatoren $A$ und $e^A$ ein Inverses?

**Aufgabe 3:** (10 Punkte)

Sei

$$U(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Beweisen Sie die Gruppeneigenschaft $U(\theta_1)U(\theta_2) = U(\theta_1 + \theta_2)$.

(b) Berechnen Sie die ersten drei Koeffizienten der Potenzreihe

$$U(\theta) = U_0 + \left(\frac{\theta}{2}\right)U_1 + \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 U_2 + \ldots$$

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass die Reihe in (b) in eine Exponentialfunktion aufsummiert werden kann,

$$U(\theta) = e^{\frac{\theta}{2}U_1} = e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_2}, \quad \text{mit } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$